

Ecuaciones diferenciales y sistemas dinámicos

Jorge Augusto Pérez Alcázar



Ecuaciones
*d*iferenciales
y sistemas dinámicos

Tomo II

Catalogación en la fuente: Biblioteca Universidad EAN

"Pérez Alcázar, Jorge Augusto

Ecuaciones diferenciales y sistemas dinámicos / Jorge Augusto Pérez Alcázar; adaptador Juan Carlos Velásquez Sánchez; diseñador César Augusto Rubiano Moreno.

Descripción: 1a edición / Bogotá: Universidad Ean, 2020
642 páginas (volumen II).

ISBNe 9789587566321 (volumen II)

- | | |
|-----------------------------|--|
| 1. Ecuaciones diferenciales | 2. Sistemas dinámicos diferenciales |
| 3. Derivadas (Matemáticas) | 4. Ecuaciones -- Problemas, ejercicios, etc. |
| 5. Sistemas lineales | 6. Transformaciones de Laplace |

I. Velásquez Sánchez, Juan Carlos (adaptador)

II. Rubiano Moreno, Cesar Augusto (diseñador)

515.35 CDD 23

Edición

Gerencia de Investigaciones

Gerente de investigación y transferencia

Leonardo Rodríguez Urrego

Coordinadora de Publicaciones

Laura Cediél Fresneda

Revisor de estilo

Juan Carlos Velásquez

Diseño, diagramación

Cesar Rubiano

Editado y publicado por Ediciones Ean,
Universidad Ean, 2020
Todos los derechos reservados.

ISBNe: 9789587566321

- © Universidad EAN, El Nogal: Cl. 79 No. 11 - 45. Bogotá D.C., Colombia, Suramérica, 2019 Prohibida la reproducción parcial o total de esta obra sin autorización de la Universidad EAN®
- © UNIVERSIDAD EAN: SNIES 2812 | Personería Jurídica Res. n.º 2898 del Minjusticia - 16/05/69 | Vigilada Mineducación. CON ACREDITACIÓN INSTITUCIONAL DE ALTA CALIDAD, Res. N.º 29499 del Mineducación 29/12/17, vigencia 28/12/21

Producido en Colombia.

CAPÍTULO 9

APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE SEGUNDO ORDEN Y DE GRADO SUPERIOR

9.1	Las vibraciones mecánicas I. Formulación y respuesta libre	16
9.1.1	Sistemas masa resorte	16
9.1.2	Sistemas masa resorte con gravedad	20
9.1.3	Movimiento armónico simple (sin amortiguación, $\delta=0$)	23
9.2	Ejercicios	34
9.3	Movimiento con respuesta libre y con la fricción ($\delta>0$)	39
9.4	Ejercicios	47
9.5	Las vibraciones mecánicas II. Respuesta forzada	51
9.6	Ejercicios	63
9.7	La fricción está presente ($\delta>0$) (oscilación forzada amortiguada)	67
9.8	Ejercicios	74
9.9	Circuitos eléctricos lineales	76
9.10	Ejercicios	87
9.11	El péndulo y otras aplicaciones	91
9.12	Ejercicio	114
9.12.1	Ejercicios sobre el péndulo	114
9.12.2	Modelos de persecución	116
9.12.3	Modelos geométricos	118
9.13.4	Modelos de movimiento	120
9.13.5	Flexión de una viga	122

CAPÍTULO 10

RELACIÓN ENTRE SISTEMAS DE PRIMER ORDEN Y ECUACIONES DE SEGUNDO ORDEN

10.1	Algunos ejemplos de modelos por medio de sistemas de ecuaciones	128
10.2	Ejercicios	150
10.3	Cómo se relacionan los sistemas lineales de primer orden, las ecuaciones diferenciales de segundo orden y el método de Euler para aproximación de soluciones	154
10.4	Comentarios acerca del hallazgo de soluciones y la clasificación de un sistema	157
10.5	Sistemas lineales homogéneos con coeficientes constantes	167
10.6	Tipos de gráficas y método de Euler	171
10.7	Ejercicios	184
10.8	Solución de sistemas lineales usando vectores y valores propios reales de la matriz	194
10.9	Ejercicios	216
10.10	Sistemas lineales con valores propios en los números complejos	224
10.11	Ejercicios	243
10.12	Estabilidad y clasificación de sistemas lineales	252
10.13	Ejercicios	274
10.14	Sistemas lineales de ecuaciones diferenciales desacoplados	279
10.15	Ejercicios	289
10.16	Matriz exponencial	292
10.17	Ejercicios	306
10.18	Sistemas lineales no homogéneos	309
10.19	Ejercicios	322
10.20	Sistemas no lineales de ecuaciones diferenciales	326

10.20.1	Equilibrio y estabilidad	327
10.20.2	Análisis cualitativo	330
10.20.3	Volviendo al equilibrio	331
10.21	Ejercicios	341
10.22	Linealización	349
10.23	Ejercicios	369
10.24	Problemas de aplicación de sistemas lineales homogéneos y no homogéneos y sistemas no lineales	373
10.25	Ejercicios	411
10.26	Cantidades que se conservan	423
10.27	Ejercicios	431
10.28	Mecánica no lineal	434
10.29	Ejercicios	469
10.30	El método de Lyapunov sobre la estabilidad de los sistemas de ecuaciones	478
10.31	Ejercicios	488

CAPÍTULO 11

TRANSFORMADA DE LAPLACE

11.1	La transformada de Laplace y su inversa	497
11.2	Ejercicios	514
11.3	Solución de ecuaciones diferenciales lineales con valores iniciales, mediante la transformada de Laplace	520
11.4	Ejercicios	541
11.5	La función escalón y la función delta de Dirac	546
11.6	Ejercicios	583
11.7	La convolución de funciones y la función de transferencia	602
11.8	Ejercicios	616
11.9	Solución de un sistema lineal de ecuaciones mediante la transformada de Laplace	626
11.10	Ejercicios	636
	Referencias bibliográficas	641
	Bibliografía	643

JUSTIFICACIÓN

En este segundo volumen de “Ecuaciones diferenciales y Sistemas Dinámicos”, se muestra de manera más amplia los conceptos básicos de los sistemas dinámicos (cualquier fenómeno que transcurre en el tiempo) que permea todas las áreas del conocimiento humano, desde nuestro sistema solar, cambio de temperatura, fluctuaciones de cuerpos, crecimiento de poblaciones, transmisiones de epidemias, comportamientos de tumultos de personas y en fin de todo fenómeno natural.

Todos estos fenómenos lineales y no lineales lo podemos modelar mediante sistemas de ecuaciones lineales y no lineales, que nos permiten entrar en todo un nuevo vocabulario de la nueva ciencia del caos, como son: la complejidad, los fractales, bifurcaciones y sistemas no lineales, que ha evolucionado a partir de una terminología abstrusa a una parte común del lenguaje de la ciencia.

Por tal razón en este segundo tomo de “Ecuaciones diferenciales y sistemas Dinámicos” queremos presentar todo este nuevo lenguaje de la nueva ciencia del caos, de manera elemental, que permita a nuestros estudiantes entender amplia y precisa los elementos básicos de esta ciencia. Si bien esto puede parecer una hipérbole periodística,

hay pocas dudas de que muchos de los conceptos que se verán en este texto son conceptos muy importantes en la nueva teoría de los sistemas dinámicos, como son la multi-estabilidad global, estabilidad local, dependencia sensitiva a condiciones lineales, atractores, que son temas relevantes en las áreas como la biología, ingeniería, medicina, ecología, económica y astronomía. En este texto, presentamos los sistemas de ecuaciones lineales y no lineales y sus diferentes aplicaciones y formas de solucionarlos con la ayuda del álgebra lineal y la teoría de la transformada de Laplace.

CAPÍTULO 9.

APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE SEGUNDO ORDEN Y DE GRADO SUPERIOR

Contenido

9.1	Las vibraciones mecánicas I.	14
9.2	Ejercicios	32
9.3	Movimiento con respuesta libre y con la fricción ($\delta > 0$)	37
9.4	Ejercicios	45
9.5	Las vibraciones mecánicas II. Respuesta forzada	49
9.6	Ejercicios	61
9.7	La fricción está presente ($\delta > 0$) (oscilación forzada amortiguada)	65
9.8	Ejercicios	72
9.9	Circuitos eléctricos lineales	74
9.10	Ejercicios	85
9.11	El péndulo y otras aplicaciones	89
9.12	Ejercicios	112

Competencias

1. Identificar el modelo masa resorte en sus diferentes aplicaciones a la física.
2. Aplicar las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden a problemas de la vida cotidiana.
3. Reconocer y solucionar problemas cuya solución requiere modelos de ecuaciones diferenciales lineales de orden superior.

Figura 1. Robert Hooke (1635-1703).



Fuente. Enciclopedia Británica (Biblioteca virtual Universidad EAN).

Hooke nace en Freshwater, Inglaterra, en 1635 y muere en Londres, en 1703. Fue un físico y astrónomo inglés, conocido principalmente por sus estudios sobre la elasticidad, asimismo fueron notables sus descubrimientos astronómicos y sus aportaciones a la biología.

Formado en la Universidad de Oxford, Robert Hooke colaboró en el seno de esta institución con el químico británico **Robert Boyle** en la construcción de una bomba de aire (1655). Cinco años más tarde formuló la ley de la elasticidad que lleva su nombre, la cual establece la relación de proporcionalidad directa entre el estiramiento sufrido por un cuerpo sólido y la fuerza aplicada para producir ese estiramiento.

Introducción

En este capítulo volvemos a revisar las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas y no homogéneas de grado superior, para ver su aplicación a problemas de vibraciones mecánicas, sistema masa resorte, péndulos lineales, circuitos RLC y otras aplicaciones en las ciencias.

9.1 Las vibraciones mecánicas I. Formulación y respuesta libre

En el capítulo 8 examinamos ejemplos de problemas de valor inicial para ecuaciones diferenciales de segundo orden con coeficientes constantes. Ahora veremos cómo se utilizan estas ecuaciones para crear modelos de algunas situaciones físicas, tales como masa resorte, péndulos lineales simples y circuitos RLC en serie.

9.1.1 Sistemas masa resorte

Antes de empezar a mirar el problema masa resorte, debemos recordar cómo la segunda ley de Newton¹ nos sirve para modelar problemas que involucran el movimiento rígido de un cuerpo:

$$\frac{d}{dt}(m \cdot v) = F_T$$

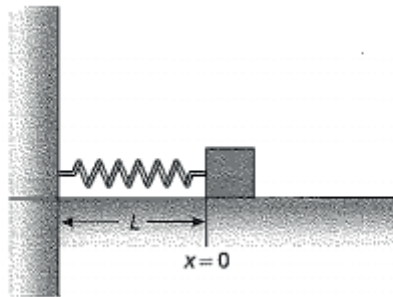
Donde m es la masa, v es la velocidad, mv es el momento, t es el tiempo y F_t es la fuerza total que actúa sobre el cuerpo. El resultado de la ecuación diferencial puede ser analizado usando los elementos dados en el capítulo 8. Para este trabajo se usarán las unidades centímetros-gramos-segundos (cgs) y pies-libras-segundos (fps), como unidades de medidas.

¹ La forma de la segunda ley de Newton es para las denominadas masas puntuales. Para algunas masas distribuidas, se permite aplicar esta ley como si toda la masa estuviera concentrada en su centro de masa.

Sistema masa resorte en forma horizontal

Supongamos, entonces, que tenemos un resorte en forma horizontal conectado a una pared con una masa constante m tal como se muestra en la figura (véase la figura 2). Supondremos que la fuerza total F_T se compone de tres fuerzas:

Figura 2. Sistema masa – resorte en forma horizontal.



Fuente. Cappel y Haberman (2008).

F_s = fuerza ejercida por el resorte

F_r = una fuerza de fricción o de resistencia que actúa sobre la masa

(Por ejemplo, la resistencia del aire)

F_e = cualesquiera otras fuerzas externas (tales como el magnetismo)

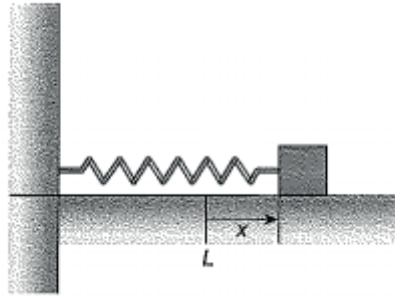
Entonces la ley de Newton toma la forma:

$$m \frac{d^2y}{dx^2} = F_T = F_s + F_r + F_e \quad (1)$$

Sea L la longitud del resorte sin la masa unida a él (es decir la longitud natural del resorte). Introducimos un sistema de coordenadas tal que $x = 0$, está localizado a la distancia L , de la pared, como se muestra en la figura 2. Entonces $x(t)$ es la distancia de la masa desde esta posición. Si $x(t) > 0$ (como se ilustra en la figura), el resorte es

estirado desde su forma natural una distancia x hacia la derecha y es conocido que el resorte ejerce una fuerza hacia la izquierda (figura 3).

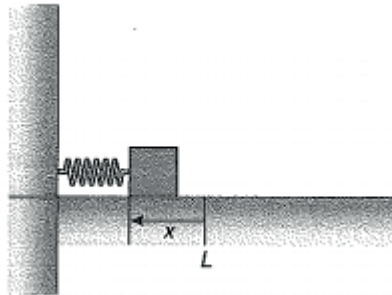
Figura 3. Masa – Resorte horizontal con desplazamiento hacia la derecha.



Fuente. Cappel y Haberman (2008).

Si $x(t) < 0$, en este caso el resorte es comprimido y en este caso el resorte ejerce una fuerza hacia la derecha:

Figura 4. Masa – Resorte horizontal con desplazamiento hacia la izquierda.



Fuente. Cappel y Haberman (2008).

Podemos ahora expresar las diferentes fuerzas en (1) en términos de x . Para empezar, tenemos que asumir que el resorte satisface la **Ley de Hooke**².

² Robert Hooke (1635-1703), de origen inglés, no fue solo físico y matemático, sino un gran artesano que hizo significativos inventos en instrumentos de astronomía y relojes.

La fuerza ejercida por un resorte es proporcional a la distancia que el resorte es extendido (o comprimido).

Se trata de un supuesto no solo para el tipo del resorte, sino también la masa, las fuerzas eternas y unas condiciones iniciales. En particular, estamos asumiendo que el movimiento resultante no es demasiado grande en amplitud, por lo que se utiliza de esa manera una ecuación lineal. Debido al sistema de coordenadas que hemos elegido, la distancia se estira, el resorte es x y de Hooke se convierte:

$$F_s = -k \cdot s \quad (2)$$

Donde k es una constante positiva, llamada la **constante del resorte**. k es positiva porque la fuerza que actúa sobre el resorte es opuesta al signo de x . Es decir, si el resorte es comprimido, $x < 0$ entonces la fuerza sobre el resorte es positiva.

Muchos tipos de fuerzas resistentes a bajas velocidades son proporcionales (aproximadamente) a la velocidad, es decir:

$$F_r = -\delta v = -\delta \frac{dx}{dt}, \text{ con } \delta > 0. \quad (3)$$

La constante δ es llamada la **constante de amortiguamiento**. La constante de proporcionalidad $-\delta$ es negativa, ya que la fuerza de fricción actúa en la dirección opuesta al movimiento y debemos tomar $\delta \geq 0$. Tenga en cuenta que (2), al igual que la ley de Hooke, representa una restricción a la moción para ser estudiada y no solo una suposición sobre el tipo de resorte y el tipo de resistencia. Por último, asumimos que las fuerzas externas F_e dependen solo de tiempo t y no en la posición x o velocidad $\frac{dx}{dt}$.

Luego sustituyendo (2) y (3) en la ley de Newton (1), se obtiene una ecuación diferencial lineal:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - \delta \frac{dx}{dt} + f(t) \quad (4)$$

Donde $f(t) = F_e(t)$. Esta ecuación diferencial es usualmente escrita en la forma:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \delta \frac{dx}{dt} + kx = f(t) \quad (5)$$

Observe que m , δ y k son todas constantes no negativas. Las condiciones iniciales usualmente empleadas en (4) son la posición inicial $x(0)$ y la velocidad inicial $v(0) = v^{(0)}$.

A veces es conveniente pensar en la fuerza de resistencia como aquella que se debe a un dispositivo conectado, tal es un pistón que se mueve en un fluido. Uno de tales dispositivos se llama amortiguador.

Conceptualmente, este enfoque es similar al modelado de la resistencia en un alambre por la inclusión de pequeña resistencia en las ecuaciones de circuitos eléctricos, en lugar de pensar en la resistencia como distribuida por todo el alambre.

9.1.2 Sistemas masa resorte con gravedad

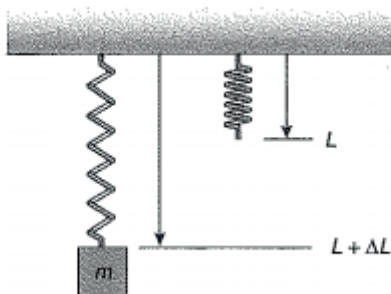
Unas pocas complicaciones adicionales se producen por un sistema masa resorte vibrando verticalmente, en el que se debe incluir la fuerza debido a la gravedad. Después de un poco de esfuerzo en la elección de un sistema de coordenadas apropiado, vamos a demostrar que (5) sigue siendo válida.

Supongamos que el sistema masa resorte se cuelga de un soporte fijo. La fuerza de gravedad que actúa hacia abajo sobre la masa (el peso) es:

$$F_g = mg \quad (6)$$

Donde $g = 32$ pies/seg² (fps) o 980 cm/seg² (cgs). Una vez más sea L la longitud del resorte que cuelga sin la masa unida (figura 5). Sea y la medida del cambio del resto de longitud. Entonces: es la distancia L del soporte.

Figura 5. Gráficadel sistema masa – resorte vertical con gravedad.



Fuente. Cappel y Haberman (2008).

Medimos y hacia abajo de manera que y positivo corresponde a la longitud adicional del resorte. Entonces la ley de Newton con la fuerza gravitatoria (6) se convierte en:

$$m \frac{d^2y}{dt^2} + \delta \frac{dy}{dt} + ky = mg + f(t) \quad (7)$$

En primer lugar se analiza lo que sucede cuando una fuerza externa $f(t)$ sea igual a 0. A partir de nuestra experiencia, sabemos que con la gravedad se estirará con el peso de la masa (figura 5) y estar en reposo cuando $y = \Delta L$ (que vamos a determinar). Si la masa está en reposo ($y = \Delta L$), entonces la fuerza de la gravedad debe equilibrar las fuerzas de resorte, de modo que:

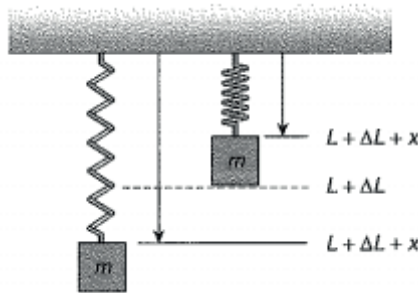
$$k\Delta L = mg \quad (8)$$

El estiramiento ΔL del resorte debido a la fuerza gravitatoria viene dada por (8). A menudo, en los experimentos el peso de los objetos mg es conocido y ΔL se mide fácilmente. Por lo tanto, la constante k del resorte se puede determinar a partir de (8).

Si elegimos (incluso con una fuerza externa) un sistema de coordenadas x centrada en el sistema de reposo dado (figura 6), entonces:

$$y = x + \Delta L \quad (9)$$

Figura 6. Gráfica del sistema masa – resorte sobre un sistema de coordenadas.



Fuente . Campel y Haberman (2008).

Observe que $x = 0$ corresponde a $y = \Delta L$. Si (9) lo sustituimos en (7), tenemos:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \delta \frac{dx}{dt} + k(x + \Delta L) = mg + f(t)$$

Pero como $x\Delta L = mg$ de (8) y, por eso tenemos finalmente:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \delta \frac{dx}{dt} + kx = f(t) \quad (10)$$

La ecuación (10) es la misma que la ecuación (5), esto muestra que la vibración del sistema masa resorte vertical movido por la fuerza de gravedad es la misma que el sistema masa resorte en la forma horizontal, si un sistema de coordenadas se elige teniendo en cuenta el pando debido a la gravedad.

Respuesta libre

Suponiendo que no existe una fuerza externa diferente a la gravedad, esto es que la fuerza externa es $f(t) = 0$. La solución de la ecuación diferencial homogénea resultante es:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \delta \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

Es llamada la respuesta libre (o natural) del sistema masa resorte. Esto es cómo reacciona el sistema para las condiciones iniciales dadas, si se le permite continuar sin interferencia externa. Tenga en cuenta que la respuesta libre es lo mismo que la solución de la ecuación homogénea asociada. El comportamiento resultante es bastante diferente, dependiendo de si hay o no cualquier amortiguación presente.

9.1.3 Movimiento armónico simple (sin amortiguación, $\delta=0$)

Si no hay amortiguación ($\delta = 0$), la respuesta libre de un sistema masa resorte está dada por la ecuación diferencial:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \quad (11)$$

Podemos resolver (11) usando las técnicas vistas anteriormente en el capítulo 8. Como la ecuación diferencial tiene coeficientes

constantes (y es homogénea), sustituimos $x = e^{rt}$. La ecuación característica es $mr^2 + k = 0$, que tiene como raíces $r = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$, con $m > 0$, $k > 0$. Entonces la solución general de (11) es:

$$X = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + C_2 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \quad (12)$$

Donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias. Es algunas veces conveniente introducir la notación:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (13)$$

Esto se explicará en breve. Con esta notación, la ecuación diferencial (11) se convierte, después de dividir por m , en:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (\omega_0)^2x = 0 \quad (14)$$

Y entonces su solución general de (12) será más fácil de escribir como:

$$x = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \operatorname{sen}(\omega_0 t) \quad (15)$$

Observe que el número ω_0 que aparece en la solución (15) es la raíz cuadrada de la constante positiva, que es el coeficiente en la ecuación diferencial (14).

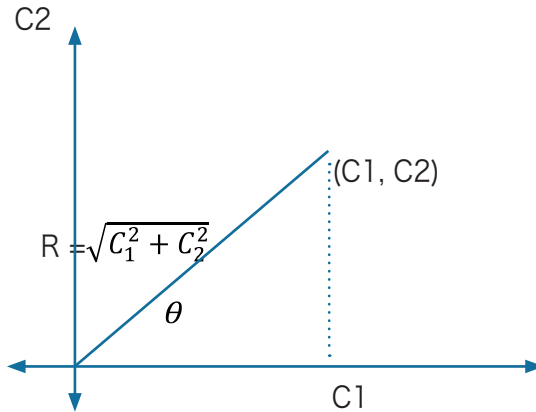
Forma de la amplitud y la fase

La solución general de la ecuación diferencial lineal homogénea (12) es una combinación lineal de $\cos(\omega_0 t)$ y $\operatorname{sen}(\omega_0 t)$. Podemos mostrar, en general, que la adición de estas dos funciones trigonométricas produce una sencilla función trigonométrica porque, por trigonometría se sabe que:

$$C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \operatorname{sen}(\omega_0 t) = R \cos(\omega_0 t - \theta) \quad (16)$$

Para verificar esta fórmula, consideremos el siguiente diagrama:

Figura 7. Diagrama para el cálculo de la amplitud y la fase.



Fuente. Elaborada por el autor.

Recordemos la fórmula de adición $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$, para reescribir el lado derecho de (16) como:

$$C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t) = R(\cos(\omega_0 t) \cos \theta + \sin(\omega_0 t) \sin \theta)$$

Esta ecuación se satisface si:

$$C_1 = R \cos \theta$$

$$C_2 = R \sin \theta$$

Se puede ver en la figura 7 de las ecuaciones anteriores que R y θ son las coordenadas polares del punto (C_1, C_2) . Del teorema de Pitágoras resulta que:

$$R = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$$

La variable θ , es llamada la **variable de fase**, y $R = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ la **amplitud (o amplitud de oscilación)**. Trazando el triángulo y especificando el cuadrante nos ayuda a determinar el ángulo de fase.

La fórmula:

$$\tan \theta = \frac{C_2}{C_1}$$

Es algunas veces conveniente. Sin embargo, $\theta = \arctan\left(\frac{C_1}{C_2}\right)$ es correcta si θ está en el primero, o cuarto cuadrante. Si θ está en el segundo o tercer cuadrante, entonces $\theta = \pi + \arctan\left(\frac{C_1}{C_2}\right)$.

Menos errores se cometen si se indica el cuadrante del ángulo de fase.

En resumen: Forma de la amplitud y la fase.

$$C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t) = R \cos(\omega_0 t - \theta)$$

$$R = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$$

$$\tan \theta = \frac{C_2}{C_1}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{C_2}{C_1}\right), \quad \text{si } C_1 \geq 0,$$

$$\theta = \pi + \arctan\left(\frac{C_2}{C_1}\right), \quad \text{Si } C_1 < 0$$

Uno de los significados de la forma de la amplitud y fase es que permite una representación gráfica relativamente simple de la solución:

$$x(t) = R \cos(\omega_0 t - \theta) \quad (17)$$

Donde R es la amplitud, y la solución es un coseno desplazado:

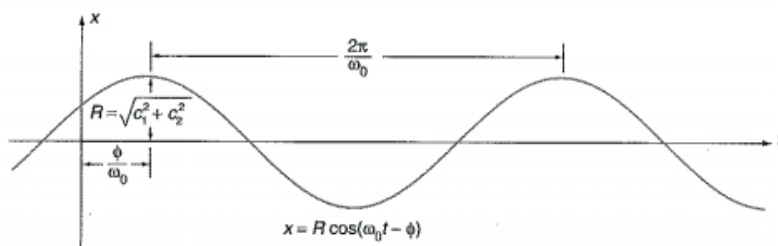
$$x(t) = R \cos\left[\omega_0 \left(t - \frac{\theta}{\omega_0}\right)\right]$$

Uno de los momentos en los que la solución es un máximo es $t = \frac{\theta}{\omega_0}$. La fórmula (17) y la figura 8 muestran que la respuesta libre resultante, en la ausencia de fricción, es un movimiento armónico simple (dada por una función coseno). La masa oscilante es sinusoidal alrededor de $x = 0$. La solución es periódica en el tiempo. Como las

funciones trigonométricas seno y coseno son periódicas de periodo 2π , entonces el periodo T es:

$$\text{Periodo} = T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Figura 8. Movimiento armónico Simple en ausencia de fricción.



Fuente. Elaborada por el autor con el programa Derive.

La frecuencia es el número de periodos (ciclos) por unidad de tiempo. Si la unidad de tiempo fuera segundos y el periodo fuese $1/5$ s, entonces la frecuencia sería 5 ciclos por segundo (o 5 hertz (Hz)). En general, la frecuencia satisface:

$$\text{Frecuencia} = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

Estos hechos dan una importancia a la interpretación del parámetro ω_0 :

$$\omega_0 = 2\pi \cdot \text{frecuencia}$$

Dado que en un periodo del ángulo los cambios de coseno 2π radianes, ω_0 se denomina a veces la **frecuencia circular**, (número de radianes por unidad de tiempo).

Para el sistema masa resorte, dado en (11) o (14), la frecuencia $(\frac{1}{2\pi})\sqrt{\frac{k}{m}}$ es llamada la **frecuencia natural**, ya que es la frecuencia que surge de forma natural sin ningún forzamiento al sistema. Muelles más rígidos (mayor k) tienen frecuencias más grandes.

Ejemplo 1:

Una masa que pesa 2 libras, alarga 6 pulgadas un resorte, en $t = 0$ se libera la masa desde un punto que está 8 pulgadas debajo de la posición de equilibrio con una velocidad ascendente de $4/3$ pies /seg. Determine la ecuación del movimiento.

Solución:

Debido a que se está usando el sistema de unidades (fps), las unidades dadas en términos de pulgadas se deben convertir en pies:

$$6 \text{ pulgadas} = \frac{1}{2} \text{ pie}$$

$$8 \text{ pulgadas} = \frac{2}{3} \text{ pie}$$

Además, se deben convertir las unidades de peso dadas en libras a unidades de masa. De modo que $m = W/g$, tenemos:

$$M = 2/32 = 1/16 \text{ slug.}$$

También por la ley de Hooke:

$$2 = k (1/2)$$

Implica que la constante del resorte es $k = 4$ lb/pie. Por lo tanto, de la ecuación diferencial (11):

$$\frac{1}{16} \frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 0, \text{ o } \frac{d^2x}{dt^2} + 64x = 0$$

El desplazamiento inicial y la velocidad inicial son $x(0) = 2/3$, $x'(0) = -4/3$, donde el signo negativo en la última condición es consecuencia del hecho de que la masa se le da una velocidad inicial en la dirección negativa o hacia arriba.

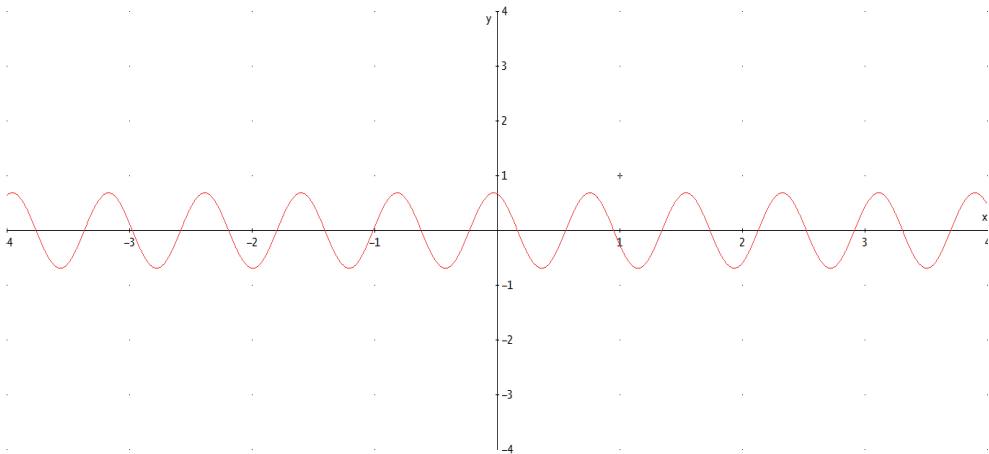
Como se tiene que, $\omega^2 = 64$, o $\omega = 8$, por lo que la solución general de la ecuación diferencial es:

$$x(t) = C_1 \cos(8t) + C_2 \sin(8t)$$

Aplicando las condiciones iniciales a $x(t)$ y $x'(t)$ se obtiene $C_1 = 2/3$ y $C_2 = -1/6$, por lo tanto, la solución particular es (figura 9):

$$x(t) = \frac{2}{3} \cos(8t) - \frac{1}{6} \sin(8t)$$

Figura 9. Gráfica de la solución particular de la última ecuación.



Fuente. Elaborada por el autor con el programa Derive.

La forma alternativa de $x(t)$

Según la ecuación (17), podemos escribir la solución dada como:

$$x(t) = R \cos(\omega_0 t - \theta)$$

$$\text{Donde } R = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{36}} = \sqrt{\frac{17}{36}} = \frac{\sqrt{17}}{6}.$$

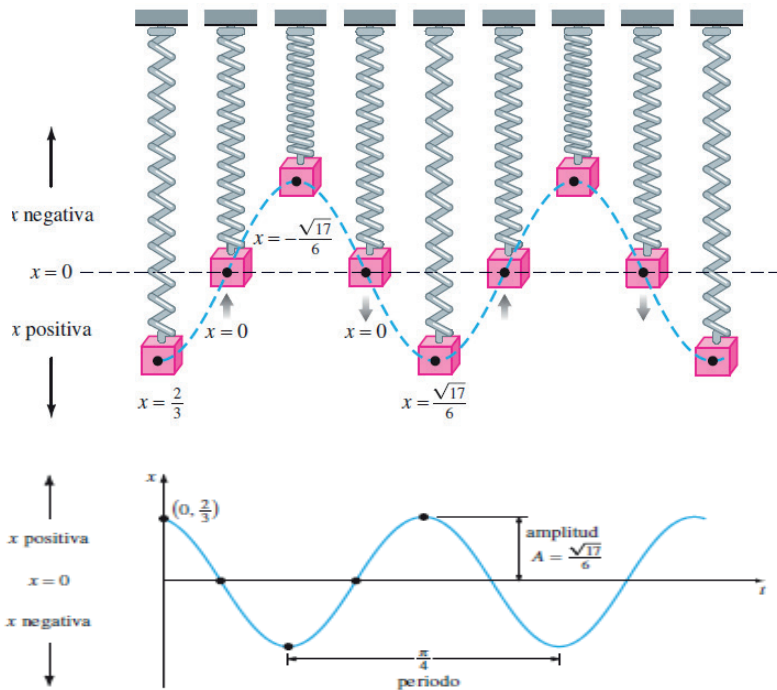
Para el cálculo del ángulo θ , tenemos que $C_1 = 2/3$ y $C_2 = -1/6$, y se encuentra que $\tan \theta = -4$, con una calculadora tenemos que $\theta =$

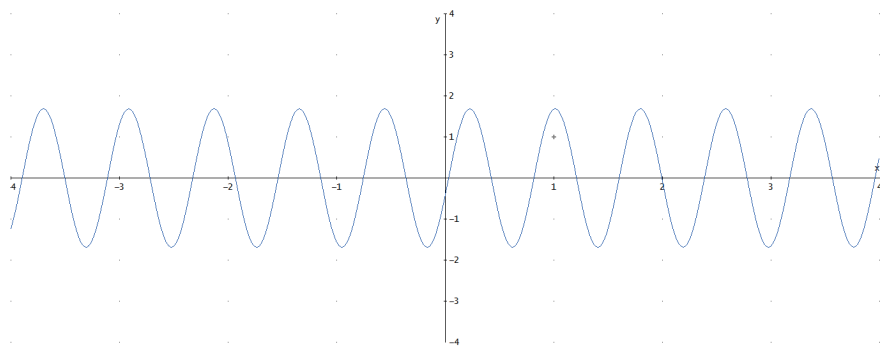
$\arctan(-4) = -1.326$ rad. Este no es el ángulo de fase, puesto que $\arctan(-4)$ se encuentra en el cuarto cuadrante y por tanto contradice el hecho de que $\sin \theta > 0$ y $\cos \theta < 0$ porque $C_1 > 0$ y $C_2 < 0$. Por tanto, se debe considerar que θ es un ángulo del segundo cuadrante, por lo tanto $\theta = \pi + (-1.326) = 1.816$ rad. Así la ecuación (17) se convierte en:

$$x(t) = \frac{\sqrt{17}}{6} \cos(8t - 1.816)$$

El periodo de esta función es $T = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$ s

Figura 10. Gráfica del movimiento sinusoidal del péndulo.





Fuente. Elaborada por el autor con el programa Derive.

Observe que la figura 9 y 10 son exactamente las mismas, Además se puede ver qué significa exactamente el periodo de $\frac{\pi}{4}$.

Ejemplo 2:

A un resorte de longitud constante de 24 pulgadas, se le coloca una masa de 1 slug (32 libras) y se observa que el resorte se estira 3 pulgadas. Ahora, si de nuevo se le coloca una masa de $\frac{1}{2}$ slug (16 libras) produce un alargamiento del resorte. La masa es impulsada con una velocidad de 1 pie/seg hacia abajo. Determine la ecuación del movimiento resultante.

Solución:

Primero se requiere conocer la constante del resorte. De (8) se tiene que:

$$K \cdot \Delta L = mg$$

En unidades fps tenemos:

$$K (1/4 \text{ pies}) = 1 \text{ lib.} \cdot 32 \text{ pies/s}^2$$

$$K = 128 \text{ lib/pies.}$$

Como la masa es $m = \frac{1}{2}$, entonces la ecuación del movimiento es:

$$\frac{1}{2} \frac{d^2x}{dt^2} + 128x = 0$$

O:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 256x = 0$$

La ecuación característica es $r^2 + 256 = 0$, la cual tiene como raíces $r = \pm 16i$. Entonces la solución general de la ecuación diferencial es:

$$x = C_1 \cos(16t) + C_2 \operatorname{sen}(16t)$$

Las condiciones iniciales son:

$$x(0) = \frac{1}{4} \text{ pies.} \quad x'(0) = 1 \text{ pies/seg}$$

Entonces:

$$\frac{1}{4} = x(0) = C_1, \quad x'(0) = 16C_2$$

Y la ecuación del movimiento resultante es:

$$x = \frac{1}{4} \cos 16t + \frac{1}{16} \operatorname{sen} 16t$$

El orden para visualizar de manera más fácil el movimiento es, reescribir esta solución en la forma:

$$X = R \cos(16t - \theta)$$

La amplitud es:

$$R = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{16}\right)^2} = \frac{\sqrt{17}}{16}$$

El ángulo de fase θ está en el primer cuadrante y es:

$$\tan \theta = \frac{C_2}{C_1} = \frac{1/16}{1/4} = \frac{1}{4}$$

De donde:

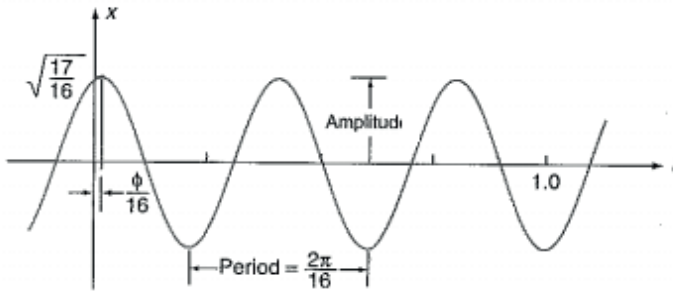
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) = 0.2498 \text{ radian}$$

Entonces, la ecuación del movimiento para este ejemplo se puede escribir como:

$$X = \frac{\sqrt{17}}{16} \cos(16t - 0.2498)$$

El periodo es $\frac{2\pi}{16}$ y la frecuencia es $\frac{16}{2\pi}$ s (ver figura 11).

Figura 11. Gráfica para la curva solución de la última ecuación



Fuente. Elaborada por el autor con el programa Derive.

9.2 Ejercicios

En los ejercicios 1 al 10, colocar la ecuación diferencial dada en la forma $X = R \cos (\omega_0 t - \theta)$:

1. $x(t) = 3 \cos 5t - 7 \sin 5t$

2. $x(t) = -5 \cos 7t + 3 \sin 7t$

3. $x(t) = \sqrt{3} \cos 14t + \sin 14t$

4. $x(t) = 5 \cos 4t + 5\sqrt{3} \sin 4t$

5. $x(t) = -6 \cos 5t + 6 \sin 5t$

6. $x(t) = 4 \cos 7t - 4 \sin 7t$

7. $x(t) = \sqrt{3} \cos 6t - \sin 6t$

8. $x(t) = -\sqrt{3} \cos 9t - \sin 9t$

9. $x(t) = -4 \cos 2t + 4\sqrt{3} \sin 2t$

10. $x(t) = 2 \cos 2t - 2\sqrt{3} \sin 2t$

Respuesta libre. En los ejercicios 11 al 24, asumimos que la ley de Hooke es aplicable, la resistencia es despreciable, y la masa del resorte es despreciable.

11. Una masa de 30 g se une a un resorte. En el equilibrio, el resorte se estira 20 cm. El resorte se jala hacia abajo 10 cm y se suelta. Establecer la ecuación diferencial para el movimiento, y resolverla para determinar el movimiento resultante, haciendo caso omiso de la fricción.
-

12. Una masa de 400 g se une a un resorte. En el equilibrio el resorte se estira 245 cm se jala hacia abajo, el muelle se tira hacia abajo y se libera de tal manera que la masa es de 10 cm por debajo del equilibrio y viaja hacia arriba a $\sqrt{84}$ cm/seg. Establecer la ecuación diferencial para el movimiento. Resolver la ecuación diferencial y expresar la solución en la amplitud forma de fase.

13. Una masa de 8 slugs (8.32 lb) g se une a un resorte largo. El resorte se extiende 2 pies antes de llegar al estado de reposo. Los 8 slugs de masa son retirados y una masa de 2 slug (64 lb) se une y regresa al equilibrio. La masa se empuja hacia abajo y queda en libertad. En el momento en que se libera, la masa de 2 pies por debajo de equilibrio, viaja hacia abajo a 1 pie/seg. Deducir la ecuación diferencial para el movimiento del sistema masa resorte. Resolver la ecuación diferencial.

14. Un sistema masa resorte tiene una constante para el resorte de $k = 5$ g/seg². ¿Qué cantidad de masa se debe agregar al resorte para que su movimiento tenga una frecuencia de 30 Hz?

15. Un resorte está unido a una masa de 10 slugs (320 lb). ¿Cuál debe ser la constante del resorte para hacer que el movimiento resultante tenga una frecuencia 5 Hz?

16. Una masa de 6 g es atada a un sistema masa resorte, con una constante para el resorte de 30 g/seg². ¿Cuál debe la condición inicial para que la respuesta tenga una amplitud de 3 y una fase de $\pi/4$?

17. Una masa de 17 g es atada a un sistema masa resorte con el resorte de constante 63 g/seg^2 . ¿Cuál debe ser la condición inicial para obtener una respuesta con amplitud 2 y una fase de $\pi/3$?

18. Suponga que se tiene un sistema masa resorte como el de la figura 9.5.

- a. ¿Qué efecto sobre el periodo y la frecuencia se da si se duplica la masa?
 - b. ¿Qué efecto sobre el periodo y la frecuencia se da si se duplica la constante del resorte?
 - c. ¿Qué efecto sobre el periodo y la frecuencia se da si se duplican tanto la masa como la constante del resorte?
-

19. Un sistema masa resorte con masa m y constante del resorte k está sujeto a un repentino impulso. El resultado es que en $t = 0$, la masa está en posición de equilibrio, pero tiene una velocidad de 10 cm/seg hacia abajo.

- a. Determine el movimiento subsiguiente.
 - b. Determine la amplitud del movimiento resultante como función de m y k .
 - c. ¿Cuál es el efecto sobre la amplitud si la constante k va creciendo?
 - d. ¿Cuál es el efecto sobre la amplitud si la masa m va creciendo?
-

20. Como en la situación del ejercicio 19, si la masa es 50g , ¿qué debe suceder con la constante del resorte para poder obtener una amplitud de 20 cm ?

21. En el tiempo $t = 0$ la masa de un sistema masa resorte con masa m y constante del resorte k es observada un 1 pie por debajo del equilibrio y desplazándose hacia abajo a una velocidad de 1 pie/seg.

- a. Determine el movimiento subsiguiente.
 - b. Determine la amplitud como una función de m y k .
 - c. ¿Cuál es el efecto sobre la amplitud si crece m o k ?
-

22. Como en el ejercicio 21, si la constante del resorte es $k = 8$ lb/pies, ¿qué debe suceder con la masa para obtener una amplitud de 4 pies? ¿En qué tiempo se obtuvo por primera vez esta amplitud?

23. **Conservación de la energía mecánica.** Suponga que un sistema masa resorte está modelado por la ecuación $m y'' + k y = 0$. Las cantidades $\frac{1}{2} m v^2$ y $\frac{1}{2} k y^2$ son la **energía cinética** y la **energía potencial elástica**. Su suma es la **energía total mecánica**. Multiplicando $m y'' + k y = 0$ por y' y integrando para mostrar que $\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k y^2 = \text{constante}$.

24. Sea $E = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k y^2 = \frac{1}{2} m (y')^2 + \frac{1}{2} k y^2$. Muestre que si y es la solución de $m y'' + \delta y' + k y = 0$ con $\delta > 0$, entonces $\frac{dE}{dx} < 0$. Luego E es monótonamente decreciente, es decir, que la energía mecánica decrece en la presencia de la resistencia.

En los ejercicios 25 al 30, encuentre la solución general (si la condición inicial está dada, poner la solución en términos de la amplitud y la fase cuando sea posible):

$$25. \frac{d^2x}{dt^2} + 7x = 0$$

$$26. \frac{d^2x}{dt^2} + 23x = 0$$

$$27. \frac{d^2x}{dt^2} - 7x = 0$$

$$28. \frac{d^2x}{dt^2} - 23x = 0$$

$$29. \frac{d^2x}{dt^2} + 5x = 0, x(0) = 2, \frac{dx}{dt}(0) = 3$$

$$30. \frac{d^2x}{dt^2} + 9x = 0, x(0) = 7, \frac{dx}{dt}(0) = 5$$

31. Considere un objeto moviéndose sobre un círculo de radio r , muestre que el ángulo θ , está aumentando constantemente, es decir que $\frac{d\theta}{dt} = \text{constante}$. ¿Cuántos ciclos por segundo da el objeto? Muestre que la componente en x del objeto satisface el movimiento armónico simple. Muestre que $\frac{d\theta}{dt}$ es igual a la frecuencia circular.

32. Considere una masa m , obligada a moverse en forma horizontal, localizada entre dos paredes fijas a una distancia D y conectada a dos resortes. El resorte del lado izquierdo tiene una longitud L_1 con una constante del resorte k_1 igualmente el resorte del lado derecho tiene una longitud de L_2 y una constante del resorte de k_2 . Si la posición de la masa respecto a la pared de la izquierda es x , como se ilustra en la figura 12. Establezca una ecuación diferencial para la masa (en donde actúan sobre ella dos fuerzas).

9.3 Movimiento con respuesta libre y con la fricción ($\delta=0$)

Consideremos ahora que la fricción no es despreciable, es decir está presente, de manera que la dinámica para el sistema masa resorte de la figura 5 está descrita por la ecuación diferencial:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + \delta \frac{dy}{dt} + ky = 0 \quad (18)$$

Como la ecuación diferencial tiene coeficientes constantes, podemos usar la ecuación característica para (18), $mr^2 + \delta r + k = 0$, la cual tiene las raíces:

$$r = -\frac{\delta}{2m} \pm \frac{\sqrt{\delta^2 - 4mk}}{2m} \quad (19)$$

De acuerdo a esta ecuación tenemos tres casos a considerar, dependiente del valor del discriminante $\delta^2 - 4mk$, sea negativo, cero o positivo. Como ya se ha analizado el caso $\delta = 0$ (sin fricción), ahora es conveniente pensar en la masa m y la constante del resorte k como fijos, y explicar lo que sucede con el coeficiente de fricción δ a medida que aumenta.

Caso 1: Sub-amortiguado ($0 < \delta < \sqrt{4mk}$)

En este caso, $\delta^2 - 4mk < 0$. Existe un par de raíces complejas conjugadas:

$$r = -\alpha \pm \beta i, \quad \alpha = \frac{\delta}{2m}, \quad \beta = \frac{\sqrt{4mk - \delta^2}}{2m}$$

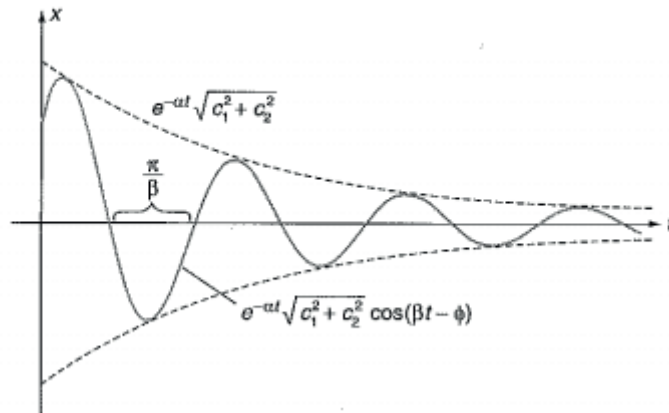
Las cuales dan las soluciones de la ecuación diferencial $m \frac{d^2y}{dt^2} + \delta \frac{dy}{dt} + ky = 0$, que son:

$$y = e^{-\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \operatorname{sen} \beta x)$$

O usando (16):

$$y = e^{-\alpha x} \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \cos(\beta x - \theta) \quad (20)$$

Figura 12. Gráfica de la función (20) para algunos valores de C_1 y C_2 .



Fuente. Elaborada por el autor con el programa Derive.

Esta es una oscilación amortiguada, conocido como subamortiguada ($\delta < \sqrt{4mk}$). La solución gráfica está dada en la figura 12. La función sinusoidal $\cos(\beta x - \theta)$ varía entre 1 y -1. Entonces la solución se mantiene entre $\sqrt{C_1^2 + C_2^2} e^{-\alpha x}$ y $-\sqrt{C_1^2 + C_2^2} e^{-\alpha x}$. Para hacer un boceto cualitativo de (19), primer trazamos la curva $y = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} e^{-\alpha x}$ y su curva negativa $y = -\sqrt{C_1^2 + C_2^2} e^{-\alpha x}$. La solución oscila entre estas dos curvas, como se muestra en la figura 12. Para la oscilación amortiguada, el término:

$$\sqrt{C_1^2 + C_2^2} e^{-\alpha x}$$

Es llamada la amplitud del tiempo de amortiguación de la oscilación.

Con la fricción la amplitud oscila con un pseudo - frecuencia (circular):

$$\beta = \frac{\sqrt{4mk - \delta^2}}{2m}$$

Esta frecuencia puede ser relacionada a la frecuencia (circular) $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ a la cual el sistema masa resorte puede oscilar sin amortiguación es:

$$\beta = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\delta^2}{4m^2}} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\delta^2}{4m^2}}$$

La pseudo-frecuencia de un oscilador sub-amortiguado es menor que la frecuencia natural. Como la resistencia δ está creciendo, la pseudofrecuencia decrece (el periodo crece).

Un método experimental para determinar la amortiguación constante δ , es mediante la observación de la disminución exponencial de la amplitud de la oscilación. Otro método consiste en comparar las frecuencias con y sin amortiguamiento.

Para una masa dada m y una constante k para el resorte, el aumento de la resistencia δ (pero manteniendo $\delta < \sqrt{4mk}$) tiene dos efectos. Primero, la oscilación se amortigua más rápidamente, es decir, el tiempo de variación de la amplitud decrece rápidamente:

$$\sqrt{C_1^2 + C_2^2} e^{-\alpha x}$$

En segundo lugar, el periodo de la oscilación se amortigua, $2\pi/\beta$ aumentando (figura 12).

Ejemplo 3:

Una masa de 0.5 slug (peso de 16 lb) es suspendido sobre un resorte el cual tiene una constante $k = 2$ lb/pie. Si el amortiguamiento es δ lb. Seg/pie. La masa se tira hacia abajo 1 pie y puesto en libertad. Describa y trace la gráfica para $\delta = 0, 1, 0.25, \text{ y } 1.75$.

Solución:

La ecuación diferencial que describe el movimiento es:

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 y}{dx^2} + \delta \frac{dy}{dx} + 2x = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0. \quad (21)$$

La ecuación característica, la cual se puede encontrar por simple inspección o por sustitución de $y = e^{rx}$, en (20) es $\frac{1}{2}r^2 + \delta r + 2 = 0$, que tiene como raíces $r = -\delta \pm i\sqrt{4 - \delta^2}$, luego la solución de la ecuación diferencial de (21) es:

$$y = e^{-\alpha x} \left[C_1 \cos(\sqrt{4 - \delta^2} x) + C_2 \operatorname{sen}(\sqrt{4 - \delta^2} x) \right]$$

la cual es un movimiento sub-amortiguado si $\delta < 2$. La condición inicial implica que:

$$1 = y(0) = C_1,$$

$$0 = y'(0) = -\delta C_1 + \sqrt{4 - \delta^2} C_2$$

De donde se tiene $C_1 = 1$, $C_2 = \delta(4 - \delta^2)^{-1/2}$, y:

$$y = e^{-\delta x} \left[\cos(\sqrt{4 - \delta^2} x) + \delta(4 - \delta^2)^{-1/2} \operatorname{sen}(\sqrt{4 - \delta^2} x) \right] \quad (22)$$

Esta ecuación (22) la podemos reescribir usando (17) de la siguiente forma:

$$1 + \left[\frac{\delta}{(4 - \delta^2)^{1/2}} \right]^2 = \frac{4}{4 - \delta^2}$$

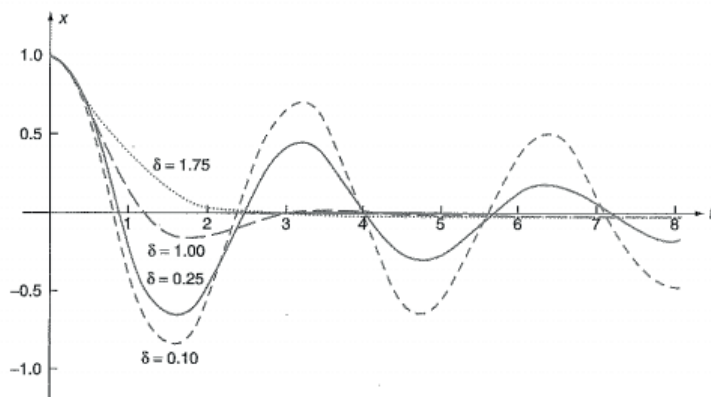
Entonces de (22), se tiene:

$$y = e^{-\delta x} \frac{2}{\sqrt{4 - \delta^2}} \cos(\sqrt{4 - \delta^2} x - \theta) \quad (23)$$

Donde:

$$\tan \theta = \delta(4 - \delta^2)^{-1/2}$$

La gráfica de (23) se muestra en la figura 13, para $\delta = 0, 1, 0.25$ y 1.75 .

Figura 13. Gráfica de la ecuación (23) para diferentes valores de δ .

Fuente. Elaborada por el autor con el programa Derive.

Caso 2. Sobre-amortiguado ($\delta > \sqrt{4mk}$)

En este caso llamamos sobre-amortiguado a la ecuación característica $mr^2 + \delta r + k = 0$, para la ecuación diferencial $m \frac{d^2y}{dt^2} + \delta \frac{dy}{dt} + ky = 0$ tiene dos raíces reales distintas negativas:

$$r_1 = -\frac{\delta}{2m} + \frac{\sqrt{\delta^2 - 4mk}}{2m}$$

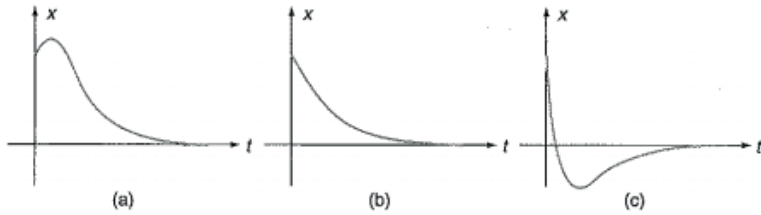
$$r_2 = -\frac{\delta}{2m} - \frac{\sqrt{\delta^2 - 4mk}}{2m}$$

Nota: $r_1 < 0$, ya que $\sqrt{\delta^2 - 4mk} < \sqrt{\delta^2} = \delta$. Entonces la solución es:

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} \quad (24)$$

Observe que $y \rightarrow 0$, cuando $x \rightarrow \infty$, ya que $r_1 < 0$, y $r_2 < 0$.

En general, para sistemas sobre-amortiguados, dependiendo de las condiciones iniciales, la solución para y toma una de las tres formas dadas por la figura 14 o sus negativos.

Figura 14. Gráfica de algunas de las tres formas para (24).

Fuente. Elaborada por el autor con el programa Derive.

La figura 14 (a) es el resultado si la masa se mueve inicialmente fuera del equilibrio ($y = 0$). La masa se vuelve lenta y luego regresa hacia el equilibrio. Si la masa inicialmente es movida hacia el equilibrio, ya sea que se aproxima a la posición de equilibrio (figura 13 (b) o, si la velocidad inicial es suficientemente grande, sobrepasando el equilibrio y entonces ella retorna a la posición del equilibrio, como en la figura 13 (c)).

Caso 3. Amortiguación crítica ($\delta = \sqrt{4mk}$)

En este caso $\delta^2 - 4mk = 0$ y $y = e^{rx}$ y entonces (17) nos muestra que se tienen dos raíces reales repetidas $r = -\frac{\delta}{2m}$. La solución general de la ecuación diferencial es:

$$y = C_1 e^{-\left(\frac{\delta}{2m}\right)x} + C_2 x e^{-\left(\frac{\delta}{2m}\right)x} \quad (25)$$

La solución (25) para el caso de amortiguación crítica es diferente del caso de sobreamortiguados. Sin embargo, dependiendo de los valores C_1, C_2 , de la ecuación (25) del amortiguamiento crítico, presenta una gráfica que tiene la misma forma general como las dadas para el caso de movimiento sobre amortiguado.

Ejemplo 4. Amortiguamiento crítico:

Un dispositivo está siendo diseñado para que pueda ser modelado como un sistema masa resorte. La constante del resorte es $k = 10 \text{ g/seg}^2$, y la constante de amortiguamiento es $\delta = 20 \text{ g/seg}$.

Determine la masa de modo que el sistema masa resorte resultante sea críticamente amortiguado.

La masa se tira hacia abajo 5 cm de la posición de reposo y puesto en libertad con una velocidad descendente de 10 cm/seg. Determine y resuelva las ecuaciones de movimiento, y grafique el movimiento resultante.

Solución:

El amortiguamiento crítico ocurre cuando $\delta^2 - 4mk = 0$. Es decir, $400 - 40m = 0$. Luego, lo deseado es una masa de 10 g.

La ecuación del movimiento es:

$$10 y'' + 20 y' + 10 y = 0, y(0) = 5, y'(0) = 10$$

Sustituyendo $y = e^{rx}$, vemos que la ecuación característica es: $10 r^2 + 20 r + 10 = 0$, o $10(r+1)^2 = 0$, la cual tiene raíces repetidas reales de $r = -1$. La solución general es entonces:

$$Y = C_1 e^{-t} + C_2 x e^{-x}$$

Utilizando las condiciones iniciales dadas inicialmente tenemos:

$$5 = y(0) = C_1$$

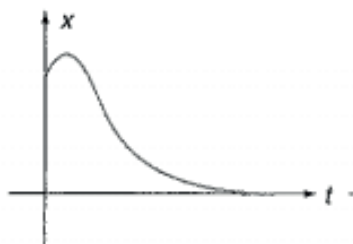
$$10 = y'(0) = -C_1 + C_2$$

Luego resolviendo para C_1 y C_2 tenemos $C_1 = 5$, y $C_2 = 15$. Luego la solución particular será:

$$Y = 5 e^{-t} + 15 x e^{-x}$$

La gráfica de esta ecuación es la de la figura 15.

Figura 15. Gráfica de la solución particular anterior.



Fuente. Elaborada por el autor con el programa Derive.

Es importante observar que para todos los casos en los cuales existe amortiguamiento ($\delta > 0$), se tiene que:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0$$

9.4 Ejercicios

Para los ejercicios 1 al 9, resuelva la ecuación diferencial y establezca si el movimiento correspondiente es amortiguado, sobre-amortiguado o críticamente amortiguado.

1. $2y'' + 5y' + 3x = 0$

2. $2y'' + 4y' + 3x = 0$

3. $2y'' + \sqrt{48}y' + 3x = 0$

4. $3y'' + 5y' + 4x = 0$

5. $3y'' + 8y' + 4x = 0$

6. $9y'' + 10y' + 4x = 0$

7. $9y'' + 12y' + 4x = 0$

8. $9y'' + 15y' + 4x = 0$

9. $3y'' + 4y' + x = 0$

En los ejercicios 10 a 22, establezca la ecuación diferencial que describe el movimiento bajo los parámetros asumidos en esta sección. Resuelva la ecuación diferencial. Decir si el movimiento del sistema masa resorte es armónico, oscilación amortiguada, críticamente amortiguado, o sobre-amortiguado. Si el movimiento es una oscilación amortiguada, vuelva a escribir la ecuación en la forma (16).

10. El sistema masa resorte tiene atada una masa de 10 g. La constante del resorte es de 30 g/seg^2 . Un mecanismo amortiguador está unido al sistema, y tiene un coeficiente de amortiguación de 40 g/seg . La masa se tira hacia abajo y es puesta en libertad. En el instante $t = 0$, la masa está 3 cm por debajo de la posición de reposo y se mueve hacia arriba a 5 cm/seg .

11. Un resorte largo tiene una masa de 1 slug atado a él. El muelle se extiende $16/13$ pies y queda en reposo. El coeficiente de amortiguamiento es de 2 slug/seg . La masa se somete a una fuerza impulsora en el tiempo $t = 0$, la cual imparte una velocidad de 5 pies/seg hacia abajo.

12. Una masa de 1 g está atada a un sistema masa resorte para el cual la fricción no se tiene en cuenta. El resorte se estira 20 cm y vuelve a su estado de reposo. La masa se estira 1 cm hacia abajo desde el estado de reposo con una velocidad de 7 cm/seg hacia abajo.

13. Un sistema masa resorte tiene atada una masa de 1 g , el coeficiente del resorte es 5 g/seg^2 , y un coeficiente de amortiguamiento de 4 g/seg . La masa es empujada hacia arriba 1 cm desde la posición de reposo y puesta en libertad con una velocidad de 3 cm/seg hacia abajo.

14. Un resorte con una constante de $k = 12 \text{ slug/seg}^2$ tiene una masa atada que estira el resorte $2\frac{2}{3}$ pies. El coeficiente de amortiguamiento es 7 slug/seg . La masa es empujada 1 pie hacia la posición de equilibrio y entonces se deja en libertad con una velocidad de 1 pie/seg .

15. Un resorte largo con una constante $k = 8 \text{ g/seg}^2$ tiene una masa atada que estira el resorte 245 cm. El coeficiente de amortiguamiento es $\delta = 8 \text{ g/seg}$. En tiempo $t = 0$, la masa está en la posición de equilibrio y tiene una velocidad de 3 cm/seg hacia arriba.

16. Un sistema masa resorte tiene un resorte con una constante $k = 5 \text{ g/seg}^2$, atado a una masa de $m = 1 \text{ g}$, una fricción $\delta = 4 \frac{\text{g}}{\text{seg}}$. La masa es jalada 2 cm hacia debajo de la posición de equilibrio y liberada.

17. Un sistema masa resorte tiene un resorte con una constante $k = 1 \text{ lb/pie}$, el coeficiente de amortiguamiento es de 2 slug/seg y tiene una masa de 1 slug atada al resorte. La masa es empujada hacia arriba y se suelta a 1 pie de la posición de equilibrio con una velocidad de 1 pie/seg hacia arriba.

18. Muestre que en el caso del amortiguamiento crítico, $\delta = \sqrt{4mk}$, la masa puede cambiar de dirección como máximo una vez (la solución general de (25) tiene máximo una tangente horizontal).

19. Muestre que en el sistema sobre-amortiguado, la masa puede cambiar de dirección máximo una vez.

20. Suponga que $\delta > 0, k > 0$ son fijos. Describa cómo la variación de la masa afecta si el movimiento es una oscilación amortiguada; sobre-amortiguada, o críticamente amortiguada.

21. Suponga que una masa de 1- slug es atada a un resorte el cual tiene una constante de 400 lb/pies. Determine el coeficiente de amortiguamiento si amortiguamiento oscilatorio son observados con una frecuencia de 3 Hz.

22. Suponga que en un sistema masa resorte con una masa de 1- slug, se conoce que vibra a 5 Hz sin amortiguación, pero solo a 4 Hz cuando es sub-amortiguado. Determine el coeficiente de amortiguación.

23. Considere un sistema masa resorte con amortiguamiento crítico. Suponga que $y(0) = 1$, $y'(0) = v_0$. Para valores de v_0 la solución se comporta como las figuras a, b y c de la figura 15 (ayuda: el tiempo de un máximo o mínimo local, debe ser positivo).

24. Considere el sistema masa resorte sobre-amortiguado. Suponga que $y(0) = 1$, $y'(0) = v_0$. Encuentre una fórmula para el tiempo de un máximo o mínimo local, asumiendo que existe.

9.5 Las vibraciones mecánicas II. Respuesta forzada

En la sección anterior examinamos la respuesta libre para un sistema masa resorte. En esta sección investigaremos qué sucede cuando una fuerza externa $f(t)$, la cual depende solo del tiempo, es aplicada a la masa. La ecuación del movimiento para esta sección será de la forma:

$$m \frac{d^2y}{dt^2} + \delta \frac{dy}{dt} + 2y = f(t) \quad (26)$$

La fuerza externa $f(t)$ es a menudo llamada la **fuerza de forzamiento** o la **entrada**. La solución y es llamada la **respuesta** o la **salida** del sistema. De la teoría dada hasta el momento se sabe que la solución $y(t)$ de (26) tiene la forma $y = y_h + y_p$, donde y_p es la solución particular de (26) y $y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2$ que es la solución general de la ecuación diferencial homogénea asociada:

$$m \frac{d^2y}{dt^2} + \delta \frac{dy}{dt} + 2y = 0 \quad (27)$$

y_h es también llamada la respuesta libre. Observe que las constantes solo aparecen en y_h .

Tenemos entonces que:

La posible respuesta para una entrada $f(t)$ consiste de una respuesta particular a $f(t)$, adicionándole la respuesta libre del sistema.

La discusión está restringida a las funciones forzadas de tipo sinusoidales, es decir:

$$F(t) = A \cos \omega t$$

Donde A es la **amplitud de la función forzada** y ω es la frecuencia forzada. Este es un importante caso a considerar por dos razones. Primero, algunas fuerzas forzadas, tales como las de las corrientes alternas en los circuitos, son aproximadamente de esta forma. También, la teoría de las series de Fourier, discutidas en cursos más avanzados, hacen uso de este tipo de términos forzados como una suma (series) de términos de la forma $\sin(\alpha t)$, $\cos(\alpha t)$, para α una constante.

El estudio de la respuesta forzada puede ser roto en dos casos, dependiendo de si la fricción está presente, o no.

A. La fricción no está presente ($\delta=0$)

Supongamos que la fricción no existe ($\delta = 0$), luego el modelo para el sistema masa resorte es:

$$m y'' + k y = F \cos(\omega t) \quad (28)$$

La solución de (28) es de la forma:

$$Y = y_p + C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right)$$

Donde y_p es la solución particular de (25), y $\cos \omega_0 t$, $\sin \omega_0 t$ es un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial homogénea $m y'' + k y = 0$ donde $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, ya que $r = \pm i \sqrt{\frac{k}{m}}$ son las raíces de la ecuación característica $mr^2 + k = 0$.

Podemos ahora encontrar una solución particular para (25) por el método de los coeficientes indeterminados. La ecuación característica $mr^2 + k = 0$ tiene como raíces $r = \pm i \sqrt{\frac{k}{m}} = \pm i \omega_0$. Para el sistema masa resorte (sin fricción) la frecuencia circular

natural es $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Hay dos casos, dependiendo si la función forzada es una solución de la ecuación homogénea asociada o no. Esto depende de si la frecuencia circular forzada ω es igual a la frecuencia circular natural $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Frecuencia forzada desigual para la frecuencia natural, libre de respuesta ($\omega \neq \sqrt{k/m}$)

Frecuencia de entrada desigual para la frecuencia natural libre de respuesta. En este caso, la forma de y_p dada por el método de los coeficientes indeterminados es:

$$y_p = A \cos \omega t + B \operatorname{sen} \omega t$$

Sustituyendo esta forma en la ecuación diferencial (28) nos da:

$$m(A \cos \omega t + B \operatorname{sen} \omega t)'' + k(A \cos \omega t + B \operatorname{sen} \omega t) = F \cos \omega t$$

O:

$$-mA\omega^2 \cos \omega t - mB\omega^2 \operatorname{sen} \omega t + kA \cos \omega t + kB \operatorname{sen} \omega t = F \cos \omega t$$

Igualando los coeficientes de los términos semejantes en su orden tenemos:

$$\operatorname{Cos} \omega t: -mA\omega^2 + kA = F \text{ luego } A = \frac{F}{k - m\omega^2}$$

$$\operatorname{sen} \omega t: -mB\omega^2 + kB = 0 \text{ luego } B = 0$$

Por lo tanto:

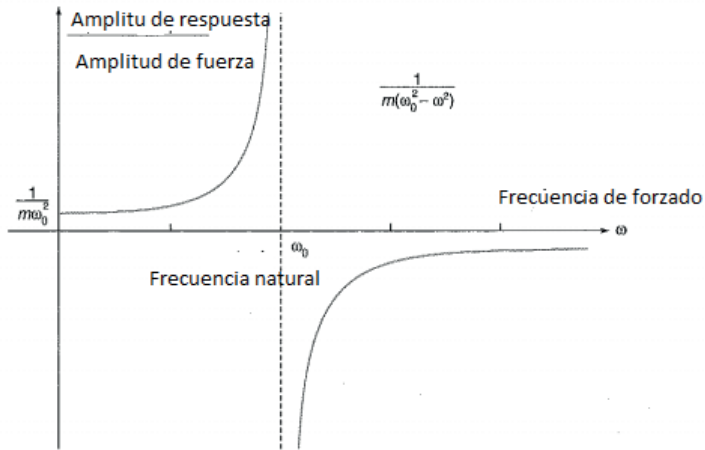
$$y_p = \frac{F}{k - m\omega^2} \cos \omega t \quad (29)$$

La amplitud de esta respuesta particular $\frac{F}{k - m\omega^2}$, donde F es la amplitud de la entrada. Esto es usual para introducir el **diagrama**

de frecuencia de respuesta, en el cual la respuesta (la razón de la amplitud de respuesta y la amplitud de la entrada) está graficada en la figura 16 como una función de la frecuencia de la fuerza ω :

Figura 16. Diagrama de la frecuencia de respuesta.

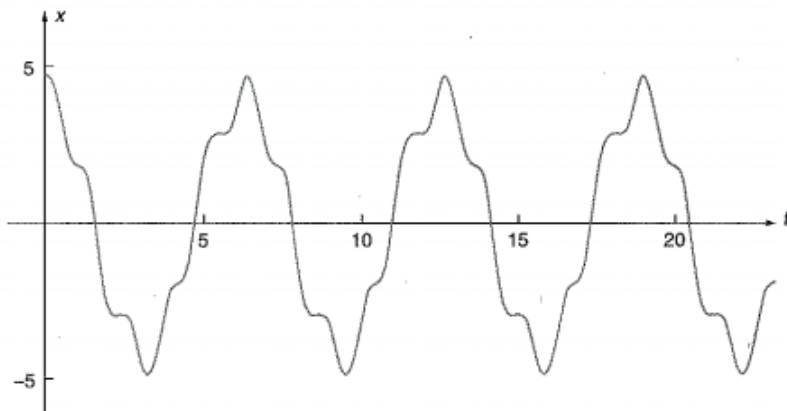
$$\frac{\text{Amplitud de la respuesta}}{\text{Amplitud de la entrada}} = \frac{1}{k - m\omega^2} = \frac{1}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (30)$$



Fuente. Elaborada por el autor con el programa Derive.

La respuesta es creciente cuando la frecuencia de la fuerza creciente se aproxima a la frecuencia natural. Observe que el diagrama de respuesta tiene una asíntota vertical cuando la frecuencia de la fuerza es igual a la frecuencia natural. De acuerdo a (29) y (30), la amplitud de la respuesta es infinita (indefinida) cuando $\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Sin embargo, en nuestro análisis asumimos que $\omega \neq \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Esto se verá más claramente en nuestra siguiente sección. La figura 17 muestra que la amplitud es negativa si $\omega > \omega_0$. En este caso podemos decir que la respuesta es 180° fuera de fase de la entrada.

Figura 17. Gráfica de la amplitud negativa para $\omega > \omega_0$.



Fuente. Elaborada por el autor con el programa Derive.

La solución general de la ecuación diferencial (28) es:

$$y = \frac{F}{k-m\omega^2} \cos\omega t + C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) + C_2 \sen\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) \quad (31)$$

Esta es la superposición de dos movimientos armónicos. Uno es la respuesta libre del sistema y el otro es la respuesta del movimiento periódico forzado con el mismo periodo de la función forzada. La figura 17 nos da la gráfica de (31) para alguna escogencia de los parámetros F , m , k , ω , C_1 , C_2 .

Resonancia. Frecuencia forzada igual a la frecuencia natural, de respuesta libre ($\omega = \sqrt{k/m}$)

Si $\omega = \sqrt{k/m}$, entonces el método de coeficientes indeterminados, entonces nos dice que las soluciones pueden ser multiplicadas por t , luego la forma de la solución de (28) es:

$$y_p = At\cos\omega t + Bt\sen\omega t$$

Sustituyendo esta ecuación en la ecuación diferencial (28), tenemos:

$$m(At\cos\omega t + Bt\sin\omega t)'' + k(At\cos\omega t + Bt\sin\omega t) = F\cos\omega t$$

Usando la regla del producto para la derivada, se tiene:

$$[t(At\cos\omega t + Bt\sin\omega t)]' = t(-A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t) + A\cos\omega t + B\sin\omega t.$$

Usando de nuevo la regla del producto al derivar por segunda vez, se tiene:

$$m(-2A\omega\sin\omega t - At\omega^2\cos\omega t + 2B\omega\cos\omega t - Bt\omega^2\sin\omega t) + kAt\cos\omega t + kBt\sin\omega t = F\cos\omega t$$

Igualando los coeficientes de los términos que se corresponden, se obtienen cuatro ecuaciones para A y B:

$$\sin\omega t: -2Am\omega = 0,$$

$$\cos\omega t: 2Bm\omega = F$$

$$t\sin\omega t: -Bm\omega^2 + kB = 0$$

$$t\cos\omega t: -Am\omega^2 + kA = 0$$

Como $\omega^2 = \frac{k}{m}$, debido a nuestra hipótesis, entonces de la última ecuación se tiene que $t\cos\omega t$ y $t\sin\omega t$, se cancelan. Encontramos que $A = 0$, $B = F/(2m\omega)$, de la primera ecuación. Entonces:

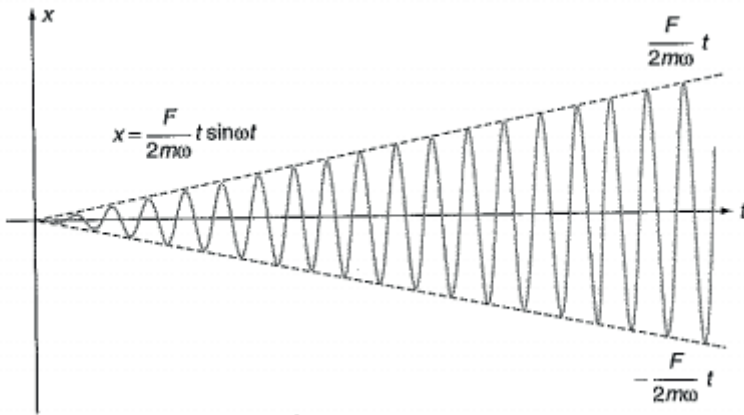
$$y = \frac{F}{2m\omega} t\sin\omega t + C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t \quad (32)$$

es la solución general. La solución particular es:

$$y_p = \frac{F}{2m\omega} t\sin\omega t \quad (33)$$

la cual es de especial interés, ya que este ilustra el fenómeno de resonancia. La amplitud $\frac{F}{2m\omega} t$ de la oscilación crece proporcionalmente con el tiempo. La gráfica de (33) está dada en la figura 18.

Figura 18. Gráfica de la función dada en (33).



Fuente. Elaborada por el autor con el programa Derive.

La respuesta forzada es ahora una oscilación no acotada. Intuitivamente, el fenómeno de resonancia se puede resumir como sigue:

Si el periodo (frecuencia) de la función forzada es el mismo que el periodo (frecuencia) de la respuesta libre del sistema, entonces la mayor amplitud de oscilación se puede tener de un pequeño cambio de la amplitud del término forzado.

En estructuras tales como puentes, la resonancia tiene que evitarse. En 1940 el colapso del puente de Tacoma Narrows³ fue una catástrofe muy particular, y una película dramática, ya que mostró oscilaciones de gran amplitud antes de su colapso. Las alas de los aviones también han fracasado en ocasiones debido a la resonancia. Por otro lado, la resonancia a veces es deseable en la manipulación de las ondas de sonido en los instrumentos musicales y los detectores de diversos tipos. Por supuesto, en la práctica es deseable que las oscilaciones no se aumenten de manera arbitraria. Más bien, o el sistema va al cambio (los saltos del resorte, por ejemplo) o el modelo

³ El colapso del puente de Tacoma Narrows, fue causado por vibraciones resonantes producidas por el viento.

lineal original $m y'' + \delta y' + k y = 0$ ya no es un modelo válido. Además, nunca se observa «resonancia pura». En cada sistema existe alguna fricción δ , por lo que si bien puede ser muy pequeño, es mayor que cero. Además, es casi imposible hacer ω exactamente igual a $\sqrt{\frac{k}{m}}$. Sin embargo, si δ es cercano a cero y cerca a $\sqrt{\frac{k}{m}}$, entonces la respuesta forzada puede presentar una gran respuesta. El siguiente ejemplo ilustra este hecho.

Ejemplo 5. Resonancia y resonancia cercana:

Suponga que el modelo para un sistema masa resorte con término forzado con ω es:

$$y'' + y = \cos \omega t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

Determine la solución para todos los ω , y grafique la solución para $\omega = 1$ y para varios valores de ω cercanos a 1.

Solución:

Usando el método de los coeficientes indeterminados para (31) y (33), encontramos que la solución general de $y'' + y = \cos \omega t$ es:

$$\omega \neq 1: y = \frac{1}{1-\omega^2} \cos \omega t + C_1 \cos t + C_2 \sin t. \quad (34)$$

$$\omega = 1: y = \frac{1}{2} t \sin t + C_1 \cos t + C_2 \sin t \quad (35)$$

Aplicando las condiciones iniciales a (34) nos da:

$$0 = y(0) = \frac{1}{1-\omega^2} + C_1,$$

$$0 = y'(0) = C_2$$

Luego $C_2 = 0$, $C_1 = \frac{1}{1-\omega^2}$. Entonces $y = (1-\omega^2)^{-1} \cos \omega t - (1-\omega^2)^{-1}$.

Aplicando las condiciones iniciales a (35) nos da:

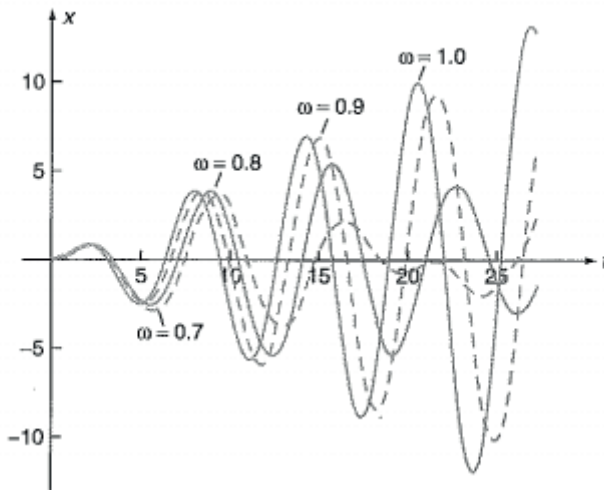
$$0 = y(0) = C_1, \quad 0 = y'(0) = C_2$$

Luego la solución de nuestra ecuación diferencial es:

$$Y(t) = \begin{cases} \frac{1}{1-\omega^2} (\cos \omega t - \cos t) & \text{si } \omega \neq 1, \\ \frac{1}{2} t \operatorname{sen} t & \text{si } \omega = 1 \end{cases} \quad (36)$$

La gráfica de (36) para varios valores de ω están dadas en la figura 19. Observe que para ω cercano a 1, la solución muestra una amplitud de oscilación grande.

Figura 19. Grafica de la función dada en (36) para varios valores de ω .



Fuente. Elaborada por el autor con el programa Derive.

Ejemplo 6. Resonancia:

¿Para qué valores de la masa m puede la ecuación $m y'' + 25y = 12 \cos \omega t$ mostrar resonancia si $12 \cos \omega t$ tiene una frecuencia de 28 Hz?

Solución:

La ecuación característica $mr^2 + 25 = 0$, tiene las raíces puras imaginarias $r = \pm i \sqrt{\frac{25}{m}}$. Luego la resonancia ocurre si:

$$\omega = \sqrt{\frac{25}{m}} \quad (37)$$

Si $\cos \omega t$ tiene una frecuencia de 28 Hz, entonces:

$$\frac{\omega}{2\pi} = 28, \text{ o, } \omega = 56\pi \quad (38)$$

Combinando (37) y (38) se tiene:

$$56\pi = \sqrt{\frac{25}{m}}$$

O:

$$m = \left(\frac{25}{56\pi}\right)^2$$

Ejemplo 7. La resonancia inducida por carretera:

Un coche se está moviendo a lo largo de la carretera a una velocidad horizontal constante v . Supongamos que el movimiento del vehículo puede ser modelado por un sistema masa resorte. Supóngase también que a medida que el coche se mueve a lo largo de la carretera, las únicas fuerzas que actúan sobre el sistema masa resorte son: el peso del coche y el cambio de la longitud del resorte, presente a largo de la superficie ascendente y descendente de la carretera. Supongamos que la carretera tiene una superficie que es aproximadamente sinusoidal con longitud de onda L y que el sistema masa resorte tiene fricción despreciable. ¿A qué velocidad constante horizontal v la resonancia será observada?

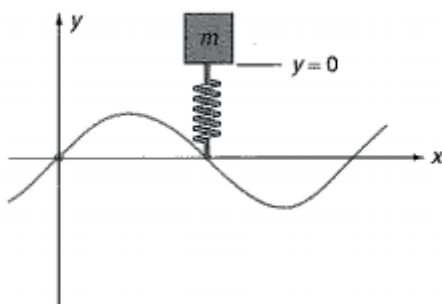
Solución:

Sea y la distancia horizontal. Entonces la variación de la superficie de la carretera está dada por:

$$y_r(x) = a \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{L}$$

Sea $y(x)$ la posición vertical de la masa en la posición x . Para configurar las coordenadas, se supone que cuando $x = 0$, la base del muelle está a la altura media de la carretera, lo que es $y_r = 0$. Sea $y = 0$ corresponde a la posición de reposo de la masa en este momento. Por lo tanto, la fuerza del muelle y el peso del vehículo se equilibran. Medimos y en la dirección positiva. La configuración de reposo se muestra en la figura 20. Sea m la masa. Puesto que hemos medido desde la posición de reposo, el término gravedad anula las fuerzas de compresión en reposo, y la ley de Hooke toma la siguiente forma.

Figura 20. Configuración en reposo del sistema masa – resorte.



Fuente. Elaborada por el autor con el programa Derive.

$$\left(m \frac{d^2 y}{dt^2} = -k(\text{estiramiento de la longitud del resorte desde el reposo})\right)$$

La cantidad que la longitud del resorte se estira desde la posición de reposo x es $y(x) - y_r(x)$, (véase la figura 21). Así:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -k(y - y_r) = -k\left(y - a \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{L}\right)$$

Esta ecuación diferencial es usualmente escrita en la forma:

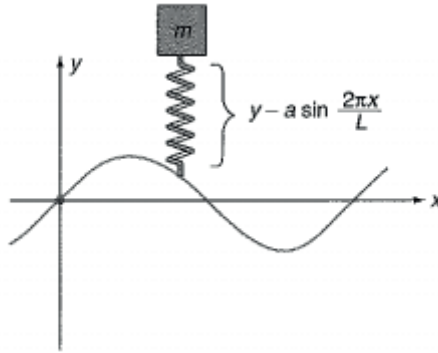
$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + ky = ka \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{L}$$

Sin embargo, la posición x no es una constante, sino una función de tiempo. Si suponemos que el vehículo está en movimiento a una velocidad constante v , entonces (suponiendo que $x = 0$ se define como en el que el coche está en $t = 0$):

$$x = v.t$$

La ecuación diferencial del movimiento vertical del carro (sistema masa resorte) es:

Figura 21. Cantidad de la longitud del resorte desde la posición de reposo.



Fuente. Elaborada por el autor con el programa Derive.

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + ky = ka \operatorname{sen} \frac{2\pi vt}{L}$$

El sistema masa resorte es forzado en la frecuencia v/L . El sistema tiene resonancia si la frecuencia forzada es igual a la frecuencia natural, que es:

$$\frac{2\pi v}{L} = \sqrt{\frac{L}{m}}$$

Entonces, la velocidad a la cual ocurre la resonancia es $v = \frac{L}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$.

9.6 Ejercicios

En los ejercicios 1 al 8, encuentre la solución general:

1. $\frac{d^2y}{dt^2} + 4y = 8 \cos(5t)$

2. $\frac{d^2y}{dt^2} + 9y = -5 \operatorname{sen}(5t)$

3. $\frac{d^2y}{dt^2} - 4y = 8 \cos(5t)$

4. $\frac{d^2y}{dt^2} - 9y = -5 \operatorname{sen}(5t)$

5. $\frac{d^2y}{dt^2} + 4y = 3 \cos(2t)$

6. $\frac{d^2y}{dt^2} + 9y = -4 \operatorname{sen}(3t)$

7. $m \frac{d^2y}{dt^2} + ky = F \cos(\omega t)$ con $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

8. $m \frac{d^2y}{dt^2} + ky = F \operatorname{sen}(\omega t)$ con $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

9. ¿Para qué valores de m puede $my'' + 4y = 13 \cos \omega t$, exhibir resonancia si $13 \cos \omega t$ tiene una frecuencia de 20 Hz?

10. ¿Para qué valores de m puede $my'' + 16y = 12 \cos \omega t$, exhibir resonancia si $12 \cos \omega t$ tiene una frecuencia de 28 Hz?

11. ¿Para qué valores de k puede $36y'' + ky = 4 \cos \omega t$, exhibir resonancia si $4 \cos \omega t$ tiene una frecuencia de 22 Hz?

12. ¿Para qué valores de k puede $25y'' + ky = 2 \cos \omega t$, exhibir resonancia si $2 \cos \omega t$ tiene una frecuencia de 18 Hz?

13. Se sabe que la función fuerza $f(t) = F \cos \omega t$ tiene una frecuencia entre 10 y 70 Hz. El sistema masa resorte es $m\ddot{y} + 10y = f(t)$. ¿Qué valores de m podría dar lugar a la resonancia?

14. Se sabe que la función fuerza $f(t) = F \cos \omega t$ tiene una frecuencia entre 30 y 50 Hz. El sistema masa resorte es $m\ddot{y} + 9y = f(t)$. ¿Qué valores de m podría dar lugar a la resonancia?

15. Si un sistema masa resorte tiene $m = 15$, $\delta = 0$, y $k = 8$. ¿Qué frecuencia forzada causaría resonancia?

16. Si un sistema masa resorte tiene $m = 5$, $\delta = 0$, y $k = 12$. ¿Qué frecuencia forzada causaría resonancia?

17. Usted está realizando una construcción, tiene un detector que debe ser sensible (a la exposición de la resonancia) a las vibraciones armónicas a una frecuencia de 30 Hz. El detector será un sistema masa resorte con una constante $k = 15 \text{ g/seg}^2$, suponiendo que la fricción es despreciable. ¿Cuál debería ser la masa unida al resorte?

18. Un dispositivo está siendo construido para que pueda ser modelado como un simple sistema masa resorte con fricción despreciable. La masa unida es de 20 g. La constante de resorte es ajustable. ¿Qué valores de la constante de resorte deben ser evitados si el dispositivo está sujeto a fuerzas armónicas externos en el intervalo de 10 a 50 Hz, y su objetivo es el diseño para evitar la resonancia?

19. Usando la identidad trigonométrica

$\cos(\theta \pm \varphi) = \cos\theta\cos\varphi \pm \sin\theta\sin\varphi$, verifique que:

$$\cos\omega t - \cos\beta t = 2\sin\left(\frac{(\beta - \omega)}{2}t\right)\sin\left(\frac{(\beta + \omega)}{2}t\right)$$

20. Un sistema masa resorte tiene una masa unida de 4g, una constante del resorte de 16 g/seg² y una fricción despreciable. Está sujeto a una fuerza de $4 \cos(2.2t)$ hacia abajo, y es inicialmente $t = 0$ en reposo. Determinar el movimiento subsiguiente. Utilizando la ecuación del ejercicio 19, vuelva a escribir la solución como el producto de dos funciones seno, y represente gráficamente el resultado. La función resultante tiene una variación periódica en la amplitud, o un latido.

21. Una caja cerrada rectangular, está flotando en el océano con su parte superior siempre paralela a la superficie del agua. La fuerza de flotación es proporcional al volumen del agua desplazada, que también es proporcional a la profundidad de la parte inferior de la caja. Sea m la masa de la caja, y sea d la profundidad de la parte inferior de la caja cuando está en reposo. Si $y(t)$ mide la cantidad más profunda en la que se encuentra la parte inferior de la caja en el tiempo t . Ignore la resistencia y asuma pequeños desplazamientos y velocidades. Explicar por qué $m y'' + k y = 0$ es un modelo razonable para el movimiento vertical de la caja.

22. Suponga que se sabe que un peso de 1.000 lb hace que un carro de 3.000 lb se hunda 1 pulgada. ¿Cuál sería la longitud de una pequeña onda para el camino si tiene un tráfico que se mueve generalmente a 55 mi/h?

23. Considere una masa m atada a un resorte, el cual tiene una constante k , sin ninguna fricción ($\delta = 0$). La función fuerza es $F.\cos\omega t$, donde $\omega \neq \sqrt{\frac{k}{m}}$. Determine la solución del problema de valor inicial si $y(0) = y_0$, $y'(0) = 0$.
-
24. Considere una masa m atada a un resorte, el cual tiene una constante k , sin ninguna fricción ($\delta = 0$). La función fuerza es $F.\cos\omega t$, donde $\omega \neq \sqrt{\frac{k}{m}}$. Determine la solución del problema de valor inicial si $y(0) = 0$, $y'(0) = v_0$.
-
25. Considere una masa m atada a un resorte, el cual tiene una constante k , sin ninguna fricción ($\delta = 0$). La función fuerza es $F.\sin\omega t$, donde $\omega \neq \sqrt{\frac{k}{m}}$. Determine la solución del problema de valor inicial si $y(0) = y_0$, $y'(0) = 0$.
-
26. Considere una masa m atada a un resorte, el cual tiene una constante k , sin ninguna fricción ($\delta = 0$). La función fuerza es $F.\cos\omega t$, donde $\omega \neq \sqrt{\frac{k}{m}}$. Determine la solución del problema de valor inicial si $y(0) = 0$, $y'(0) = v_0$.
-
27. Considere una masa m atada a un resorte, el cual tiene una constante k , sin ninguna fricción ($\delta = 0$). La función fuerza es $F.\cos\omega t$, donde $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Determine la solución del problema de valor inicial si $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
-
28. Considere una masa m atada a un resorte, el cual tiene una constante k , sin ninguna fricción ($\delta = 0$). La función fuerza es $F.\sin\omega t$, donde $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Determine la solución del problema de valor inicial si $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
-

9.7 La fricción está presente ($\delta > 0$) (oscilación forzada amortiguada)

Si la fricción está presente, entonces $my'' + \delta y' + ky = f(t)$ toma la forma:

$$Y = y_p + y_h = y_p + C_1 y_1 + C_2 y_2$$

Como vimos anteriormente, hay tres posibilidades para el conjunto fundamental de soluciones homogéneas $\{y_1, y_2\}$:

$\{e^{-\alpha t} \cos \beta t, e^{-\alpha t} \sin \beta t\}$: sub-amortiguado

$\{e^{-\alpha t}, t e^{-\alpha t}\}$: críticamente amortiguado

$\{e^{-\alpha_1 t}, e^{-\alpha_2 t}\}$: sobre-amortiguado

Las condiciones iniciales determinan las constantes arbitrarias C_1 y C_2 , pero $\lim_{t \rightarrow \infty} y_1 = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} y_2 = 0$, en todos los tres casos ya que ellos son movimientos amortiguados. Entonces:

Si la fricción está presente ($\delta > 0$), la respuesta libre y h es siempre transitorio. Entonces:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_h(t) = 0$$

Otra forma de decir esta idea es que, si la fricción está presente, el efecto de la condición inicial se extingue (es transitorio). Luego para muchos tipos de aplicaciones de funciones fuerza, tal como las periódicas, la respuesta está eventualmente determinada completamente por una función forzada $f(t)$.

Consideremos la ecuación diferencial que modela el sistema masa resorte con amortiguamiento, con una función forzada periódica con una fuerza con frecuencia circular ω de la forma $F \cos \omega t$:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + \delta \frac{dy}{dt} + ky = F \cos \omega t \quad (39)$$

La función forzada $F \cos \omega t$ no es una solución de la ecuación homogénea asociada $m y'' + \delta y' + ky = 0$, con $\delta > 0$. Entonces, de acuerdo al método de los coeficientes indeterminados, una solución particular es de la forma de una combinación lineal de senos y cosenos de la misma frecuencia como la función forzada:

$$Y_p = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

Sustituyendo en (39) se tiene:

$$m \frac{d^2}{dt^2} (A \cos \omega t + B \sin \omega t) + \delta \frac{d}{dt} (A \cos \omega t + B \sin \omega t) + k (A \cos \omega t + B \sin \omega t) = F \cos \omega t$$

O:

$$m \omega^2 (A \cos \omega t + B \sin \omega t) + \delta \omega (-A \sin \omega t + B \cos \omega t) + k (A \cos \omega t + B \sin \omega t) = F \cos \omega t$$

Igualando los coeficientes de los términos correspondientes para encontrar A y B, tenemos:

$$\cos \omega t: (k - m\omega^2)A + \delta\omega B = F \quad (40)$$

$$\sin \omega t: -\delta\omega A + (k - m\omega^2)B = 0 \quad (41)$$

El sistema anterior, se puede resolver por eliminación. Por ejemplo multiplicando la primera ecuación $\delta\omega$, y la segunda por $k - m\omega^2$, y sumando tenemos:

$$B[(k - m\omega^2)^2 + \delta^2\omega^2] = F\delta\omega$$

De esta ecuación podemos determinar B:

$$B = \frac{F\delta\omega}{(k-m\omega^2)^2 + \delta^2\omega^2} \quad (42)$$

La ecuación para A, está bien determinada usando B y la ecuación (41) para obtener:

$$A = \frac{F(k-m\omega^2)}{(k-m\omega^2)^2 + \delta^2\omega^2} \quad (43)$$

Luego una solución particular de (39) es:

$$y_p = A\cos\omega t + B\sin\omega t = R\cos(\omega t - \theta) \quad (44)$$

Donde A y B están dados por (42) y (43). La amplitud de esta respuesta en particular es:

$$R = \sqrt{A^2 + B^2} = \frac{\sqrt{(k-m\omega^2)^2 + \delta^2\omega^2}}{(k-m\omega^2)^2 + \delta^2\omega^2} = \frac{F}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2 + \delta^2\omega^2}} \quad (45)$$

El diagrama de la amplitud de respuesta de los osciladores amortiguados se sigue de (45). La razón de la amplitud de la respuesta R a la amplitud de la fuerza forzando F depende de cuatro parámetros: m, k, δ del sistema masa resorte y la frecuencia forzada circular ω . En lugar de la representación gráfica de esta relación como una función de la frecuencia de fuerza, es mejor introducir una frecuencia adimensional, la relación de la frecuencia forzada ω a la frecuencia natural circular $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. De esta forma se sigue de (45) que:

$$R = \frac{F}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2 + \delta^2\omega^2}} = \frac{\frac{F}{k}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\delta^2}{km}\right)\left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)}} \quad (46)$$

la cual es graficada en la figura 22. Observamos que de esta manera, el gráfico se puede hacer depender de un solo parámetro⁴.

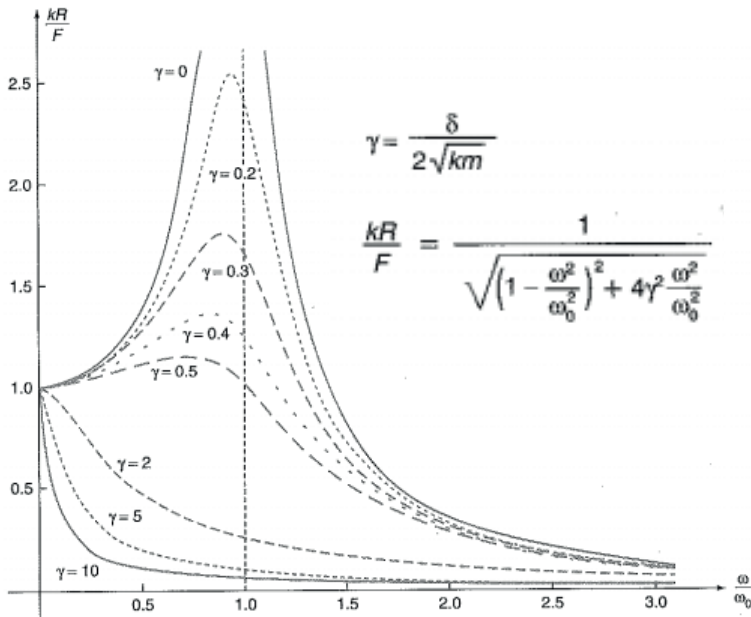
$$\frac{Rk}{F} = \frac{1}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2 + 4\gamma^2\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}} \quad (47)$$

⁴ Ver Hubbard, J. H. (1994). What it Means to Understand a Differential Equations. Journal 25, N°. 2. pp. 372-384.

El parámetro γ es el coeficiente de amortiguamiento crítico.

$$\gamma = \frac{\delta}{2\sqrt{km}} = \frac{\delta/2m}{\sqrt{k/m}} \quad (48)$$

Figura 22. Gráfica de la función (46) para diferentes valores del parámetro.



Fuente. Elaborada por el autor con el programa Derive.

También es la relación de la tasa de atenuación de los osciladores sub-amortiguado (y críticamente amortiguado) a la frecuencia natural. Se puede ver que si $\gamma = 0$, la curva de respuesta es la que se analizó para vibraciones forzadas sin amortiguación. Si la frecuencia de fuerza es igual a la frecuencia natural, $\omega = \omega_0$, entonces de (47).

$$R = \frac{F}{2\gamma k}$$

Esto muestra que la amplitud de la respuesta es mayor cuando el amortiguamiento es pequeño (γ es pequeño). Se puede demostrar que el diagrama de la respuesta de amplitud tiene un máximo para $\omega \neq 0$, si $\gamma < \frac{\sqrt{2}}{2}$. Sin embargo, si $\gamma \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$, entonces el máximo de la respuesta en diagrama se produce en $\omega = 0$.

La fase θ es probablemente menos importante. Recordemos que $\tan\theta = \frac{B}{A} = \delta\omega/(k - m\omega^2)$.

Ejemplo 8. Oscilador forzado amortiguado:

Un sistema masa resorte, con una masa atada de $m = 1$ g, tiene una constante del resorte de 50 g/seg² y un coeficiente de amortiguamiento de 2 g/seg. En el tiempo $t = 0$, la masa es empujada hacia abajo $23/26$ cm y lanzada a una velocidad de $28\frac{2}{13}$ cm/seg hacia abajo. Una fuerza de $41 \cos(2t)$ dinas actúa hacia abajo sobre la masa para $t \geq 0$. Determine el movimiento resultante y gráfiquelo.

Solución:

La ecuación diferencial que modela este movimiento es:

$$y'' + 2y' + 50y = 41 \cos(2t), \quad y(0) = 23/26, \quad y'(0) = 28\frac{2}{13} \quad (49)$$

La ecuación característica $r^2 + 2r + 50 = 0$ tiene las raíces $r = -1 \pm 7i$. Entonces la solución de la ecuación homogénea asociada es:

$$y_h = C_1 e^{-t} \cos(7t) + C_2 e^{-t} \sin(7t)$$

Utilizando el método de los coeficientes indeterminados visto en la sección anterior, podemos ver que la solución particular es de la forma:

$$Y_p = A \cos(2t) + B \sin(2t)$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial (49) se tiene:

$$(A \cos 2t + B \operatorname{sen} 2t)'' + 2(A \cos 2t + B \operatorname{sen} 2t) + 50(A \cos 2t + B \operatorname{sen} 2t) = 41 \cos(2t)$$

O:

$$-4A \cos 2t - 4B \operatorname{sen} 2t - 4A \operatorname{sen} 2t + 4B \cos 2t + 50A \cos 2t + 50B \operatorname{sen} 2t = 41 \cos 2t$$

Igualando coeficientes de $\cos 2t$ y $\operatorname{sen} 2t$, nos dan las ecuaciones siguientes en A y B:

$$\cos 2t: 46A + 4B = 41$$

$$\operatorname{sen} 2t: -4A + 46B = 0$$

De donde se tiene: $B = 1/13$, $A = 23/26$, y:

$$Y = y_p + y_h = \frac{23}{26} \cos 2t + \frac{1}{13} \operatorname{sen} 2t + C_1 e^{-t} \cos(7t) + C_2 e^{-t} \operatorname{sen}(7t)$$

Aplicando la condición inicial dada en (49) con el fin de determinar C_1 y C_2 , encontramos que:

$$\frac{23}{26} = y(0) = \frac{23}{26} + C_1$$

$$28 \frac{2}{13} = y'(0) = \frac{2}{13} - C_1 + 7C_2$$

Entonces $C_1 = 0$, $C_2 = 4$, y:

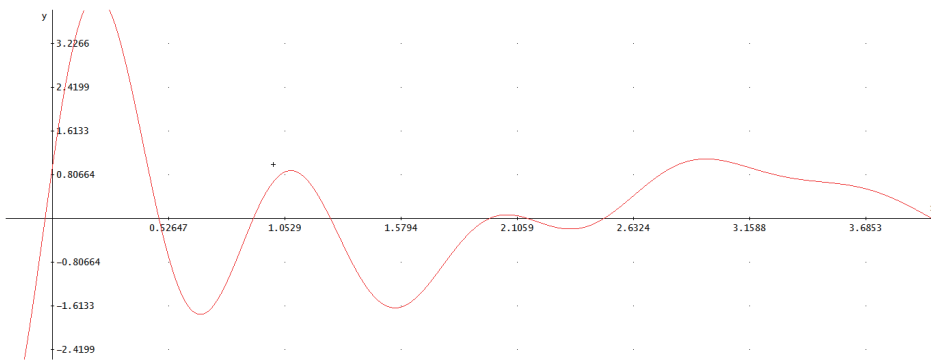
$$y = \frac{23}{26} \cos 2t + \frac{1}{13} \operatorname{sen} 2t + 4e^{-t} \operatorname{sen}(7t)$$

Esta solución se puede simplificar, usando las formas (44) y (45), para dar:

$$y = \sqrt{\frac{41}{52}} \cos(2t - \theta) + 4e^{-t} \operatorname{sen} 7t$$

Donde $\tan\theta = \frac{2}{23}$. Tenga en cuenta que a largo plazo, la respuesta constante se vuelve periódica, con el mismo periodo que la entrada. Es fuera de fase, sin embargo (alcanza su máxima en un momento diferente determinado por θ). Como se muestra en la figura 23, este movimiento puede ser visto como una oscilación amortiguada (transitoria) superpuesta (añadido) sobre el forzamiento de un movimiento armónico.

Figura 23. Gráfica de la función solución anterior.



Fuente. Elaborada por el autor con el programa Derive.

9.8 Ejercicios

En los ejercicios 1 al 12, encontrar la solución particular sin términos transitorios y ponerla en forma de fase-amplitud.

1. $\frac{d^2y}{dt^2} + 6\frac{dy}{dt} + 25y = 3 \cos(4t)$

2. $\frac{d^2y}{dt^2} + 6\frac{dy}{dt} + 25y = -5 \cos(3t)$

3. $\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 13y = 5 \cos(2t)$

4. $\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 13y = -2 \cos(2t)$

5. $\frac{d^2y}{dt^2} + 8\frac{dy}{dt} + 41y = 3 \sin(t)$

6. $\frac{d^2y}{dt^2} + 8\frac{dy}{dt} + 41y = 9 \cos(t)$

7. $\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = \sin(t)$

8. $\frac{d^2y}{dt^2} + 7\frac{dy}{dt} + 12y = \sin(t)$

9. $\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 2y = \sin(t)$

10. $\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + y = \sin(t)$

11. $\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + y = \sin(t)$

12. $\frac{d^2y}{dt^2} + 6\frac{dy}{dt} + 9y = \sin(t)$

13. Muestre que la amplitud de la curva de respuesta:

$$y = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2/\omega_0^2)^2 + 4\gamma^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}$$

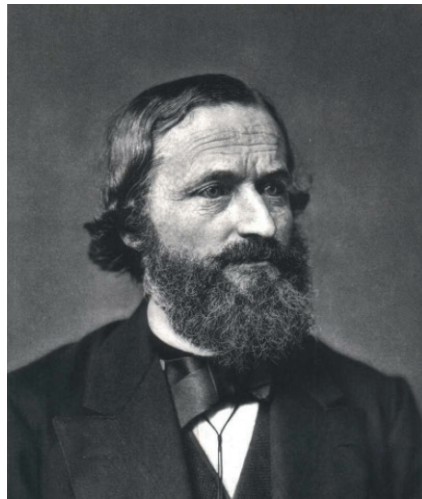
La gráfica dada en la figura 22, tiene un máximo para $\omega \neq 0$ si $\gamma < \frac{\sqrt{2}}{2}$. ¿Para qué valor de ω ocurre dicho máximo? Muestre que este valor de ω se aproxima a ω_0 cuando $\gamma \rightarrow 0$. Sin embargo, si $\gamma \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$, muestre que el máximo del diagrama de respuesta ocurre en $\omega = 0$. Ayuda: Sea $z = \frac{\omega^2}{\omega_0^2}$.

14. Muestre que γ definido por (48) es la relación de la velocidad de disminución de las oscilaciones subamortiguadas y la frecuencia natural. ¿Por qué γ no tiene dimensiones?

15. Muestre que γ definida por (48) es la relación entre el coeficiente de amortiguación para el coeficiente de amortiguación en el amortiguamiento crítico. Es por eso que se llama el factor de amortiguamiento crítico.

9.9 Circuitos eléctricos lineales

Figura 24. Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887).



Fuente. Enciclopedia Británica (Biblioteca virtual Universidad EAN).

Kirchhoff nace en la ciudad de Königsberg, el 12 de marzo de 1824 y muere en Berlín, el 17 de octubre de 1887; fue un físico prusiano cuyas principales contribuciones científicas estuvieron en el campo de los circuitos eléctricos, la teoría de placas, la óptica, la espectroscopia y la emisión de radiación de cuerpo negro.

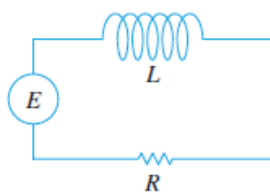
Inventó el espectroscopio, y junto con Robert Bunsen descubrió el rubidio y el cesio por métodos espectrales. Identificó la raya D del espectro solar como la producida por el sodio vaporizado. Descubrió las leyes generales que rigen el comportamiento de un circuito eléctrico. Se dedicó al estudio de la termodinámica y realizó investigaciones sobre la conducción del calor. Estudió los espectros del Sol, de las estrellas y de las nebulosas, confeccionando un atlas del espacio y

demonstró la relación existente entre la emisión y la absorción de la luz por los cuerpos incandescentes.

Kirchhoff propuso el nombre de *radiación de cuerpo negro* en 1862. Es responsable de dos conjuntos de leyes fundamentales, en la teoría clásica de circuitos eléctricos y en la emisión térmica. Aunque ambas se denominan Leyes de Kirchhoff, probablemente esta denominación es más común en el caso de las Leyes de Kirchhoff de la ingeniería eléctrica.

Vamos de nuevo a considerar los circuitos eléctricos vistos en el capítulo 7, unidad 7.5. Allí solamente consideramos circuitos en serie LR y RC, teniendo en cuenta las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden de la forma:

Figura 25. Gráfica del circuito LR.

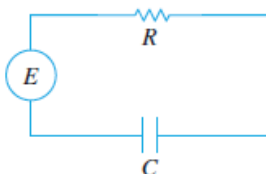


Fuente. Elaborada por el autor.

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E(t)$$

Y:

Figura 26. Gráfica del circuito RC.

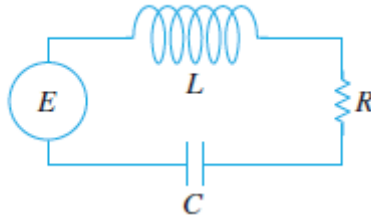


$$R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = E(t)$$

Fuente. Elaborada por el autor con el programa Derive.

Consideraremos ahora los circuitos LRC en serie que, como hemos visto, se describen mediante una ecuación diferencial lineal de segundo orden, similar a la ecuación diferencial de movimiento forzado con amortiguamiento:

Figura 27. Gráfica de un circuito (LRC).



Fuente. Elaborada por el autor.

$$L \frac{di}{dt} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = E(t)$$

Por la segunda ley de Kirchhoff, se tiene que la suma de estos voltajes es $E(t)$ aplicado al circuito, esto es:

$$\text{Resistor: } V_R = iR$$

$$\text{Capacitor: } V_C = \frac{1}{C} q$$

$$\text{Inductor: } V_L = L \frac{di}{dt}$$

Donde R , L y C son constantes y entonces se tiene:

$$L \frac{di}{dt} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = E(t) \quad (50)$$

Pero la carga $q(t)$ en el capacitor se relaciona con la corriente $i(t)$ con $i = dq/dt$, así la ecuación (50) se convierte en la ecuación diferencial lineal de segundo grado:

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = E(t) \quad (51)$$

O diferenciando (50), se tiene:

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = E(t) \quad (52)$$

Las ideas usadas en el análisis de circuitos eléctricos, son similares a las vistas en la sección anterior para los sistemas masa resorte. Es decir que todo el análisis que se aplicó en la sección anterior es válida, pero ahora la masa m es igual a la inductancia L ($m = L$), fricción es la resistencia ($\delta = R$), y la constante del resorte es el recíproco de la capacitancia ($k = 1/C$). Luego en particular, la discusión de resonancia, amortiguación, amplitud y fase angular sigue siendo apropiada.

Si $E(t) = 0$ para $t > 0$, de manera que la ecuación (51) se transforma en:

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = 0 \quad (53)$$

En este caso se dice que el circuito RLC está en oscilación libre.

La ecuación característica en este caso es:

$$Lr^2 + Rr + \frac{1}{C} = 0$$

Con raíces:

$$r_1 = \frac{-R - \sqrt{R^2 - 4L/C}}{2L} \quad y \quad r_2 = \frac{-R + \sqrt{R^2 - 4L/C}}{2L} \quad (54)$$

Y entonces podemos considerar tres casos, todos similares a los analizados en los problemas del sistema masa resorte amortiguado:

Caso 1: la oscilación es **sub-amortiguada** si $R < \sqrt{4L/C}$. En este caso r_1 y r_2 en (53) son complejas conjugadas que se pueden escribir como:

$$r_1 = -\frac{R}{2L} - i\omega_1 \quad y \quad r_2 = -\frac{R}{2L} + i\omega_1$$

Donde:

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{4L/C - R^2}}{2L}$$

La solución general de (53) es:

$$q(t) = e^{-Rt/2L}(C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \operatorname{sen} \omega_1 t)$$

Que se puede escribir como:

$$q(t) = A e^{-Rt/2L} \cos(\omega_1 t - \theta) \quad (54)$$

Donde:

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad A \cos \theta = C_1, \quad \text{y} \quad A \operatorname{sen} \theta = C_2$$

En el caso idealizado en que $R = 0$, la solución se reduce a:

$$q = A \cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}} - \theta\right)$$

Que es similar al movimiento armónico simple de un sistema masa resorte no amortiguado en vibración libre.

En realidad, los circuitos RLC por lo común son sub-amortiguados, así que el caso que acabamos de revisar es el más importante. Sin embargo, veamos las otras posibilidades.

Caso 2: la oscilación es **sobre-amortiguada** si $R > \sqrt{4L/C}$. En este caso los ceros r_1 y r_2 del polinomio característico son reales, con $r_1 < r_2 < 0$, y la solución general es de la forma:

$$q = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \quad (55)$$

Caso 3: la oscilación es críticamente amortiguada si $R = \sqrt{4L/C}$. En este caso, $r_1 = r_2 = -R/2L$ y la solución general es:

$$q = e^{-Rt/2L}(C_1 + C_2 t) \quad (56)$$

Si $R \neq 0$, entonces los exponentes en (54), (55) y (56) son negativos, y por lo tanto la solución de cualquier problema homogéneo con valor inicial:

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = 0, \quad q(0) = q_0, \quad q'(0) = I_0$$

Tienden de manera exponencial a cero cuando t tienda a infinito. Así, tales soluciones son transitorias en el sentido definido anteriormente, donde se analizaron vibraciones forzadas de un sistema masa resorte con amortiguamiento.

Ejemplo 9. Oscilación sub-amortiguada:

En $t = 0$ una corriente de 2 amperios fluye en un circuito RLC con resistencia $R = 40$ ohms⁵, inductancia $L = 2$ henrys y capacitancia $C = 1105$ farads. Encuentre la corriente que fluye en el circuito en $t > 0$ si la carga inicial sobre el capacitor es de 1 coulomb. Suponga que $E(t) = 0$.

Solución:

La ecuación para la carga q es:

$$\frac{1}{5} q'' + 40q' + 10000q = 0$$

O:

$$q'' + 200q' + 50000q = 0 \quad (57)$$

Por lo tanto, se tiene que resolver el problema con condición inicial:

$$q'' + 200q' + 50000q = 0, \quad q(0) = 1, \quad q'(0) = 2 \quad (58)$$

⁵ Georg Simón Ohm (1789-1854), físico alemán, descubrió la ley que lleva su nombre. Este descubrimiento fue de gran influencia en el desenvolvimiento de la teoría de circuitos eléctricos.

La corriente deseada es la derivada de la solución de este problema con valor inicial.

La ecuación característica de (57) es:

$$r^2 + 200r + 50000 = 0$$

que tiene ceros complejos $r = -100 \pm 200i$. Por lo tanto, la solución general es:

$$q = e^{-100t}(C_1 \cos 200t + C_2 \sen 200t) \quad (59)$$

Al derivar la ecuación anterior y agrupar términos semejantes resulta:

$$q' = e^{-100t}[(100C_1 - 200C_2) \cos 200t + (100C_2 + 200C_1) \sen 100t] \quad (60)$$

Para obtener la solución del problema con valor inicial, hacemos $t = 0$ en (58) y (59) para obtener:

$C_1 = 1$ y $C_2 = 51/100$, luego:

$$Q = e^{-100t} \left(\cos 200t + \frac{51}{100} \sen 200t \right)$$

que es la solución del problema con condición inicial, dada en (58). Mediante la derivada se tiene:

$$I = e^{-100t}(2 \cos 200t + 251 \sen 200t)$$

Oscilaciones forzadas con amortiguamiento

Un problema con valores iniciales de la forma:

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{c} q = E(t), q(0) = q_0, q'(0) = i_0 \quad (61)$$

O:

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{c} i = E(t) \quad (62)$$

Donde q_0 es la carga inicial sobre el capacitor e i_0 es la corriente inicial en el circuito, sabemos que representa un **oscilador forzado con amortiguamiento**.

Como ya se dijo anteriormente, si $E = 0$ entonces todas las soluciones de esta ecuación (61) son transitorias. Si $E \neq 0$, entonces todas las soluciones de (61) tienen la forma $q = q_h + q_p$ donde q_h satisface la ecuación asociada y tiende de manera exponencial a cero cuando $t \rightarrow \infty$ para cualesquiera condiciones iniciales, mientras que q_p depende solo de E , y es independiente de las condiciones iniciales. Como en el caso masa resorte con amortiguamiento, llamamos q_p a **la carga de estado permanente** sobre el capacitor del circuito RLC. Como $i = q' = (q_h + q_p)' = q_h' + q_p'$ y q_h' también tiende exponencialmente a cero cuando $t \rightarrow \infty$, se dice que $i_h = q_h'$ es la corriente **transitoria** e $i_p = q_p'$ es la corriente de **estado permanente**. En la mayoría de problemas solo interesa la carga y la corriente de estado permanente.

La resonancia eléctrica

Consideremos una fuente de corriente alterna:

$$E(t) = F \cos \omega t$$

Aquí, F es el máximo voltaje de la fuente y ω es la frecuencia (circular) de la fuerza del voltaje. La ecuación diferencial para la corriente en el circuito RLC se sigue de (62):

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = F \omega \cos \omega t \quad (63)$$

Si la resistencia eléctrica puede despreciarse, $R = 0$, entonces la corriente en el circuito satisface:

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{C} i = F \omega \cos \omega t$$

Soluciones de la ecuación homogénea asociada con frecuencia natural (circular) $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

La resonancia ocurre (sin un resistor) si la frecuencia forzada es igual a la frecuencia natural:

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Respuesta eléctrica

Cuando la resistencia eléctrica ($R > 0$), la solución general de (63) según hemos visto es de la forma $i = i_h + i_p$, donde i_h es la solución correspondiente a la ecuación homogénea asociada y i_p es la solución particular. La solución de la ecuación homogénea asociada se deriva de una exponencial de la forma e^{rt} , la cual puede corresponder a subamortiguado, críticamente amortiguado u oscilación sobre-amortiguado (por analogía con el sistema masa resorte $m = l$, $\delta = R$, $k = \frac{1}{C}$). La ecuación característica es:

$$Lr^2 + Rr + \frac{1}{C} = 0$$

Las raíces de la ecuación característica son $r = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4L/C}}{2L}$, como ya se vio en (53). Como L , R , C son números positivos, en todos los tres casos (sub-amortiguado, críticamente amortiguado u oscilación sobre-amortiguado), tenemos $i_h \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. Entonces, después de algún tiempo, la solución general es aproximada por una solución particular. Usando el método de los coeficientes indeterminados, una solución particular puede ser encontrada y debe ser de la forma:

$$i_p = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

Se pueden encontrar fórmulas para A y B y de ellas derivar fórmulas para la amplitud de la respuesta. Tal como se calculó en el sistema masa resorte la fuerza de la vibración mecánica, se puede usar la fórmula (46). En cambio de m se pone L , de δ se pone R , y de

k , $1/C$, además F es $F\omega$. El factor extra ω va a cambiar algunas de las propiedades del diagrama de respuesta. Entonces de (42) y (43) de la sección anterior, se obtiene:

$$i_p = \frac{F\omega}{\sqrt{\left(\frac{1}{C} - L\omega^2\right)^2 + R^2\omega^2}} \cos(\omega t - \theta) \quad (64)$$

No vamos a preocuparnos por el ángulo de fase θ aquí.

La amplitud I de la respuesta de la corriente satisface:

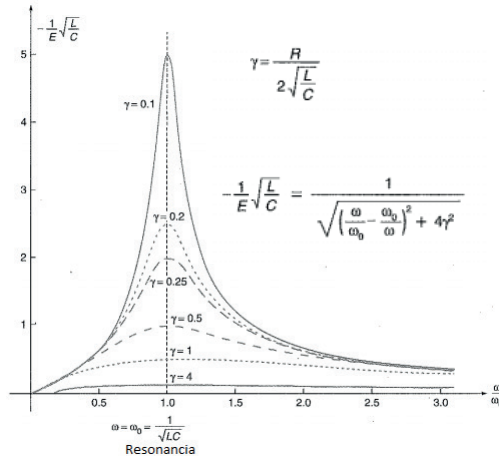
$$I = \frac{F\omega}{\sqrt{\left(\frac{1}{C} - L\omega^2\right)^2 + R^2\omega^2}} \quad (65)$$

Como en un sistema masa resorte, la respuesta depende de R , L , C y la frecuencia circular forzada ω .

La respuesta es cero si $\omega = 0$. Si $\omega \neq 0$, la respuesta se simplifica a:

$$I = \frac{F}{\sqrt{\left(\frac{1}{\omega C} - L\omega\right)^2 + R^2}}$$

la cual, es graficada en la figura 28 para varios valores de $\gamma = R/(2\sqrt{L/C})$. El máximo de $|I|$ ocurre en el mínimo del denominador, y este ocurre cuando $\frac{1}{\omega C} - L\omega = 0$, o equivalentemente $\omega = \frac{1}{LC} = \omega_0$. La amplitud de la respuesta tiene un máximo cuando el sistema es forzado por la frecuencia natural. Valores pequeños de γ corresponden a valores pequeños de R . El caso $R = 0 = \gamma$, sería resonancia pura.

Figura 28. Gráfica de la función (28) para diferentes valores del parámetro.

Fuente. Elaborada por el autor con el programa Derive.

Ejemplo 10. Respuesta de un circuito RLC:

Determine la corriente de estado estacionario de un circuito RLC para un voltaje periódico aplicado de la forma $E(t) = F_0 \sin \omega t$.

Solución:

Como $E(t) = F_0 \sin \omega t$, la ecuación diferencial que rige el flujo de corriente en el circuito es:

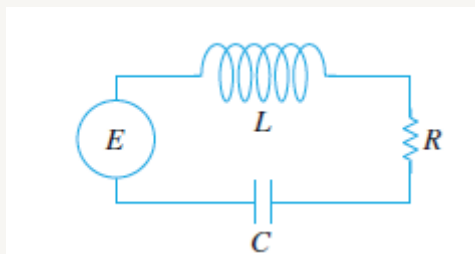
$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = F_0 \cos \omega t$$

Que es análoga a la ecuación diferencial

9.10 Ejercicios

1. Un circuito RLC, dado por la figura 29, tiene un voltaje de carga $E(t) = 3 \cos t$ volts. Los valores para las componentes son $R = 3\Omega$, $L = 0.5$ H, y $C = 0.4$ F. Inicialmente, la carga sobre el capacitor es cero y la corriente en el resistor es 1 A. Encuentre el cambio sobre el capacitor y la corriente como función del tiempo.

Figura 29. Gráfica de un circuito RLC.



Fuente . Elaborada por el autor con el programa Derive.

2. Un circuito RLC, dado por la figura 29, tiene un voltaje de carga $E(t) = 5 \cos 2t$ volts. Los valores para las componentes son $R = 2\Omega$, $L = 1$ H, y $C = 1/17$ F. Inicialmente, la carga sobre el capacitor y la corriente en el resistor son cero. Encuentre el cambio sobre el capacitor y la corriente como función del tiempo.
 3. Un circuito RLC, dado por la figura 29, tiene una batería de 1.5 V con una carga de voltaje $E(t) = 1.5$. Los valores para las componentes son $R = 1.5\Omega$, $L = 1$ H, y $C = 2$ F. Inicialmente, la carga sobre el capacitor es cero y la corriente en el resistor es 1 A. Encuentre el cambio sobre el capacitor y la corriente como función del tiempo.
-

4. Un circuito RLC, dado por la figura 29, tiene una batería de 9 voltios con una carga de voltaje $E(t) = 9$. Los valores para las componentes son $R = 5\Omega$, $L = 6$ H, y $C = 1$ F. Inicialmente, la carga sobre el capacitor es 1 C y la corriente en el resistor es cero. Encuentre el cambio sobre el capacitor y la corriente como función del tiempo.

5. Un LC circuito ($R = 0$) dado por la figura 29, tiene $C = 0.1$ F y $E(t) = \sin \omega t$. Suponga que ω es constante tal que $E(t)$ tiene frecuencia entre 20 y 30 Hz. ¿Qué valores de L no da lugar a la resonancia para cualquier ω ?

6. Un circuito RLC, dado por la figura 29, tiene $R = 20\Omega$, $L = 1$ H, y $C = 0.005$ F. La fuente de voltaje está en corto circuito ($E(t) = 0$). En el tiempo $t = 0$, hay una carga de 10 C sobre el capacitor y no hay corriente. Resuelva la ecuación diferencial para la carga, y ponerla en la forma de amplitud de fase. ¿Cuántos segundos tardará la amplitud variable para reducirse en un 99 %?

7. Un circuito RLC, dado por la figura 29, tiene $R = 2\Omega$, $L = 1$ H, y $C = 0.5$ F. La fuente de voltaje $E(t)$ es una batería de 1 V que está en corto circuito ($C = 0$) después π segundos. La carga inicial sobre la capacitancia es cero y la corriente inicial es cero. Encuentre la carga sobre el capacitor y la gráfica para $0 \leq t \leq 2\pi$ segundos (asuma que la carga y la corriente son continuas en $t = \pi$).

8. El LC circuito ($R = 0$) dado por la figura 29, tiene $L = 4$ H y, $C = 0.25$ F dado por la figura 29, tiene $C = 0.1$ F. El voltaje de la corriente es una batería de 2 V que está en corto circuito ($E = 0$) después de 4π segundos. La

carga inicial es cero, la corriente inicial es 1 A. Encuentre la carga sobre el capacitador y la corriente en el inductor para $0 \leq t \leq 8\pi$ (asuma que la carga y la corriente son continuas en $t = 4\pi$).

9. Sea $R = 0$ y $E(t) = 0$ en la figura 29, de modo que tenemos un circuito LC sin fuente de voltaje. Sea $E(i, q) = \left(\frac{L}{2}\right)i^2 + \left(\frac{1}{2C}\right)q^2$. Muestre que E es constante verificando que $\frac{dE}{dt} = 0$ (esto es equivalente eléctrico de la conservación de la energía mecánica).

10. Un circuito LC ($R = 0$) dado por la figura 29 se tiene que $L = 8$ H y $C = 2$ F. ¿Para qué valor de ω puede la carga del voltaje $E(t) = 2 \cos \omega t$ voltios crear resonancia?

11. Un circuito LC ($R = 0$) dado por la figura 29, con $L = 9$ H y $C = 1$ F. La carga del voltaje es $E(t) = 4 \cos 2t$. Como $R = 0$, entonces la respuesta libre no es transcendente. Sin embargo, hay una escogencia para $q(0)$, $i(0)$ para los cuales la respuesta libre puede estar ausente. ¿Cuáles son los valores de $q(0)$, e $i(0)$?

En los siguientes cinco ejercicios, use la correspondencia:

Inductancia \leftrightarrow masa

Resistencia \leftrightarrow fricción

Y:

$$\frac{1}{\text{capacitancia}} \leftrightarrow \text{constante del resorte}$$

Entre el circuito dado en la figura 29 y el sistema masa resorte en la sección anterior (la masa m está dada en slugs o gramos mientras que la inductancia L está dada en Henrys, etc.).

12. Reescribir el ejercicio 9.1.A 18 en términos de circuitos y responder las partes a), b) y c).

13. Reescribir el ejercicio 9.1.A 19 en términos de circuitos y responder las partes a), b) y c).

14. Reescribir el ejercicio 9.1.A 20 en términos de circuitos y responder las partes a), b) y c).

15. Reescribir el ejercicio 9.1.A 21 en términos de circuitos y responder las partes a), b) y c).

16. Reescribir el ejercicio 9.1.A 22 en términos de circuitos y responder las partes a), b) y c).

(Entrada-salida de voltaje). Frecuentemente es muy útil considerar circuitos como dispositivos de entradas-salidas. Suponga para el circuito en la figura 29 que $R > 0$, de modo que la respuesta libre es transitoria. Asumimos que este término "transitoria" no es importante, por lo que se debe considerar que la solución $q(t)$ debe darse en los términos que no son transitorios, esto es, la respuesta forzada. La **entrada de voltaje** se puede tomar como $E(t)$, y la **salida de voltaje** como el voltaje a través del condensador, que es $(1/C) q$.

17. Suponga que $F = 1$, $R = 6$, $L = 1$, $C = 1/13$, y $\omega = 3$. Encuentre I en (65).

18. Suponga que $F = 1$, $R = 7$, $L = 12$, $C = 1$, y $\omega = 2$. Encuentre I en (65).

9.11 El péndulo y otras aplicaciones

A. Péndulo simple lineal

Un péndulo simple se compone de una ligera varilla rígida de longitud h , sujeta con una bisagra en un extremo (al techo), con una masa m sujeta en el otro extremo. Cuando el péndulo se encuentra en reposo en una posición vertical con el peso directamente por debajo de la unión al techo, tomamos la configuración a partir de que se hacen las mediciones. Si consideramos el péndulo simple en movimiento, la posición del péndulo se caracteriza por el ángulo θ (en radianes) entre la varilla y la posición de reposo (ver figura 30, en la cual los ángulos positivos se miden hacia la derecha, y $\theta' > 0$ representa el movimiento en dirección contraria a las manecillas del reloj. Se supone que todo movimiento del péndulo simple tiene lugar en el mismo plano).

Si el peso de la varilla es despreciable, la bisagra no tiene fricción y no existe resistencia del aire, la ecuación diferencial que rige el movimiento del péndulo es:

$$m\theta'' + m\lambda^2 \text{sen}\theta = 0 \quad (66)$$

Donde $\lambda = \sqrt{\frac{g}{h}}$. Si una fuerza de fricción actúa también sobre el péndulo, y si esta fuerza de fricción es proporcional a la velocidad y amortigua el movimiento, entonces para incluir la fuerza de fricción debemos agregar el término $-b\theta'$, donde b es una constante positiva, al miembro del lado de la derecha de la ecuación (66). Esto nos lleva a la ecuación:

$$m \theta'' + m\lambda^2 \text{sen}\theta = -b \theta'$$

O:

$$m \theta'' + m\lambda^2 \text{sen}\theta + b \theta' = 0 \quad (67)$$

Esta es una ecuación diferencial no lineal homogénea de segundo orden y no puede resolverse en términos de funciones familiares. Es la ecuación diferencial que describe el movimiento de un péndulo simple.

Si θ es pequeño, es decir, si el desplazamiento del péndulo es siempre cercano a la posición de reposo, podemos aproximar el seno de θ , mediante el primer término de su serie de Taylor, es decir $\text{sen} \theta \approx \theta$, en cuyo caso la ecuación (67) se convierte en:

$$m \theta'' + b \theta' + m\lambda^2 \theta = 0 \quad (68)$$

Esta es una ecuación diferencial homogénea de segundo orden con coeficientes constantes. Aquí m , b y λ^2 son constantes positivas. Esta es la ecuación diferencial lineal que describe el movimiento de un péndulo simple lineal.

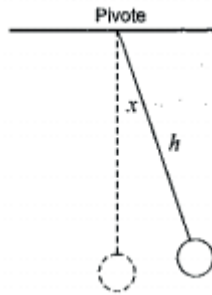
Ejemplo 11. El péndulo simple:

Consideremos el comportamiento del péndulo simple lineal con $m = 1$, $b = a$ y $\lambda^2 = \frac{9}{4}$. En este caso a representa la fricción (cuanto mayor sea a , mayor será la fuerza de fricción). Las condiciones iniciales $\theta(0) = 1$ y $\theta'(0) = 0$ representan la masa desplazada inicialmente hacia la derecha una magnitud de 1 radian y que luego se suelta desde el reposo. Para todos los valores de la fricción, esperamos de manera intuitiva que la masa se balancee primero hacia la izquierda.

Solución:

- I) **(Movimiento no amortiguado)**. Cuando $a = 0$, no hay fricción y el péndulo va y viene hacia atrás y hacia adelante de manera periódica, oscilando a través de la posición de equilibrio $\theta = 0$. Sus ángulos extremos son un radian hacia la izquierda y hacia la derecha de la posición de equilibrio.
- II) **(Movimiento sub-amortiguado)**. Cuando $a = 1$, existe una modesta cantidad de fricción y el péndulo oscila hacia atrás y hacia adelante a través de su posición de reposo a una velocidad menor que la del caso en que no hay fricción. La amplitud disminuye con el tiempo y se aproxima gradualmente a la posición de reposo. A medida que a se incrementa hasta 3, la fricción aumenta y las oscilaciones se hacen más pequeñas.
- III) **(Movimiento críticamente amortiguado)**. Cuando $a = 3$. Todas las oscilaciones cesan. En este ejemplo el péndulo nunca pasa a través de la posición de equilibrio vertical, pero se mueve lentamente a partir de su posición inicial. Le lleva un tiempo infinito alcanzar $\theta = 0$. Este es el valor más pequeño de a para el cual cesan las oscilaciones.
- IV) **(Movimiento sobre-amortiguado)**. Cuando $a = 5$, no hay oscilaciones. En este ejemplo el péndulo nunca pasa a través de la posición de reposo vertical, pero en promedio se mueve con más lentitud que en el caso críticamente amortiguado. De nuevo le lleva un tiempo infinito alcanzar $\theta = 0$.

Figura 30. Gráfica del movimiento de un péndulo.



Fuente. Elaborada por el autor.

Ejemplo 12. Movimiento armónico simple:

Ya vimos que con algunas simplificaciones se puede describir el movimiento de un péndulo mediante la ecuación diferencial de segundo orden:

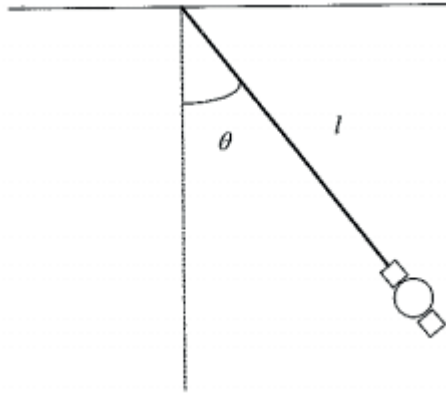
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\text{sen}\theta = 0$$

Donde:

L = longitud del péndulo

θ = ángulo subtendido entre el péndulo y la posición vertical en equilibrio

g = aceleración de la gravedad

Figura 31. Gráfica de los elementos de un péndulo simple.

Fuente. Elaborada por el autor.

Determinar el ángulo θ después de que han transcurrido 30 segundos, si el ángulo $\theta = \frac{\pi}{6}$ en $t = 0$ y $\theta' = 0$ en $t = 0$ segundos, y la longitud l es de 50 centímetros.

Solución:

En el caso de que θ sea pequeño, se puede reemplazar en la ecuación dada, según vimos a $\sin \theta$ por θ , y entonces tenemos:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

La cual es una ecuación lineal de segundo orden homogéneo, que podemos resolver a través de su ecuación característica, tal como se vio en el capítulo anterior, entonces la solución es:

$$\theta = C_1 \cos \sqrt{\frac{g}{l}} t + C_2 \sin \sqrt{\frac{g}{l}} t$$

Para determinar C_1 y C_2 se hace uso de las condiciones iniciales y se requiere conocer θ' , derivando la ecuación anterior tenemos que:

$$\theta' = -C_1 \sin \sqrt{\frac{g}{l}} t \cdot \left(\sqrt{\frac{g}{l}}\right) + C_2 \cos \sqrt{\frac{g}{l}} t \cdot \left(\sqrt{\frac{g}{l}}\right)$$

$$\frac{\pi}{6} = C_1 \cos \sqrt{\frac{g}{l}}(0) + C_2 \operatorname{sen} \sqrt{\frac{g}{l}}(0)$$

$$0 = -C_1 \operatorname{sen} \sqrt{\frac{g}{l}}(0) \left(\sqrt{\frac{g}{l}} \right) + C_2 \cos \sqrt{\frac{g}{l}}(0) \left(\sqrt{\frac{g}{l}} \right)$$

De donde se tiene que:

$$C_1 = \frac{\pi}{6} \text{ y } C_2 = 0$$

Entonces la solución particular está dada por:

$$\theta = \frac{\pi}{6} \cos \sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t$$

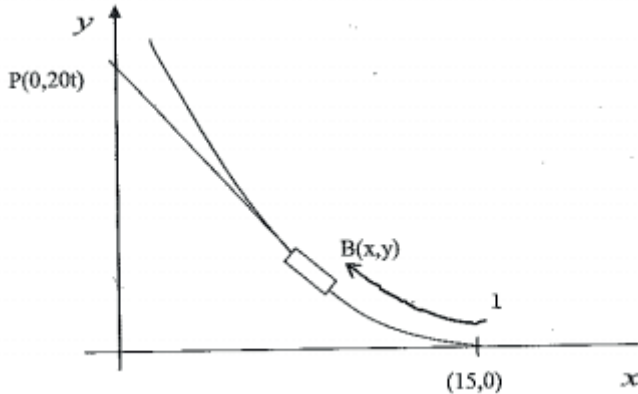
Así que transcurridos 30 segundos, se tiene:

$$\theta = \frac{\pi}{6} \cos \sqrt{\frac{9.8}{0.5}} \cdot (30) = 15.66$$

Otra aplicación importante de las ecuaciones de segundo orden se tiene en el siguiente tipo de problema:

Ejemplo 13. Un modelo de persecución:

Un hombre se encuentra con su bote en un muelle, cuando ve partir a su perro en el malecón, si el perro corre en la dirección positiva del eje y , al mismo tiempo el hombre en el bote parte de la posición $(15, 0)$ en persecución del perro, como lo muestra la figura 32, si el perro lleva una velocidad de 20 Km/hora y el bote de 20 Km/hora, ¿qué trayectoria sigue el bote?

Solución:**Figura 32.** Gráfica del modelo de persecución.

Fuente. Elaborada por el autor con el programa Derive.

En el instante en que inicia la persecución, el perro parte del origen, con una velocidad de 20km/hora, así que en cualquier instante t , su posición será $(0, 20t)$, tal como se muestra en la figura 32.

Luego en cualquier instante t , la recta PB es tangente a la trayectoria y por lo tanto:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{20t - y}{-x}$$

O bien:

$$-x \frac{dy}{dx} = 20t - y$$

Si derivamos esta ecuación con respecto a x , se tiene:

$$-x \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 20 \frac{dt}{dx} - \frac{dy}{dx}$$

Luego:

$$-x \frac{d^2y}{dx^2} = 20 \frac{dt}{dx}$$

Recordando el concepto de longitud de arco se puede obtener $\frac{dt}{dx} = \sqrt{1 + y'^2}$ y esta ecuación es de utilidad al usar la regla de la cadena para:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{dt}{dl} \frac{dl}{dx} = -\frac{1}{v} \sqrt{1 + y'^2}$$

Donde v es la velocidad del bote y el signo negativo implica que cuando l aumenta, x disminuye, y al combinar las dos últimas ecuaciones se tiene:

$$-x \frac{d^2y}{dx^2} = -\sqrt{1 + y'^2}$$

La cual es una ecuación de segundo orden, que se puede resolver utilizando la sustitución algebraica $y' = w$, así:

$$xw' = \frac{20}{v} \sqrt{1 + w^2}$$

Esta última ecuación se puede resolver por separación de variables:

$$w + \sqrt{1 + w^2} = C_1 x^{\frac{2}{3}}$$

Recordando que cuando $x = 15$, $w = 0$, entonces $C_1 = 15^{-2/3}$. Sustituyendo C_1 y despejando w de esta ecuación tenemos:

$$w = \frac{1 - C_1 x^{\frac{4}{3}}}{-2C_1 x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{2C_1 x^{\frac{2}{3}}} + \frac{x^{\frac{2}{3}}}{2}$$

Como $w = \frac{dy}{dx}$, entonces:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2C_1 x^{\frac{2}{3}}} + \frac{x^{\frac{2}{3}}}{2}$$

Resolviendo de nuevo por separación de variables, tenemos:

$$y = -\frac{3x^{\frac{1}{3}}}{2C_1} + \frac{3C_1 x^{\frac{2}{3}}}{10} + C_2$$

De la condición inicial, $x = 15$ cuando $y = 0$, y dado que $C_1 = 15^{-2/3}$, sustituyendo en la ecuación anterior, se tiene que $C_2 = 18$. Finalmente, esta ecuación anterior se transforma en:

$$Y = \frac{3x^{\frac{1}{3}}}{2\left(15^{-\frac{2}{3}}\right)} + \frac{3(15^{-2/3})x^{\frac{5}{3}}}{10} + 18$$

Cuando empezamos a ver el concepto de ecuación diferencial, vimos que una fuente de ellas son las aplicaciones geométricas, veamos un ejemplo de este hecho. Para encontrar ecuaciones de curvas que satisfacen ciertas propiedades, se usan ecuaciones diferenciales de segundo orden.

Para estas ecuaciones se requiere recordar el concepto de radio de curvatura de una curva. Si $y = f(x)$ es una curva dada, entonces, su curvatura está dada por la ecuación:

$$K = \frac{|y''|}{(1+(y')^2)^{3/2}}$$

Y el radio de curvatura es:

$$r = \frac{(1+(y')^2)^{3/2}}{|y''|}$$

Ejemplo 14. Un modelo geométrico:

Hallar la ecuación diferencial de la familia de elipses con centro en el origen y cuyos ejes coinciden con los ejes de coordenadas.

Solución:

La ecuación de una elipse con ejes a y b es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Derivando implícitamente tenemos:

$$2b^2x + 2a^2yy' = 0$$

O:

$$yy' = -\frac{b^2}{a^2}x$$

De la ecuación original, multiplicando por b^2 , se tiene:

$$\frac{b^2x^2}{a^2} + y^2 = b^2$$

De donde:

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{b^2 - y^2}{x^2}$$

Sustituyendo:

$$yy' = -\frac{b^2 - y^2}{x^2}x$$

$$yy' = y^2 - b^2$$

Derivando otra vez:

$$xyy' + y'(xy' + y) = 2yy'$$

$$xyy'' + xy'^2 = yy'$$

O:

$$y'' = \frac{y'^2}{y} - \frac{y'}{x}$$

Se tiene la ecuación pedida.

Ejemplo 15. Otro modelo geométrico:

Si el radio de curvatura de una curva $y = f(x)$ en un punto es $r = \frac{(1+(y')^2)^{3/2}}{|y''|}$ y la longitud de la normal desde dicho punto al eje x es $y\sqrt{1+(y')^2}$, encontrar las curvas con la propiedad de que el radio es proporcional a la longitud de la normal (observar la diferencia entre $k = 1$ y $k = -1$).

Solución:

Tomemos $k = 1$, entonces:

$$\frac{(1 + (y')^2)^{3/2}}{|y''|} = y \sqrt{1 + (y')^2}$$

$$1 + (y')^2 = y''/y$$

Mediante reducción del orden:

$$1 + z^2 = yz \frac{dz}{dy}$$

$$\frac{zdz}{1 + z^2} = \frac{dy}{y}$$

Integrando:

$$\frac{1}{2} \ln(1 + z^2) = \ln y + \ln C_1$$

$$z = \sqrt{C_1^2 y^2 - 1}$$

Como $z = \frac{dy}{dx}$, entonces:

$$\frac{dy}{C_1^2 y^2 - 1} = dx$$

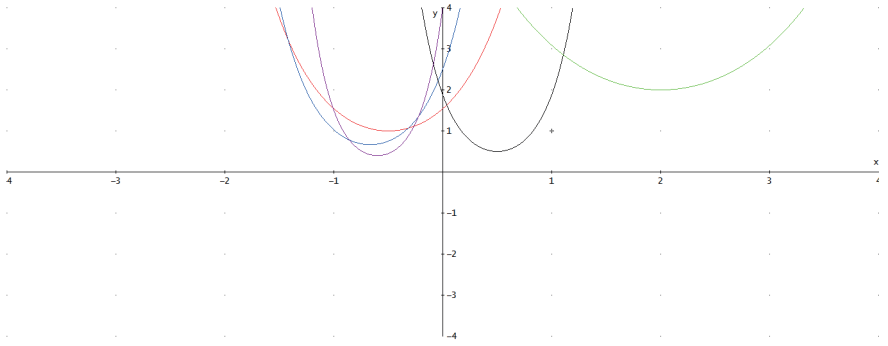
Por sustitución trigonométrica, la nueva integral da:

$$\sqrt{C_1^2 y^2 - 1} = e^{C_1 x + C_2} - C_1 y$$

Elevando al cuadrado y despejando y , tenemos:

$$y = \frac{1}{2C_1} \left[e^{e^{C_1 x + C_2}} + e^{-(e^{C_1 x + C_2})} \right]$$

Que representa una familia de catenarias.

Figura 33. Gráfica de la función anterior para varias condiciones iniciales.

Fuente. Elaborada por el autor con el programa Derive.

Si tomamos $k = -1$, entonces tenemos:

$$(1 + (y')^2)^{3/2} = -y\sqrt{1 + (y')^2} y''$$

De donde se tiene:

$$y \cdot y'' + (y')^2 + 1 = 0$$

La expresión $y \cdot y'' + (y')^2$ proviene de derivar $y \cdot y'$, entonces:

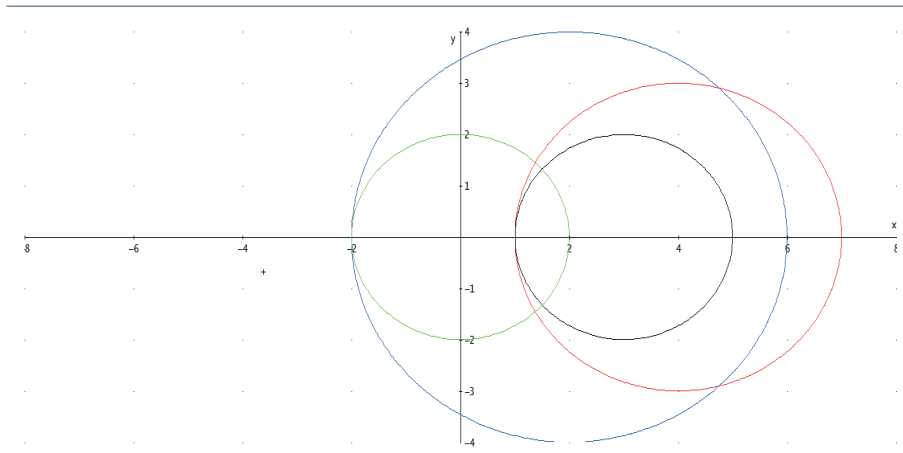
$$y \cdot y' + x = C_1$$

$$y \, dy + (x - C_1) = 0$$

Integrando de nuevo tenemos:

$$y^2 + (x - C_1)^2 = C_2$$

que representa la familia de circunferencias con centro en el eje x .

Figura 34. Gráfica de la ecuación de circunferencias para varios valores de C1.

Fuente. Elaborada por el autor con el programa Derive.

Ejemplo 16. Modelo de movimiento:

Una partícula se mueve a lo largo del eje x según la ecuación:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 9\frac{dy}{dt} + 20y = 0$$

A partir de un punto a 2 m a la derecha del origen, la partícula en el tiempo $t = 0$ seg se dispara hacia la izquierda con una velocidad $v = 12$ m/seg. Hallar:

- El tiempo en que la partícula pasa por el origen.
- El desplazamiento máximo negativo.
- La velocidad máxima (positiva).

Solución:

La ecuación característica asociada a esta ecuación diferencial de segundo grado orden con coeficientes constantes es:

$$m^2 + 9m + 20 = 0$$

Sus raíces son $m_1 = -4$ y $m_2 = -5$. Por lo tanto, las ecuaciones de desplazamiento y de velocidad son:

$$Y = C_1 e^{-4t} + C_2 e^{-5t}$$

$$V = -4C_1 e^{-4t} - 5C_2 e^{-5t}$$

Encontramos los valores de C_1 y C_2 mediante las condiciones iniciales; así:

Para $t = 0$ entonces $y = 2$ y también para $t = 0$ entonces $v = -12$:

$$2 = C_1 + C_2$$

$$v = -4C_1 - 5C_2$$

Luego $C_1 = -2$ y $C_2 = 4$. Por lo tanto:

$$y = -2e^{-4t} + 4e^{-5t}$$

$$v = 8e^{-4t} - 20e^{-5t}$$

a. Cuando la partícula pasa por el origen: $y = 0$. Entonces:

$$4e^{-5t} = 2e^{-4t}$$

Multiplicando por $\frac{1}{2}e^{5t}$ se tiene que $t = \ln 2 = 0.6931$ segundos.

b. El desplazamiento máximo negativo se dará cuando $v = 0$. Entonces:

$$8e^{-4t} = 20e^{-5t} \text{ es decir que } t = \ln 2.5$$

$$y = -2e^{-4\ln 2.5} + 4e^{-5\ln 2.5}$$

$$= -2(2.5)^{-4} + 4(2.5)^{-5}$$

$$= -(2.5)^{-5}$$

Luego $y = -0.01024$ m.

c. La máxima velocidad se tendrá para:

$$\frac{dv}{dy} = -32 e e^{-4t} + 100 e^{-5t} = 0$$

$$100 e^{-5t} = 32 e^{-4t}$$

De donde $t = \ln(25/8)$

$$\text{Por lo tanto, } v = 8 e^{-4 \ln(25/8)} - 20 e^{-5 \ln(25/8)} = 8 (25/8)^{-4} - 20 (25/8)^{-5} = 5(25/8)^{-5}$$

Es decir:

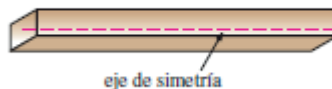
$$V = 0.01677 \text{ m/seg}$$

Otra aplicación importante de las ecuaciones de segundo orden se tiene para el fenómeno de la deflexión de una viga. Vamos a considerar vigas horizontales a aquellas que son uniformes en forma y material. El eje de simetría (línea punteada, figura 35) se llama **curva elástica** y su ecuación da información acerca de la flexión de la viga producida por su propio peso y por cargas externas.

En mecánica se demuestra que el momento de flexión de todas las fuerzas exteriores que actúan sobre la viga está dada por:

Figura 35. Gráfica de una viga horizontal.

$$m = \frac{EI}{r}$$



Fuente. Elaborada por el autor.

eje de simetría

Donde E es el módulo de elasticidad de Young que depende del material y del diseño de la viga, I es el momento de inercia de la sección transversal de la viga en x , tomado con respecto a una línea horizontal que pasa por el centro de gravedad de la sección. El producto EI se llama **rigidez a la flexión** y es una constante, r es el radio de curvatura de la curva elástica con ecuación, como ya vimos antes en el ejercicio 14:

Figura 36. Gráfica de una viga con flexión.

$$r = \frac{(1+(y')^2)^{3/2}}{|y''|}$$



Fuente. Elaborada por el autor.

Como y' en todos sus puntos es muy pequeña, entonces:

$$r = \frac{1}{y''}$$

De ahí que:

$$m = EI y''$$

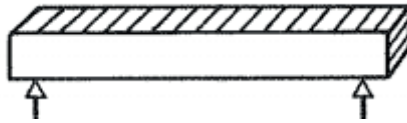
El momento m en la sección transversal es la suma algebraica de los momentos de las fuerzas exteriores. Suponemos que las fuerzas hacia arriba dan momentos positivos y las fuerzas hacia abajo dan momentos negativos, por lo que el eje y se toma positivo hacia arriba.

El desplazamiento y de la curva elástica desde el eje x se llama **flecha de la viga**.

Ejemplo 17. Viga simplemente apoyada:

Una viga uniforme, de longitud $l = 5$ m, apoyada como se muestra en la figura 37, se flexiona bajo su propio peso, que es $w = 2$ kg/m. Hallar la ecuación de la curva elástica.

Figura 37. Gráfica de una viga horizontal.

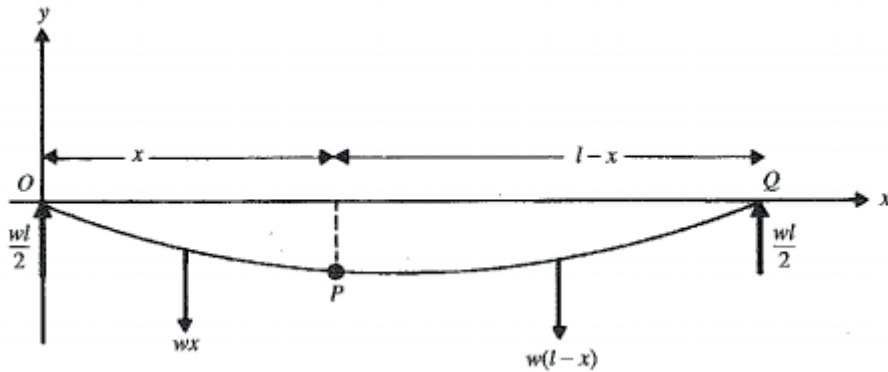


Fuente. Elaborada por el autor.

Solución:

Como la viga está simplemente apoyada, cada extremo soportará la mitad del peso de la viga: $w \cdot l/2 = 5$.

Figura 38. Diagrama de fuerzas para una viga.



Fuente. Elaborada por el autor. Tomando un punto P a una distancia x del origen. Veamos primero las fuerzas que actúan a la izquierda de P:

- Una fuerza hacia arriba igual a $w \cdot l/2$.
- Una fuerza hacia abajo $w \cdot x$ en el centro de OP; entonces, el momento total de flexión en P es:

$$M = (w \cdot l/2) x - w \cdot x (x/2) = \frac{wl}{2} x - \frac{w}{2} x^2$$

$$M = 5x - x^2$$

Para demostrar que el momento flector en P es independiente del segmento estudiado, vamos a ver qué pasa en PQ. Hay dos fuerzas:

- Una fuerza hacia arriba $w l/2$ a una distancia $l - x$ de P.
- Una fuerza hacia abajo $w (1-x)$ a una distancia $(l - x)/2$ de P.

Entonces:

$$M = (w l/2) (l - x) - w (l - x) (l - x)/2$$

$$M = (w l/2) x - (w/2) x^2$$

Sustituyendo el valor de M en la ecuación:

$$M = E I y''$$

Teniendo en cuenta que $y = 0$ cuando $x = l$, tenemos:

$$E I y'' = (w l/2) x - (w/2) x^2$$

Integrando:

$$E I y = (w l/12) x^3 - (w/24) x^4 + C_1 x + C_2$$

Para las condiciones dadas $C_2 = 0$ y $C_1 = -(wl^3)/24$.

Por lo tanto:

$$y = \frac{w}{24EI} (-x^4 + 2lx^3 - l^3x)$$

Y en particular, para este caso:

$$y = \frac{1}{12EI} (-x^4 + 10x^3 - 125x)$$

Ejemplo 18. Viga cantiléver. Apoyada en un extremo y libre en el otro:

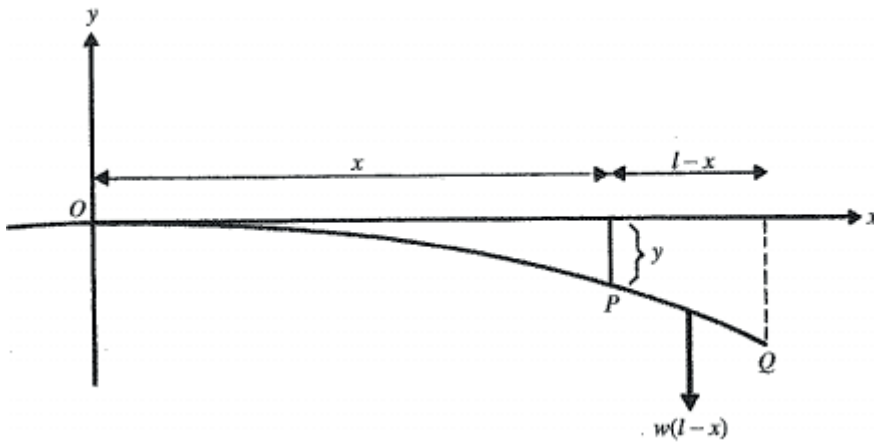
Una viga uniforme de longitud $l = 5$ m y con $w = 2$ kg/m tiene libre un extremo. Hallar la curva elástica y la flecha del extremo libre.

Solución:

Para calcular M , es más sencillo estudiar el segmento a la derecha de P , en el que actúa la fuerza $w(l-x)$:

$$M = -w(l-x)(l-x)/2 = (-w/2)(l-x)^2 = -(5-x)^2$$

Figura 39. Grafica de las fuerzas para una viga elástica.



Fuente. Elaborada por el autor.

Sustituyendo en la ecuación:

$$M = EI y''$$

Se tiene:

$$EI y'' = -w(l-x)^2/2$$

Con las siguientes condiciones iniciales: Cuando $x = 0$, $y = 0$, y la pendiente de la recta tangente $y' = 0$.

Integrando:

$$EI y' = \frac{w}{2} \cdot \frac{1}{3} (l-x)^3 + C_1$$

Para $x = 0$, $y = 0$, entonces, $C_1 = -\frac{w}{6} l^3$

Integrando de nuevo:

$$EI y = -\frac{w}{24} (l-x)^4 - \frac{w}{6} l^3 x + C_2$$

Para $x = 0$, $y = 0$, entonces, $C_2 = \frac{w}{24} l^4$, y:

$$EI y = -\frac{w}{24} (l-x)^4 - \frac{w}{6} l^3 x + \frac{w}{24} l^4$$

Luego:

$$y = \frac{w}{24EI} (-x^4 + 4lx^3 - 6l^2x^2)$$

La flecha será la deformación máxima que ocurre cuando $x = l$:

$$y_{max} = -\frac{W}{8IE} l^4$$

En particular, para este caso, la curva elástica es:

$$y = \frac{1}{12EI} (-x^4 + 20x^3 - 150x^2)$$

Y la flecha:

$$y_{max} = \frac{625}{4EI}$$

Ejemplo 19. Viga con soporte en ambos extremos:

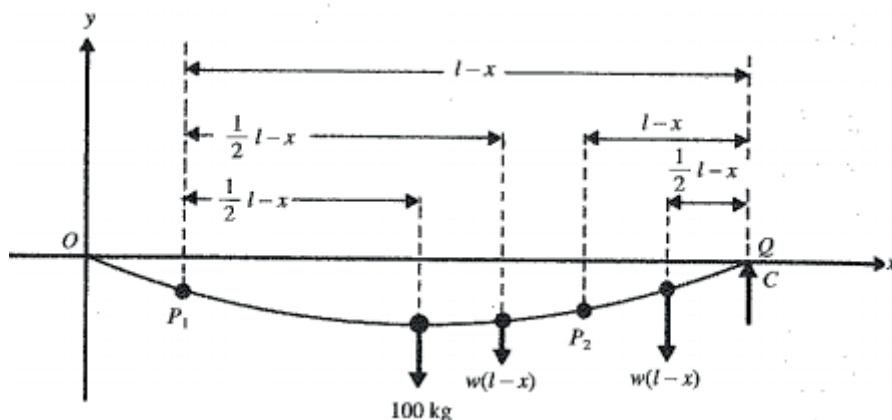
Una viga horizontal de 8 m de longitud está empotrada en un extremo y apoyada en el otro. Hallar:

- La ecuación de la curva elástica, si la viga tiene una carga uniforme de 4 kg/ m y soporta un peso de 100 kg en el punto medio.

b. El punto en el cual la flecha es máxima.

Solución:

Figura 40. Diagrama de fuerzas de una viga con soporte en ambos lados.



Fuente. Elaborado por el autor, considerando los dos intervalos $0 < x < l/2$, y $l/2 < x < l$, para P_1Q , P_2Q , respectivamente.

Las fuerzas que actúan en P_1Q son: C hacia arriba (desconocida) en Q situada a $(l-x)$ metros de P_1 ; la carga $w(l-x)$ kg en el punto medio de P_1Q situado a $(l-x)/2$ metros de P_1 y 100 kg a $(\frac{1}{2}l-x)$ metros de P_1 .

Luego:

$$EIy'' = C(l-x) - w(l-x)\frac{1}{2}(l-x) - 100\left(\frac{l}{2} - x\right)$$

O:

$$EIy'' = C(l-x) - \frac{w}{2}(l-x)^2 - 100\left(\frac{l}{2} - x\right)$$

Integrando:

$$EIy' = -\frac{1}{2}C(l-x)^2 + \frac{w}{6}(l-x)^3 + 50\left(\frac{1}{2}l - x\right)^2 + C_1$$

Para $x = 0$, $y' = 0$, tenemos:

$$EIy' = -\frac{1}{2}C(l-x)^2 + \frac{w}{6}(l-x)^3 + 50\left(\frac{1}{2}l - x\right)^2 + \frac{1}{2}Cl^2 - \frac{w}{6}l^3 - \frac{50}{4}l^2$$

Integrando de nuevo:

$$EI y = \frac{1}{6} C (l-x)^3 - \frac{w}{24} (l-x)^4 - \frac{50}{3} \left(\frac{1}{2} l - x\right)^3 + \left(\frac{1}{2} C l^2 - \frac{w}{6} l^3 - \frac{50}{4} l^2\right) x + C_2$$

Cuando $y(0) = 0$, entonces tenemos:

$$EI y = \frac{1}{6} C (l-x)^3 - \frac{w}{24} (l-x)^4 - \frac{50}{3} \left(\frac{1}{2} l - x\right)^3 + \left(\frac{1}{2} C l^2 - \frac{w}{6} l^3 - \frac{50}{4} l^2\right) x + \frac{w}{24} l^4 + \frac{50}{3} \left(\frac{1}{2} l\right)^3 - \frac{C}{6} l^3$$

Para los valores dados se tiene:

$$EI y = \frac{1}{6} C (8-x)^3 - \frac{1}{6} (8-x)^4 - \frac{50}{3} (4-x)^3 + \left(32C - \frac{1024}{3} - 800\right) x + \frac{2048}{3} + \frac{3200}{3} - \frac{C}{3} 256$$

Las fuerzas que actúan en P_2Q son C en Q a $(l-x)$ metros de P_2 , la carga w $(l-x)$ kg a $\frac{l}{2}(l-x)$ m de P_2 . Entonces:

$$EI y'' = C(l-x) - \frac{w}{2}(l-x)^2$$

Integrando:

$$EI y' = -\frac{C}{2}(l-x)^2 + \frac{w}{6}(l-x)^3 + C_1$$

Integrando de nuevo, se tiene:

$$EI y = \frac{C}{6}(l-x)^3 - \frac{w}{24}(l-x)^4 + C_1 x + C_2$$

Los valores de C_1 y C_2 deben coincidir con los obtenidos antes; por lo tanto,

$$EI y = \frac{C}{6}(l-x)^3 - \frac{w}{24}(l-x)^4 + C_1 x + C_2 \left(\frac{1}{2} C l^2 - \frac{w}{6} l^3 - \frac{50}{4} l^2\right) x + \frac{w}{24} l^4 + \frac{50}{3} \left(\frac{1}{2} l\right)^3 - \frac{C}{6} l^3$$

Para los valores dados:

$$EI y = \frac{1}{6} C (8-x)^3 - \frac{1}{6} (8-x)^4 + \left(32C - \frac{1024}{3} - 800\right) x + \frac{2048}{3} + \frac{3200}{3} - \frac{C}{3} 256$$

Si tomamos $x = l$ para $y = 0$, se tiene la fuerza para C :

$$0 = 0 = l \left(\frac{C}{2} l^2 - \frac{w}{6} l^3 - \frac{50}{4} l^2 \right) + l^3 \left(\frac{w}{24} l + \frac{50}{4} - \frac{C}{6} \right)$$

De donde:

$$C = \frac{3}{8}wl + \frac{125}{4} = \frac{174}{4}$$

Sustituyendo en la ecuación anterior de E l y, se tiene:

$$y = \frac{1}{24EI}(355x^3 - 218x^2 - 4x^4), 0 \leq x \leq l/2$$

Y:

$$y = \frac{1}{24EI}(25600 - 19200 + 2616x^2 - 45x^3 - 4x^4), l/2 \leq x \leq l$$

El valor de la y máxima de la flecha se presenta a la derecha del punto medio de la viga. Tomando $y' = 0$:

$$16x^3 + 135x^2 - 5232x + 19200 = 0$$

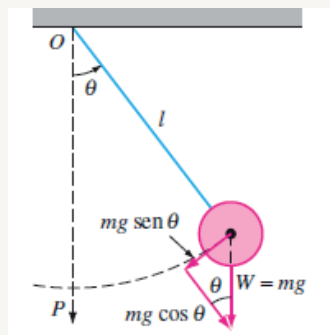
Este polinomio tiene una raíz real en $x = 4.45$, aproximadamente, e indica la distancia al origen a la que está situada la flecha máxima.

9.12 Ejercicio

9.12.1 Ejercicios sobre el péndulo

1. Ya se vio que, con algunas simplificaciones, se puede describir el movimiento del péndulo mediante la ecuación diferencial de segundo grado, como:

Figura 41. Gráfica del movimiento de un péndulo simple.



Fuente. Fuente. Zill (2008).

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \text{sen}\theta = 0$$

Donde:

l = Longitud del péndulo

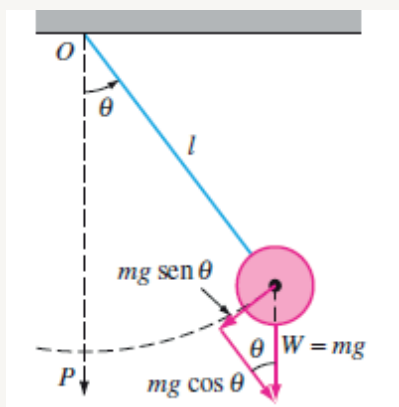
θ = ángulo subtendido entre el péndulo y la posición vertical en equilibrio

g = aceleración de la gravedad

Determine el ángulo θ después de que han transcurrido 20 segundos. Si el ángulo $\theta = \frac{\pi}{6}$ y $\theta' = 0$ en $t = 0$ segundos, y la longitud l es de 60 centímetros.

2. Un péndulo de $1/5$ m de longitud se suelta con una velocidad de $1/2$ radian/seg, desde un extremo situado a $1/10$ radianes respecto de la vertical hacia esta. Halle la ecuación del movimiento del péndulo.
-
3. Un péndulo simple consta de una masa m suspendida de una varilla de longitud l y masa despreciable. Suponiendo que el movimiento se realiza en un plano vertical, determine el ángulo de desplazamiento θ y el periodo de vibración.

Figura 42. Gráfica del movimiento de un péndulo simple.



Fuente. Fuente. Zill (2008).

Para los siguientes problemas suponga que la ecuación diferencial de un péndulo simple de longitud l es $l \frac{d^2\theta}{dt^2} + g\theta = 0$, donde $g = \frac{GM}{R^2}$ es la aceleración en la ubicación del péndulo (a una distancia R desde el centro de la tierra: M denota la masa de la tierra).

4. Dos péndulos de longitudes l_1 y l_2 , cuando están ubicados a distancias r_1 y r_2 , del centro de la tierra respectivamente, tienen periodos p_1 y p_2 . Demuestre que:

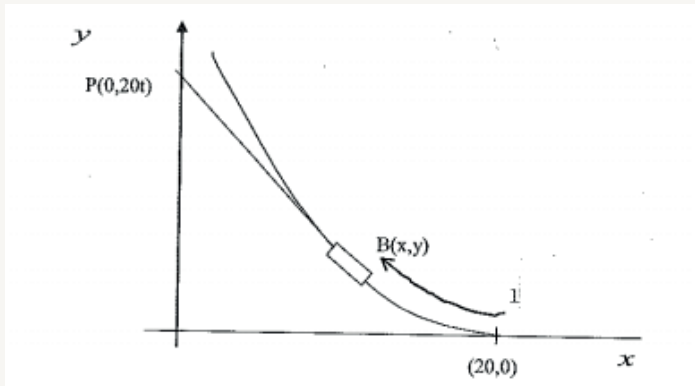
$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{r_1\sqrt{l_1}}{r_2\sqrt{l_2}}$$

5. Cierta péndulo mantiene el tiempo en París, donde el radio de la tierra es $R = 3956$ millas. Pero este péndulo se retrasa 2 minutos 40 segundos por día en una localidad en el Ecuador. Utilice el resultado del problema 4 para encontrar el valor del abultamiento de la tierra en el Ecuador.
-
6. Un péndulo de 100.10 pulgadas de longitud, situado a nivel del mar, en donde el radio de la tierra es $R = 3960$ millas, tiene el mismo periodo que un péndulo de 100 pulgadas de longitud situado en la cima de una montaña cercana. Utilice el resultado del problema 4 para determinar la altura de la montaña.
-

9.12.2 Modelos de persecución

7. Un hombre se encuentra en un bote en un muelle, cuando ve partir a su perro en el malecón, si el perro corre en la dirección positiva del eje y , y al mismo tiempo el hombre en el bote parte de la posición $(20,0)$ en persecución del perro, como lo muestra la figura 43, ¿qué trayectoria sigue el bote? El perro lleva una velocidad de 15 km/hora y el bote de 20 km/hora.

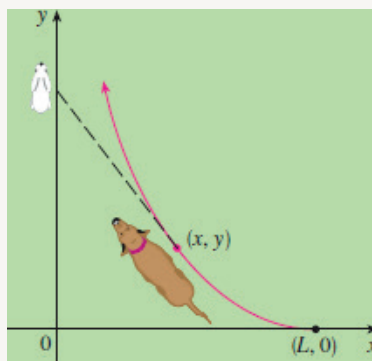
Figura 43. Gráfica del Modelo de persecución de un perro.



Fuente. Elaborada por el autor con el programa Derive.

8. Un perro ve a un conejo que corre en línea recta en un campo abierto y lo persigue. En un sistema de coordenadas, tal como se muestra en la figura 44, suponga:
- El conejo está en el origen y el perro en el punto $(L, 0)$, en el instante en que el perro ve al conejo por primera vez.
 - El conejo corre en la dirección positiva del eje y , y el perro corre siempre directamente hacia el conejo.
 - El perro corre con la misma rapidez que el conejo.

Figura 44. Gráfica de persecución de un perro a un conejo.



Fuente. Elaborada por el autor con el programa Derive.

- I) Demuestre que la trayectoria del perro es la función $y = f(x)$ donde y satisface la ecuación diferencial:

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

- II) Determine la solución de la ecuación diferencial del inciso i), que satisface las condiciones iniciales $y = y' = 0$, cuando $x = L$. (Sugerencia: sea $z = y'$ en la ecuación diferencial y resuelva la ecuación diferencial de primer grado para hallar z , después integre para hallar y).

- III) ¿Alguna vez el perro alcanza al conejo?
-

9. a. Suponga que el perro en el problema 8, corre dos veces más rápido que el conejo. Encuentre la ecuación diferencial para la trayectoria del perro. Después resuélvala para encontrar el punto en donde el perro alcanza al conejo.

b. ¿Suponga que el perro corre a la mitad de la rapidez del conejo, ¿qué tanto se acerca el perro al conejo? ¿cuáles son posiciones cuando más cerca está el perro del conejo?

9.12.3 Modelos geométricos

10. Halle la familia de curvas cuyo radio de curvatura es constante.

11. Halle la familia de curvas con la propiedad de que su radio de curvatura en cualquier punto es igual a la longitud de la normal en dicho punto y en su mismo sentido.

12. Lo mismo que en el ejercicio 9, pero en el sentido opuesto.

13. Halle la familia de curvas con la propiedad de que el radio de curvatura sea proporcional al cubo de la longitud de la normal.

14. Halle la familia de curvas para las cuales el radio de curvatura es dos veces mayor que la normal (considerar $|y''| = \pm y''$).

15. Encuentre el área bajo la curva $y = f(x)$ y sobre el eje x , sabiendo que esta curva es tangente al eje x en el origen y satisface la ecuación diferencial $y'' = \sec y'$.

16. Halle una curva que pase por el origen de coordenadas, de tal manera que el área del triángulo formado por la tangente a la curva en uno de sus puntos, la ordenada del mismo punto y el eje x , sea proporcional al área bajo dicha curva, acotada por el eje x y la ordenada de este punto.

17. Encuentre la curva cuyo radio de curvatura es proporcional a la pendiente de su tangente.

18. Halle el área bajo la curva $y = f(x)$ y sobre el eje x , sabiendo que esta curva es tangente a la recta $y = 4$ en $x = 0$ y satisface la ecuación diferencial:

$$y'' = \frac{y'}{\sqrt{4-y}}$$

19. Halle la longitud de la curva $y = f(x)$, desde $x = 0$ hasta $x = 1$, sabiendo que pasa por el punto $(0, 1)$ y que $y'' = \frac{(e^x + e^{-x})}{2}$.

9.13.4 Modelos de movimiento

20. El movimiento de una partícula que se mueve sobre el eje x se rige por la ecuación:

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 5 \frac{dy}{dt} + 4y = 0$$

Si la partícula se encuentra inicialmente ubicada 10 m a la derecha del origen y se sabe que en el tiempo $t = 0$ se dispara a la izquierda con una velocidad de $v = 10$ m/seg, obtenga:

- El tiempo en que la partícula llega el origen.
 - El máximo desplazamiento logrado por la partícula.
-

21. El movimiento de una partícula que se mueve sobre el eje x se rige por la ecuación:

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 4 \frac{dy}{dt} + 3y = 0$$

Si la partícula se encuentra inicialmente ubicada 10 m a la derecha del origen y se sabe que en el tiempo $t = 0$ se dispara a la izquierda con una velocidad $v = 5$ m/seg, obtenga:

- El tiempo en que la partícula llega al origen.
 - El máximo desplazamiento logrado por la partícula.
 - El tiempo en que la partícula se detiene.
-

22. Halle el tiempo necesario para que un cuerpo caiga a la Tierra desde la altura de 400.000 km. Se tiene conocimiento

de que la altura se mide desde el centro de la Tierra y que el radio de ésta es de 6400 km., aproximadamente.

23. Una partícula se mueve a lo largo del eje x de acuerdo con la ley:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 13y = 0$$

Si esa partícula empieza su movimiento en $x = 0$, con una velocidad inicial de 6 m/seg hacia la izquierda, hallar:

- a. Y en función de t .
 - b. Los tiempos en que se producen las paradas.
24. Una partícula de masa m se mueve por el eje x , con una velocidad de repulsión que es inversamente proporcional al cubo de la distancia desde el punto x_0 al origen. Determine la ley de movimiento.
-

25. Un cuerpo de masa m cae desde cierta altura con una velocidad v . Durante la caída, el cuerpo experimenta una resistencia que es proporcional al cuadrado de la velocidad. Halle la ecuación del movimiento.
-

26. Si en el problema 22, $m = 4$ kg, $g = 9.8$ m/seg², $k = 3.673$, halle:
- a. La velocidad al cabo de dos segundos.
 - b. El tiempo necesario para caer a una distancia de 8 metros.
-

27. Un hombre y su barca pesan 98 kg. La fuerza ejercida en la dirección del movimiento es 4.9 kg y la resistencia al movimiento es igual al doble de la velocidad. Determine:

- a. La velocidad 20 segundos después de que la barca haya empezado a moverse.
 - b. La distancia recorrida al cabo de esos 20 segundos.
-

9.13.5 Flexión de una viga

28. Una viga horizontal de 9 m de longitud está empotrada en ambos extremos. Halle la ecuación de su curva elástica y su máxima deformación vertical cuando tiene una carga uniformemente distribuida de 1 kg por metro.
-
29. Una viga horizontal simplemente apoyada tiene una longitud de 10 m y un peso despreciable, pero sufre una carga concentrada de 40 kg que está a una distancia de 2 m del extremo izquierdo (origen). Halle la ecuación de la curva elástica.
-
30. Una viga horizontal de 12 m de longitud está empotrada en ambos extremos. Si tiene una carga uniformemente distribuida de 3 kg/m, halle la ecuación de la curva elástica y la flecha máxima.
-
31. Resuelva el problema 28 si además actúa un peso de 20 kg en el punto medio de la viga.
-
32. Una viga sujeta en un extremo y libre en el otro tiene 6 m de longitud y varias cargas: una carga uniformemente repartida de 2 kg/m y dos cargas de 10 kg aplicadas cada una en los puntos que distan 2 y 4 metros del extremo fijo. Halle la ecuación de la curva elástica y la flecha máxima.
-

CAPÍTULO 10.

RELACIÓN ENTRE SISTEMAS DE PRIMER ORDEN Y ECUACIONES DE SEGUNDO ORDEN

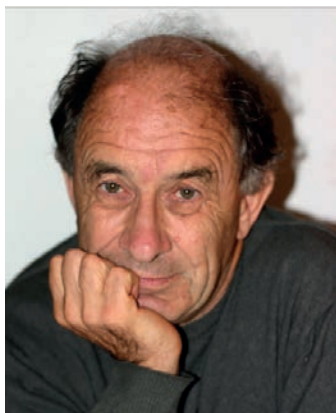
Competencias

1. Identificar cómo se puede expresar una ecuación lineal de segundo orden como un sistema de ecuaciones lineales y viceversa.
2. Reconocer y clasificar puntos fijos de un sistema de ecuaciones lineales.
3. Modelar problemas de la vida real como un sistema de ecuaciones lineales.

Contenido

10.1 Algunos ejemplos de modelos por medio de sistemas de ecuaciones	126
10.2 Ejercicios	148
10.3 Cómo se relacionan los sistemas lineales de primer orden, las ecuaciones diferenciales de segundo orden y el método de Euler para aproximación de soluciones	152
10.4 Comentarios acerca del hallazgo de soluciones y la clasificación de un sistema	155
10.5 Sistemas lineales homogéneos con coeficientes constantes	165
10.6 Tipos de gráficas y método de Euler	169
10.7 Ejercicios	182
10.8 Solución de sistemas lineales usando vectores y valores propios reales de la matriz	192
10.9 Ejercicios	214
10.10 Sistemas lineales con valores propios en los números complejos	222
10.11 Ejercicios	241
10.12 Estabilidad y clasificación de sistemas lineales	250
10.13 Ejercicios	272
10.14 Sistemas lineales de ecuaciones diferenciales desacoplados	277
10.15 Ejercicios	287
10.16 Matriz exponencial	290
10.17 Ejercicios	304
10.18 Sistemas lineales no homogéneos	307
10.19 Ejercicios	320
10.20 Sistemas no lineales de ecuaciones diferenciales	324
10.21 Ejercicios	339
10.22 Linealización	347
10.23 Ejercicios	367
10.24 Problemas de aplicación de sistemas lineales homogéneos y no homogéneos y sistemas no lineales	371
10.25 Ejercicios	409
10.26 Cantidades que se conservan	421
10.27 Ejercicios	429
10.28 Mecánica no lineal	432
10.29 Ejercicios	467
10.30 El método de Lyapunov sobre la estabilidad de los sistemas de ecuaciones	476
10.31 Ejercicios	486

Figura 1. Vladímir Ígorevich Arnold (1937-2010).



Fuente. Enciclopedia Británica. (Biblioteca virtual Universidad EAN).

Arnold nace el 12 de junio de 1937 en Odesa, Ucrania, y muere el 3 de junio de 2010 en París. Fue uno de los matemáticos más prolíficos del mundo.

Estudió en la Facultad de Matemáticas y Mecánica de la Universidad de Moscú en 1954, donde permaneció hasta 1986, año en que ingresó en el Instituto Matemático Steklov de Moscú. En marzo de 1968 firmó, junto con otros 98 colegas, la Carta de los 99, un documento de protesta por «el encarcelamiento en un manicomio de un matemático soviético perfectamente cuerdo», Aleksandr Esenin-Volpin, hijo de Serguéi Yesenin y víctima de la psiquiatría represiva en la Unión Soviética. Esto trajo como consecuencia la denegación de permiso para viajar al extranjero hasta la perestroika.

Aunque es más conocido por el teorema de Kolmogórov-Arnold-Moser respecto a la estabilidad de los sistemas hamiltonianos integrables, ha hecho importantes contribuciones en varias áreas que incluyen teoría de sistemas dinámicos, teoría de las catástrofes, topología, geometría algebraica, mecánica clásica y teoría de la singularidad en una carrera que abarca más de 45 años después de su primer resultado principal: la solución del problema trece de Hilbert en 1957.

Introducción

En este capítulo 10, ampliaremos las técnicas que se han desarrollado para el estudio de las ecuaciones diferenciales de primer orden a más de una ecuación de primer orden, es decir, para sistemas de ecuaciones de primer orden. Los teoremas de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales lineales de primer orden, también son válidos para los sistemas de ecuaciones lineales, de igual manera los métodos numéricos previos se pueden extender fácilmente para obtener soluciones numéricas de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.

Muchas situaciones y problemas de la vida real pueden ser descritas mediante sistemas de ecuaciones lineales de primer orden. Veremos también que son importantes debido a la relación que ellas tienen con las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden o de orden superior. Esta relación es útil para verificar teoremas de existencia y unicidad, así como soluciones numéricas de ecuaciones diferenciales de segundo orden.

Recordemos que las ecuaciones diferenciales de segundo orden son importantes, ya que primero se utilizan para describir sistemas como masa resorte, péndulos simples y circuitos eléctricos simples, lo que conduce a la importante noción del movimiento subamortiguado, críticamente amortiguado y sobreamortiguado. En segundo lugar, podemos obtener una solución explícita de una clase especial: lineal con coeficientes constantes.

El poder pasar de un sistema de ecuaciones lineales con coeficientes constantes a las ecuaciones de segundo orden o de grado superior y viceversa, nos permite aprovechar la potencia de cada uno

para la resolución de problemas. Así por ejemplo, veremos que la introducción de un plano de fase, permite trasladar muchas de nuestras técnicas gráficas de los capítulos anteriores.

Luego la idea de este capítulo es ampliar lo visto en los capítulos anteriores de las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden, de segundo orden y de grado superior con sistemas de ecuaciones lineales.

10.1 Algunos ejemplos de modelos por medio de sistemas de ecuaciones

Ejemplo 1. La relación entre María y Pedro:

Una situación de la vida cotidiana es la atracción mutua que se puede dar entre dos personas, para representar esta situación se requiere ya no de una ecuación lineal sino de dos ecuaciones lineales, veamos:

Consideremos la situación de María y su amigo Pedro, supongamos que el afecto que María siente por su amigo Pedro aumenta en la medida en que este es correspondido, sin embargo, el aumento del afecto de Pedro por María, se da cuando no es correspondido por María. Se pide modelar esta situación.

Solución:

Si $x(t)$ representa la cantidad de afecto que María siente por Pedro en el tiempo t , $y(t)$ la de Pedro por María en el mismo tiempo, entonces de acuerdo a nuestro supuesto se tiene que:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= a \cdot y \\ \frac{dy}{dt} &= -bx\end{aligned}$$

Donde a y b son las constantes positivas de proporcionalidad, representa un modelo consistente para esta situación. Los valores positivos del afecto representan el grado de aumento de este, del uno por el otro, mientras que los valores negativos representan la disminución de este.

Podemos analizar su tormentosa relación, para el caso $a = 1$ y $b = 2$, es decir, el sistema:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 1 \cdot y \quad (1) \\ \frac{dy}{dt} &= -2x\end{aligned}$$

Este es el sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas; como en cada ecuación en el lado derecho solo depende de una sola variable, este sistema se llama un **sistema desacoplado de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden**, en el cual la solución depende de x , y , y como funciones del tiempo t . Sin embargo, no tenemos forma de resolver este sistema (1). También tenemos una variable más de lo habitual cuando vayamos a trazar el campo de pendientes. Pero como x y y son funciones del tiempo, podríamos resolver para t , en término de una de las variables dependientes, por ejemplo x , y sustituir el resultado en la expresión para y . Esto eliminaría la variable t y daría una ecuación que relaciona x con y . En tales situaciones, la gráfica de y en términos de x se llama **órbita**, y el plano x - y se denomina **plano de fase** asociado al sistema (1). Procederemos a analizar el sistema (1) a la luz de lo dicho hasta este momento.

Ya que en el lado derecho de cada miembro del sistema (1) no implica explícitamente la variable t , podemos combinar estas dos ecuaciones en una. Si tratamos a y como una función de x y a x como una función de t , y hacemos uso de la regla de la cadena, tenemos que:

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{dt}\right)\left(\frac{dt}{dx}\right) = \frac{\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\frac{dx}{dt}} = -\frac{y}{2x}$$

O:

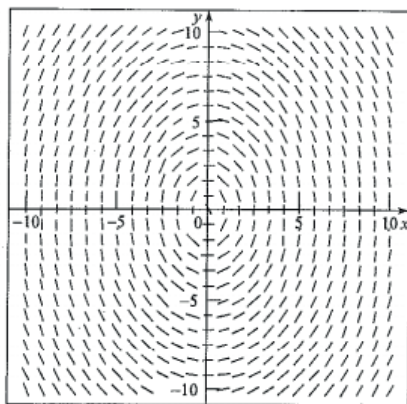
$$\frac{dy}{dx} = -2\frac{y}{x} \quad (2)$$

que es una ecuación diferencial lineal de variables separables.

Observemos que el campo de pendientes para (2) tiene pendientes positivas en el segundo y cuarto cuadrantes, y pendientes negativas en el primero y tercer cuadrante. El campo de pendientes para (2) se muestra en la figura 2.

Aunque no conocemos la dependencia explícita en el tiempo de x y y , podemos ver qué ocurre a medida que transcurre el tiempo examinando el sistema (1). Por ejemplo, en el primer cuadrante, donde x y y son positivas, x será una función creciente de t , mientras que y será una función decreciente. Esto significa que el tiempo, como un parámetro, avanza en el sentido de las manecillas del reloj en el primer cuadrante.

Figura 2. Campo de pendientes del sistema dado.



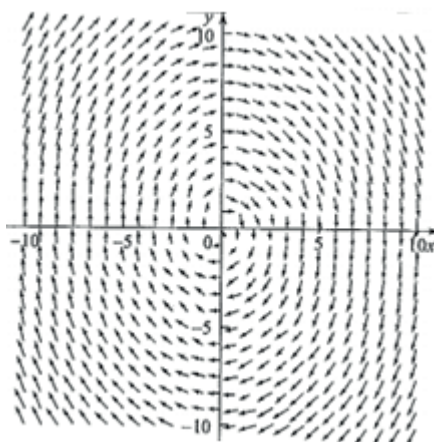
Fuente. Elaborada por el autor con el programa Geogebra.

Analizamos los otros tres cuadrantes de manera semejante y hallamos esta rotación en el sentido de las manecillas del reloj alrededor del origen persiste.

Podríamos indicar esto sobre el campo de pendientes agregando flechas a las pendientes para indicar la dirección que siguen las órbitas

a medida que transcurre el tiempo, creando un campo de vectores¹. Un campo de pendientes de esta naturaleza se conoce como campo de dirección y se ilustra en la figura 3, donde las flechas indican la dirección del recorrido. La longitud de cada vector se ha reducido a escala, de modo que los vectores con pequeños valores de (x', y') son cortos, y aquellos con valores grandes son largos.

Figura 3. Campo de direcciones del sistema anterior.



Fuente. Elaborada por el autor con el programa Geogebra.

Las formas de las órbitas en el plano de fase se pueden obtener al resolver la ecuación diferencial separable en (2), y hallamos que:

$$y^2 + 2x^2 = C \quad (3)$$

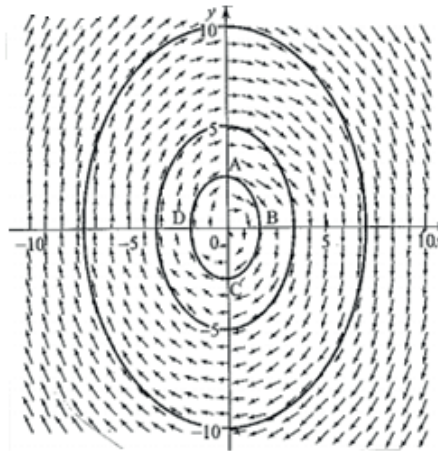
Donde C es una constante de integración. De este modo, las órbitas son elipses.

Si graficamos tres de estas órbitas en el mismo plano, las que pasan por los puntos $(0, 0.25)$, $(0, 5)$ y $(0, 10)$ en la figura 3, llegamos a la figura 4. El tiempo como un parámetro, se mueve alrededor de

¹ De hecho, en la mayoría de los casos, dibujar las flechas en toda su longitud es gráficamente desagradable. Una mejor manera es mostrar todas las flechas con una longitud proporcional a la longitud real.

la elipse en el sentido de las manecillas del reloj, lo cual nos permite seguir la historia de esta relación a medida que transcurre el tiempo a partir de un punto de comienzo fijo.

Figura 4. Campo de direcciones con tres curvas de flujo.



Fuente. Elaborada por el autor con el programa Geogebra.

Por ejemplo, consideremos la órbita interna en la figura 4. Comenzamos en el punto A (donde Pedro tiene el máximo afecto por María, y ella no siente afecto alguno por Pedro), avanzando en el sentido de las manecillas del reloj hacia el punto B (donde Pedro no siente afecto por María y María siente el máximo afecto por Pedro), luego hacia C (donde Pedro siente algo de afecto por María y María no siente nada por Pedro), posteriormente hacia D (donde Pedro no siente nada de afecto por María y María siente un afecto mínimo por Pedro) y finalmente regresa a A, donde el ciclo de los afectos se repite sin límites.

Al ir de A hacia B, tanto x como y son positivas, de modo que María y Pedro se gustan. A medida que x aumenta, y disminuye, de modo que a medida que María (x) llega a enamorarse más de Pedro (y), el cariño de Pedro por María disminuye.

Al ir de B hacia C, x es positiva, y y es negativa, de modo que María siente cariño por Pedro, pero este cariño no es correspondido. A medida que x disminuye, y también disminuye de modo que María llega a decepcionarse más de Pedro, el cariño de Pedro por María aumenta.

Al ir de C hacia D, tanto x como y son negativas, de modo que María y Pedro no se gustan. A medida que x disminuye, y aumenta, de modo que a medida que María se llega a decepcionar de Pedro, el cariño de Pedro por María aumenta.

Finalmente, al ir de D hacia A, x es negativa, pero y es positiva, de manera que a María no le gusta Pedro, mientras que a Pedro le gusta María. A medida que x aumenta y y aumenta, de modo que mientras más se enamora María de Pedro, el cariño de éste por María aumenta cada vez más.

También podemos determinar a partir de la figura 4 que no hay un tiempo en que ambos estén extasiados de verse. Eso ocurriría si cada uno de ellos experimenta un máximo de cariño por el otro al mismo tiempo. Y esto no ocurre.

El análisis anterior proporciona una buena explicación de los sentimientos de afecto que sienten María y Pedro, pero no ofrece información acerca de la dependencia del tiempo. Por ejemplo, a medida que transcurre el tiempo, ¿pasan el mismo tiempo en cada cuadrante (lo que significaría que ellos simultáneamente se gustan únicamente una cuarta parte del tiempo, el tiempo que pasan ambos en el primer cuadrante), o pasan más tiempo en el primer cuadrante que en todos los otros combinados (lo que significaría que ellos simultáneamente se gustan aproximadamente durante la mitad del tiempo)? Las respuestas a estas preguntas requieren un análisis en el que el tiempo se encuentra explícitamente involucrado, de modo que procederemos a determinar el comportamiento temporal de x y, de y ,

es decir, la dependencia explícita de x y y , de y respecto a t . Esto no se puede determinar a partir de (2). Para determinar el comportamiento temporal regresaremos a las ecuaciones (1). Si resolvemos la primera ecuación en (1) para y , en donde $y = x'$, y sustituimos esta expresión en la segunda ecuación, obtenemos $y' = x'' = -2x$, o:

$$x'' + 2x = 0 \quad (4)$$

Esta es una ecuación diferencial lineal de segundo orden. Ya sabemos que es de segundo orden porque contiene la segunda derivada como su derivada de mayor orden. Es lineal debido a que es una combinación lineal de x'' , x' y x , con coeficientes 1, 0 y 2, respectivamente.

En el capítulo 6 vimos cómo resolver esta ecuación diferencial lineal homogénea de orden dos, luego aplicando dicho método tenemos que la solución es:

$$x(t) = C_1 \cos \sqrt{2} t + C_2 \operatorname{sen} \sqrt{2} t \quad (5)$$

Donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias (es fácil verificar que (4) satisface la ecuación diferencial anterior). Si sustituimos la ecuación (4) en la primera ecuación del sistema (1) encontramos que:

$$y(t) = \sqrt{2}(-C_1 \operatorname{sen} \sqrt{2} t + C_2 \cos \sqrt{2} t)$$

Proporciona el resto de la solución del sistema original (1).

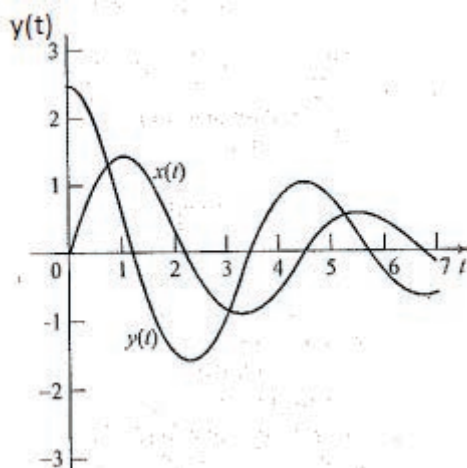
Si empezamos a contar el tiempo cuando y se siente sumamente atraído hacia x y x tiene sentimientos neutrales hacia y , podemos imponer las condiciones iniciales $x(0) = 0$. $Y(0) = 2.5$. Esto requiere que $C_1 = 0$ y $C_2 = 2.5/\sqrt{2}$, así que para este caso nuestra solución es:

$$X(t) = \frac{2.5}{\sqrt{2}} \operatorname{sen}(\sqrt{2}t) \quad (6)$$

$$Y(t) = 2.5 \cos(\sqrt{2}t) \quad (7)$$

Es evidente de (6) y (7) que, debido a $\frac{2.5}{\sqrt{2}} < 2.5$, la amplitud del cariño de María es menor que la del cariño de Pedro. De modo que Pedro tendrá mayor cambio de humor.

Figura 5. Gráfica de dos soluciones del sistema dado.



Fuente. Elaborada por el autor con el programa Geogebra.

La figura 4 proporciona las gráficas de las soluciones de (6) y (7), las cuales demuestran que y tiene el cambio de humor más pronunciado. Podemos ver que entre $t = 0$ y $t = t_1$, x y y tienen afecto entre sí, aunque y comienza a disminuir su atracción hacia x , mientras x tiene más atracción hacia y . Esto corresponde al primer cuadrante en la figura (3). De $t = t_1$ hasta $t = t_2$, x tiene afecto para y , pero este afecto no es correspondido. De hecho, la menor atracción que y tiene para x ocurre justamente a medida que x es neutral hacia y , es decir, cuando $x = 0$ para $t = t_2$. En esta etapa y siente más atracción hacia x , pero x siente cada vez menos atracción hacia y . Esto corresponde al segundo cuadrante en la figura 4. Entre $t = t_2$ y $t = t_3$, tanto x como y no se gustan. Esto corresponde al tercer cuadrante en la figura 4. El siguiente intervalo de tiempo, cuando x como y son ambos entre $t = t_4$ y $t = t_5$, cuando ambos sienten atracción entre si nuevamente. El ciclo emocional $t = 0$ hasta $t = t_4$ se repite indefinidamente. Debido a

que $t_1 = t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = t_4 - t_3$, se pasa el mismo tiempo y de este modo solamente para una cuarta parte del tiempo, mientras se encuentran en el primer cuadrante de la figura 4, María y Pedro se gustarán de manera simultánea.

Obsérvese que de (1), las condiciones iniciales $x(0) = 0$, $y(0) = 2.5$, podrían expresarse por completo en términos de x a medida que $x(0) = 0$, y $x'(0) = 2.5$. De esta manera, podríamos haber resuelto este problema considerando (4) restringida por las condiciones iniciales $x(0) = 0$, $x'(0) = 2.5$. Estas condiciones iniciales podrían utilizarse entonces en (4) para hallar (6).

Ejemplo2. La relación entre María y Pedro con intromisión paterna:

Supongamos ahora que la ecuación que describe los sentimientos de María es de la forma:

$$\frac{dx}{dt} = ay - cx$$

Donde c es una constante positiva.

En la primera ecuación vemos que el afecto para Pedro es disminuido por un término proporcional a su afecto. ¿Qué podría significar esto? Bien, si sus padres tuvieran la preocupación de que ella llegara a enamorarse de tal manera de Pedro que dejara su hogar, entonces cuando más afecto sienta ella por Pedro, más presión ejercerán sus padres para separarlos.

Supongamos que la ecuación diferencial que describe los sentimientos de Pedro permanece igual, de modo que se tiene el sistema lineal:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ay - cx \\ \frac{dy}{dt} &= -bx\end{aligned}$$

Este tipo de sistema es llamado un sistema lineal semi-desacoplado.

Analizar el caso especial cuando $a = 1$, $b = 2$, $c = 0.4$, de tal forma que nuestro sistema se convierte en:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y - 0.4x \\ \frac{dy}{dt} &= -2x\end{aligned}\quad (8)$$

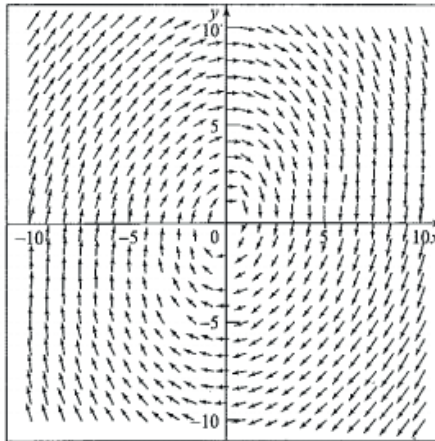
Solución:

Combinando estas ecuaciones, tal como lo hicimos en el ejemplo 1 para obtener (2) a partir de (1), encontramos para el plano de fase de este caso:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{y-0.4x} \quad (9)$$

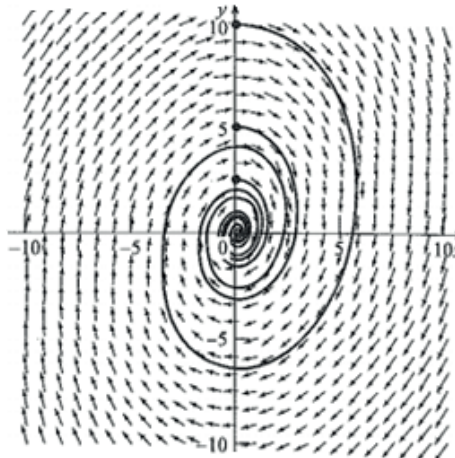
El campo de direcciones para (9) se ilustra en la figura 6 (como consecuencia de que $dy/dt = -2x$, es decir que dy/dt es negativo en el primer cuadrante, de modo que la dirección del recorrido tendrá el sentido de las manecillas del reloj, como se indica por la dirección de las flechas). Observe que las tangentes horizontales solo se presentan a lo largo del eje vertical, mientras que las isóclinas para las tangentes verticales están dadas por la recta $y = 0.4x$. La pendiente es positiva a lo largo del eje x , de modo que esto sugiere que todas las curvas solución se moverán en espiral hacia el origen. Esto es aún más claro en la figura 6, donde se han trazado soluciones numéricas para tres diferentes condiciones iniciales, a saber, $x_0 = 0$, $y_0 = 2.5$; $x_0 = 0$, $y_0 = 5$; $x_0 = 0$, $y_0 = 10$. Esto sugiere que todas las curvas solución finalmente terminan en el origen $x = 0$, $y = 0$, lo que significa que con el tiempo Pedro y María ya no sentirán cariño el uno por el otro.

Figura 6. Gráfica del campo de pendientes en forma de espirales hacia el origen.



Fuente. Elaborada por el autor con el programa Geogebra.

Figura 7. Gráfica de dos curvas solución en forma de espiral.



Fuente. Elaborada por el autor con el programa Derive.

Otra manera de ver el efecto de $-0.4x$ consiste en contrastar los campos de direcciones y órbitas en la figura 3 y 4 con las correspondientes figuras 6 y 7.

La ecuación (9) es una ecuación diferencial con coeficientes homogéneos, que pueden resolverse mediante un cambio de variable dependiente. Si hacemos esto, obtenemos las ecuaciones para las órbitas dibujadas en la figura 7.

También podemos encontrar las soluciones para x y y como funciones del tiempo, es decir $x(t)$ y $y(t)$, sustituyendo la primera ecuación diferencial de (8) $y' = x' + 0.4x$, en la segunda, $y'' = -2x$, para obtener:

$$x'' + 0.4x' + 2x = 0 \quad (10)$$

Esta es otra ecuación diferencial lineal de segundo orden. Y en el capítulo anterior ya vimos cómo se puede resolver dicha ecuación, cuya solución es:

$$x(t) = e^{-0.2t} (C_1 \cos(1.4t) + C_2 \sen(1.4t)) \quad (11)$$

Donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias. Si sustituimos esta expresión para $x(t)$ en la primera ecuación de (8), $y' = x' + 0.4x$, encontramos que:

$$y(t) = e^{-0.2t} \left((0.2C_1 + 1.4C_2) \cos(1.4t) + (-1.4C_1 + 0.2C_2) \sen(1.4t) \right) \quad (12)$$

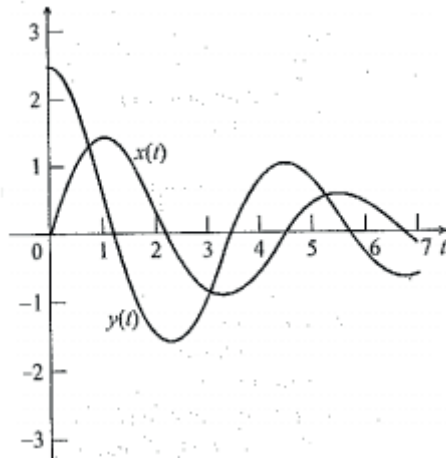
A partir de (11) y (12), vemos que a medida que $t \rightarrow \infty$, tanto x como y tienden a cero. Esto confirma la sugerencia inicial del análisis del plano de fase, en la que todas las curvas solución finalmente terminan en el origen. Es decir que con el tiempo, ni Pedro ni María sentirán cariño mutuo. Si se utilizan las mismas condiciones iniciales para (11) y (12) que las de (6) y (7), es decir $x(0) = 0$, $y(0) = 2.5$, se tiene que:

$$x(t) = \frac{2.5}{14} e^{-0.2t} \sen(1.4t) \quad (13)$$

$$y(t) = 2.5 e^{-0.2t} \left(\cos 1.4t + \frac{1}{7} \sen 1.4t \right) \quad (14)$$

La figura 8 ilustra a (13) y (14), debido a que ambas amplitudes disminuyen con el tiempo, María y Pedro sienten menos atracción entre sí, hasta que su afecto finalmente se extingue. La comparación de las figuras 5 y 8 muestra el impacto del parámetro de la intromisión paterna $c = 0.4$.

Figura 8. Gráfica de las ecuaciones (13) y (14).

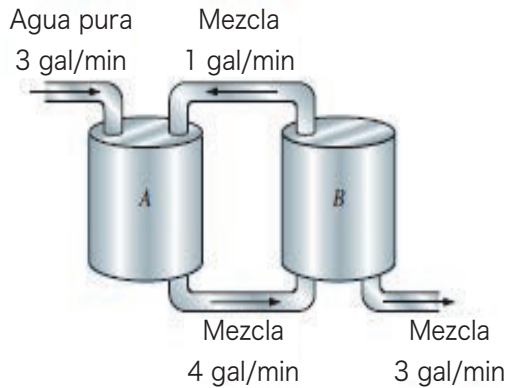


Fuente. Elaborada por el autor con el programa Geogebra.

Ejemplo 3. Problemas de mezcla:

Consideremos dos tanques como se muestran en la figura 9. Suponga que el tanque A contiene 50 galones de agua en los que hay disueltas 25 libras de sal. Suponga que el tanque B contiene 50 galones de agua. A los tanques entra y sale líquido como se indica en la figura: se supone que tanto la mezcla intercambiada entre los dos tanques como el líquido bombeado hacia afuera del tanque B están bien mezclados. Construir un modelo matemático que describa la cantidad de libras $y_1(t)$ y $y_2(t)$ de sal en los tanques A y B respectivamente en el tiempo t .

Figura 9. Gráfica de dos tanques de mezcla.



Fuente. Elaborada por el autor.

Solución:

Con un análisis similar al que se hace cuando se tiene un problema de mezclas, vemos que la razón de cambio neta de $y_1(t)$ para el tanque A es:

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dt} &= (\text{Razón de entrada de la sal}) - (\text{Razón de salida de la sal}) \\ \frac{dy_1}{dt} &= (13 \text{ gal/min}) \cdot (0 \text{ lb/gal}) + (1 \text{ gal/min}) \cdot \left(\frac{y_2}{50} \text{ lb/gal}\right) - (4 \text{ gal/min}) \cdot \left(\frac{y_1}{50} \text{ lb/gal}\right) \\ &= \left(-\frac{2}{25}y_1 + \frac{1}{50}y_2\right)\end{aligned}$$

De manera similar, para el tanque B la razón de cambio neta de $y_2(t)$ es:

$$\begin{aligned}\frac{dy_2}{dt} &= 4 \cdot \frac{y_1}{50} - 3 \cdot \frac{y_2}{50} - 1 \cdot \frac{y_2}{50} \\ &= \frac{2}{25}y_1 - \frac{2}{25}y_2\end{aligned}$$

Así se obtiene el sistema lineal:

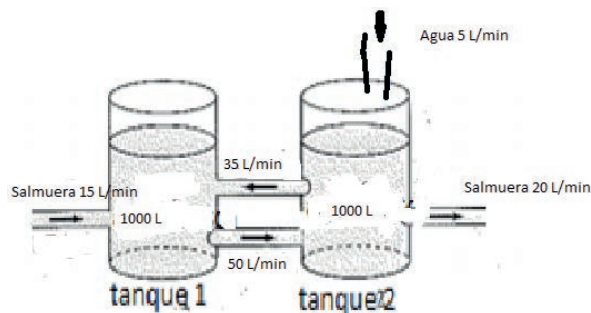
$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dt} &= -\frac{2}{25}y_1 + \frac{1}{50}y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} &= \frac{2}{25}y_1 - \frac{2}{25}y_2\end{aligned}\quad (15)$$

Este sistema va acompañado de las condiciones iniciales $y_1(0) = 25$, y $y_2(0) = 0$. Este es un ejemplo de un sistema totalmente acoplado, que analizaremos más adelante.

Ejemplo 4. Mezcla de volumen constante o modelo compartimental:

Consideremos el problema de mezcla para dos tanques dados por la figura 10. En este caso, se desea determinar el sistema de ecuaciones diferenciales que describen la cantidad de sal en cada tanque bien mezclado. Los dos tanques contienen salmuera, cada uno de ellos contiene 1.000 litros de salmuera, conectados como se muestran en la figura 10. En cualquier tiempo t , el primer tanque y el segundo tanque contienen $y_1(t)$ y $y_2(t)$ Kg de sal, respectivamente. La concentración de salmuera en cada tanque se mantiene uniforme mediante una agitación continua. Al primer tanque entra salmuera que contiene 0.1 Kg de sal por litro, a razón de 15 litros/min, y al segundo tanque entra agua a razón de 5 litros/min. La salmuera se bombea del primer tanque al segundo a razón de 50 litros/min, y del segundo tanque al primero a razón de 35 litros/min. La salmuera se descarga del segundo tanque a razón de 20 litros/min. Obtenga las ecuaciones diferenciales, en términos de t , $y_1(t)$ y $y_2(t)$ que modelan el contenido de sal en cada tanque en función del tiempo.

Figura 10. Gráfica de dos tanques de mezcla para el problemas dado.



Fuente. Elaborada por el autor.

Solución:

Suponemos que el volumen del líquido no cambia al disolverse la sal. También observamos que el volumen total de salmuera en cada tanque permanece constante en 1.000 litros, ya que los caudales de entrada y salida para cada tanque son iguales. Por lo tanto, cada litro de salmuera en el primer tanque contiene $x/1000$ kg de sal, y la sal sale del primer tanque a razón de $50(x/1000)$ Kg/min. Si se considera que cada litro de salmuera en el segundo tanque contiene $y/1000$ kg de sal, la velocidad con la que la sal sale del segundo tanque y entra al primero es de $35(y/1000)$ Kg/min. Además, entra nueva sal al primer tanque a razón de 1.5 kg/min, ya que cada litro de la nueva salmuera contiene 0l.1 kg de sal. Es posible dar un argumento similar para el segundo tanque. Entonces las tasas de cambio del contenido de sal en cada tanque (en kg/min) pueden expresarse como:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 1.5 - 50\frac{x}{1000} + 35\frac{y}{1000} \\ \frac{dy}{dt} &= 0 - 50\frac{yd}{1000} + 55\frac{y}{1000}\end{aligned}\quad (16)$$

Este es un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden en dos incógnitas x y y . Este sistema se dice acoplado, ya que en ambas ecuaciones aparecen las dos incógnitas y es no homogéneo.

Ejemplo 5. El modelo SIR de una epidemia:

El uso de sistemas expande en gran medida nuestra capacidad de las aplicaciones de modelado. Vamos a empezar por el modelado de una epidemia. Supongamos que tenemos una población de N individuos que está sujeta a una enfermedad contagiosa. Asumiremos los siguientes hechos acerca de la enfermedad:

- La enfermedad es de corta duración y rara vez es fatal.
- La enfermedad se propaga a través del contacto entre los individuos.

- Los individuos que se han recuperado de la enfermedad son inmunes.

Estas características están presentes en el sarampión, las paperas y en el resfriado común.

Construir el modelo para esta epidemia con estas características.

Solución:

Para la construcción del modelo, dividimos la población en tres tipos de grupos. El susceptible, $S(t)$, son aquellos individuos que nunca han tenido la enfermedad. El infectado, $I(t)$, son aquellos individuos que están actualmente enfermos con la enfermedad. Por último, los recuperados, $R(t)$, son los que han tenido la enfermedad y ahora son inmunes. El total de la población es la suma de estas tres poblaciones, $N = S + I + R$. Vamos a calcular la razón de cambio de cada una de estas tres subpoblaciones.

Como la enfermedad es de corta duración y rara vez es fatal, entonces podemos ignorar las muertes y los nacimientos. Esto significa que la población total N es constante. Esto también implica que $S(t)$, el número de individuos susceptibles cambia solo cuando alguno de ellos se infecta y pasa a engrosar el número de la población de infectados. Como la expansión de la enfermedad se propaga entre los contactos, entre la población susceptible y los individuos infectados, entonces la razón de cambio es proporcional al número de contactos. Asumiendo que las dos poblaciones están distribuidas aleatoriamente sobre el área, el número de contactos es proporcional al producto SI de las dos poblaciones. Luego existe una constante positiva tal que:

$$\frac{dS}{dt} = -aSI$$

El número de individuos infectados $I(t)$ cambia en dos formas. En primer lugar, aumenta a medida que los individuos susceptibles

se enferman. Ya hemos determinado que la tasa es $k \cdot S \cdot I$. Además, las personas infectadas que se mejoran pasan luego a la población recuperada. Suponiendo que hay un tiempo bastante estándar en la que una recuperación tiene lugar, la tasa de recuperación es proporcional al número de infectados. También existe una constante positiva b tal, que la razón de recuperados es bI . Al colocar estos hechos juntos, vemos que:

$$\frac{dI}{dt} = aSI - bI$$

Por último, el número de individuos recuperados aumenta a medida que los infectados se curan. Ya hemos determinado que esto sucede a la velocidad del bI , por lo tanto:

$$\frac{dR}{dt} = bI$$

Si ponemos todas estas ecuaciones conjuntamente, tenemos el sistema de tres ecuaciones diferenciales (16):

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -aSI \\ \frac{dI}{dt} &= aSI - bI \\ \frac{dR}{dt} &= bI \end{aligned} \quad (16)$$

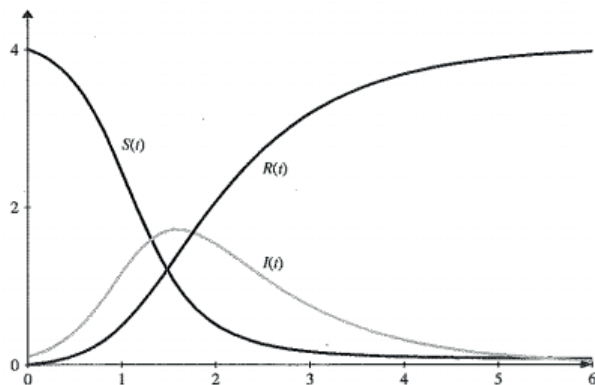
Este es el modelo SIR, es no lineal porque el lado derecho de la primera ecuación y la segunda ecuación contiene el producto de las variables SI . Es autónomo porque los lados derechos de las ecuaciones no dependen explícitamente de la variable independiente. Una solución para el modelo SIR es una tripla de funciones $S(t)$, $I(t)$, y $R(t)$, las cuales satisfacen el sistema de ecuaciones (16).

Una buena manera de mostrar la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales es trazar todos los componentes de la solución. Supongamos que fijamos en el sistema SIR con $a = b = 1$:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -SI \\ \frac{dI}{dt} &= SI - I \\ \frac{dR}{dt} &= I\end{aligned}\quad (17)$$

Con valores iniciales $S(0) = 4$, $I(0) = 0.1$, y $R(0) = 0$, el sistema no puede ser resuelto explícitamente, pero se puede calcular numéricamente las soluciones. Las tres componentes de la solución son mostradas en la figura 11.

Figura 11. Gráficas de las tres Componentes de la solución del problema.



Fuente. Elaborada por el autor con el programa Geogebra.

Ejemplo 6. Sistema depredador-presa:

Consideramos otro ejemplo de un sistema conocido como el sistema depredador-presa de ecuaciones diferenciales lineales, donde una especie «se come» a la otra. Este sistema tiene dos variables dependientes, ambas dependientes del tiempo. Es decir, nuestro modelo tiene dos variables dependientes ambas dependiendo del tiempo. En este ejemplo llamaremos a la presa «conejos» y a los depredadores «zorros», y denotaremos la presa por C y a los depredadores por Z . Las hipótesis del modelo son las siguientes:

- Si no hay zorros presentes, los conejos se reproducen a una tasa proporcional a su población y no les afecta la sobrepoblación.
- Los zorros se comen a los conejos y la razón a la que los conejos son devorados es proporcional a la tasa a la que los zorros y conejos interactúan.
- Sin conejos qué comer, la población de zorros declina a una razón proporcional a ella misma.
- La tasa de nacimientos de los zorros va en proporción al número de conejos comidos por zorros que, por la segunda hipótesis, es proporcional a la razón a la que los zorros y conejos interactúan.

Para describir este modelo en términos matemáticos, necesitamos cuatro parámetros adicionales a la variable dependiente t y a nuestras dos variables dependientes Z y C . Los parámetros son:

α = coeficiente de la razón de crecimiento de conejos

β = constante de proporcionalidad que mide el número de interacciones conejos-zorros en las que el conejo es devorado

γ = coeficiente de la razón de muertes de zorros

δ = constante de proporcionalidad que mide el beneficio a la población de zorros de un conejo devorado

Cuando se formule el modelo se debe tener en cuenta que tanto $\alpha, \beta, \gamma, y \delta$ son todos positivos.

La primera y tercera hipótesis del modelo es similar a la que plantea en el modelo del crecimiento ilimitado exponencial, visto en estudio del crecimiento exponencial. Luego ellos toman la forma αC en la ecuación dC/dt , y $-\gamma Z$ (ya que la población de zorros declina) en la ecuación para dZ/dt .

La razón a la que los conejos son devorados es proporcional a la razón de iteración entre los zorros y los conejos, por lo que necesitamos un término que modele la razón de iteración de ambas poblaciones; que crezca si C o Z aumenta, pero que desaparezca si $C = 0$ o $Z = 0$. Una notación que incorpora esas hipótesis es CZ . Modelamos así los efectos de las iteraciones conejos-zorros sobre dC/dt por medio de un enunciado de la forma $-\beta CZ$. La cuarta hipótesis da un término similar en la ecuación para dZ/dt . En este caso, cazar conejos ayuda a los zorros, por lo que añadimos un término de la forma δCZ .

Al plantear esas hipótesis, obtenemos el modelo:

$$\begin{aligned}\frac{dC}{dt} &= \alpha C - \beta CZ \\ \frac{dZ}{dt} &= -\gamma Z + \delta CZ \quad (18)\end{aligned}$$

De nuevo consideradas juntas este par de ecuaciones, la expresión que se forma se llama sistema de primer orden de ecuaciones diferenciales ordinarias (solo primeras derivadas, pero más de una variable dependiente). **Este sistema se llama acoplado porque las razones de cambio de C y Z dependen tanto de C como de Z .**

En las unidades anteriores solo consideramos ecuaciones diferenciales con una sola variable dependiente. En muchas aplicaciones, sin embargo, es necesario considerar simultáneamente varias ecuaciones diferenciales ordinarias con varias variables dependientes y una variable independiente. Tal tipo de sistemas de ecuaciones diferenciales puede ser lineal o no lineal. En este capítulo solo trabajaremos ecuaciones diferenciales lineales. Si todas las ecuaciones diferenciales son lineales en las variables dependientes, el resultado es un sistema de ecuaciones diferenciales lineales, los cuales son más naturales de estudiar usando vectores y la teoría de matrices.

En este capítulo, introduciremos las ideas básicas, solo considerando inicialmente sistemas de dos ecuaciones lineales, las cuales se resuelven utilizando las matrices dos por dos, para luego generalizar estas ideas. El hecho de introducir las matrices de tamaño dos por dos también nos llevan al uso de los valores y vectores propios en este manejo. Estos elementos nos permitirán entender el comportamiento de las soluciones de estas ecuaciones mediante el plano de fase.

En el ejemplo (1), tenemos un ejemplo de sistema de ecuaciones diferenciales lineales homogéneo de dos ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes, es decir:

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dt} &= -\frac{2}{25}y_1 + \frac{1}{50}y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} &= \frac{2}{25}y_1 - \frac{2}{25}y_2\end{aligned}$$

Este tipo de sistema de ecuaciones, es muy útil en diferentes aplicaciones que surgen en la física, como son los circuitos multilazos, el péndulo múltiple y otros.

10.2 Ejercicios

1. María y Pedro. Verifique que en la relación de María y Pedro, dada por (1), la razón de todas sus gamas emocionales es independiente de la emoción inicial de Pedro, a condición de que María no sienta atracción por Pedro.
-
2. Para el ejercicio siguiente emplee la siguiente terminología: le «gusta» alguien cuando siente cariño por él o ella. «No le gusta» alguien cuando tiene sentimientos negativos para esa persona. Una pareja es «feliz» cuando ambos se gustan. Una pareja es «infeliz» cuando ninguno de ellos se agrada. Un individuo es «feliz» si él o ella le gusta al otro. Un individuo es «infeliz» si él o ella no le gusta al otro. Suponga que las unidades de tiempo en la figura 5 son semanas.
 - a. ¿Cuándo eran María y Pedro felices como individuos? ¿Y cómo pareja?
 - b. ¿Cuándo eran María y Pedro infelices como individuos? ¿Y cómo pareja?
 - c. Suponiendo que esta relación dure las siete semanas que se muestran en esta figura, calcule la proporción del tiempo que María y Pedro fueron felices como pareja.
 - d. Durante este periodo de siete semanas, ¿fueron felices María y Pedro como pareja por mayor tiempo que cuando fueron infelices como pareja?
 - e. Si fuera un padre que estaba feliz cuando María era feliz o Pedro infeliz, ¿qué proporción las siete semanas estaba feliz? Explique.
 - f. ¿En qué momento durante las siete semanas le gustaría tener una cita doble con María y Pedro? Explique.
-

3. Para los siguientes sistemas depredador-presa, identifique qué variable dependiente, x o y , es la población presa y cuál es la población depredadora. ¿Está limitado el crecimiento de la población presa por otros factores ajenos al número de depredadores? ¿Tiene los depredadores fuente de alimentos aparte de las presas? (Suponga que los parámetros $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ y N son todos positivos). ¿Son los sistemas lineales?

$$\text{a. } \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\alpha x + \beta xy \\ \frac{dy}{dt} &= \gamma y - \delta xy \end{aligned}$$

$$\text{b. } \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \alpha x - \alpha \frac{x^2}{N} - \beta xy \\ \frac{dy}{dt} &= \gamma y + \delta xy \end{aligned}$$

4. En los siguientes modelos de la población depredador-presa, x representa la presa y y representa los depredadores.

$$\text{I. } \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 5x - 3y \\ \frac{dy}{dt} &= -2y + \frac{1}{2}xy \end{aligned}$$

$$\text{II. } \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x - 8xy \\ \frac{dy}{dt} &= -2y + 6xy \end{aligned}$$

- ¿Cuáles sistemas son lineales? ¿Cuáles no?
 - ¿En qué sistema se reproduce más rápidamente la presa cuando no hay depredadores (cuando $y = 0$) e igual número de presas?
 - ¿En qué sistema tienen los depredadores más éxito de cazar presas? En otras palabras, si el número de depredadores y presas son iguales para los dos sistemas, ¿en qué sistema tienen los depredadores un mayor efecto sobre la razón de cambio de las presas?
 - ¿Qué sistema requiere más presas para que los depredadores logren una tasa de crecimiento dada (suponiendo número idéntico de depredadores en ambos casos)?
-

5. El sistema:

$$\frac{dx}{dt} = ax - by\sqrt{x}$$

$$\frac{dy}{dt} = cy\sqrt{x}$$

· Ha sido propuesto como un modelo para un sistema depredador-presa de dos especies particulares de microorganismos (donde a , b y c son parámetros positivos).

a. ¿Es un sistema lineal?

b. ¿Qué variables, x o y , representan la población depredadora?

¿Qué variable representa la población presa?

c. ¿Qué pasa a la población depredadora si la presa se extingue?

6. Los siguientes sistemas son modelos de las poblaciones de parejas de especies que compiten por recursos (un incremento en una especie disminuye la tasa de crecimiento de la otra). Para cada sistema identifique las variables (independientes o dependientes) y los parámetros (capacidad de soporte, medida de interacción entre las especies, etc.). ¿Compiten o cooperan las especies? (Suponga que todos los parámetros son positivos).

a.
$$\frac{dx}{dt} = -ax - a\frac{x^2}{N} + \beta xy$$
$$\frac{dy}{dt} = \gamma y + \delta xy$$

b.
$$\frac{dx}{dt} = -\gamma x - \delta xy$$
$$\frac{dy}{dt} = \alpha y - \beta xy$$

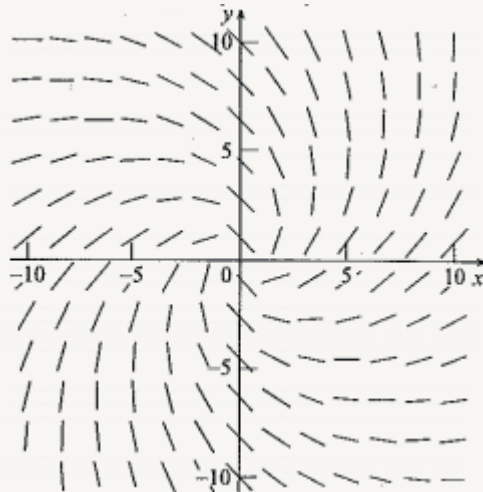
7. María y Pedro: la saga continua. María y Pedro solicitan terapia y aprenden a modificar su patrón de respuesta con respecto al otro. Pedro aprende a aceptar los cariños de María y ahora su propio cariño comienza a disminuir sola-

mente si ella llega a ser demasiado afectuosa. El cariño de él se describe mediante la ecuación diferencial $y' = -0.2(x - 2)$. María aprende a controlar sus emociones. Su afecto aumenta solamente cuando Pedro llega a ser muy cariñoso, y el cariño de ella queda descrito por $x' = 0.8(y - 2)$.

- a. Encuentre la ecuación diferencial de las orbitas resultantes en el plano de fase. Resuelva esta ecuación diferencial, y haga comentarios acerca del comportamiento a largo plazo de su romance si $x(0) = 0$, $y(0) = 2$.
- b. ¿Quién tiene la gama emocional más grande? Explique su razonamiento.

-
8. La figura 12 muestra el campo de pendientes correspondiente a $x' = -x + y$, $y' = -x - y$. Agregue flechas al campo de direcciones de este sistema de ecuaciones.

Figura 12. Gráfica del campo de pendientes para el problema 8.



Fuente. Elaborada por el autor con el programa Geogebra.

10.3 Cómo se relacionan los sistemas lineales de primer orden, las ecuaciones diferenciales de segundo orden y el método de Euler para aproximación de soluciones

En la sección 10.1 vimos ejemplos de **sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden**, tales como:

$$\begin{cases} x' = y - 0.4x \\ y' = -2x \end{cases}$$

Que tenían dos variables dependientes, a saber $x(t)$, $y(t)$, con condiciones iniciales para $x(t_0)$ y $y(t_0)$.

También vimos en la sección anterior ejemplos de **ecuaciones diferenciales de segundo orden**, como:

$$x'' = -0.4x' - 2x$$

Con condiciones iniciales para $x(t_0)$ y $y'(t_0)$.

Estos son casos especiales de tipos más generales de ecuaciones diferenciales que vamos a generalizar en esta sección.

Sistemas de primer orden

Definición: el conjunto de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= P(t, x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= Q(t, x, y)\end{aligned}\quad (19)$$

Donde P y Q son funciones de t , x , y , se denomina **sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden**. Condiciones iniciales típicas son $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$.

Todos los ejemplos dados en la sección 10.1 nos muestran ejemplos de sistemas lineales.

Observaciones generales

1. La **solución general** de (19) contiene cada solución de las ecuaciones de (19).
2. El problema de resolver el sistema (6) sujeto a condiciones iniciales se conoce como Problema de valor inicial (PVI).
3. **Determinación de soluciones.** Muy pocos sistemas pueden resolverse de manera explícita. Del mismo modo que la clasificación de las ecuaciones de primer orden fue útil para comprender el comportamiento de las soluciones, así también la clasificación de un sistema es útil.
4. **Determinación de soluciones numéricas.** En algunos casos, hallar soluciones numéricas es la única opción que nos proporciona información cuantitativa acerca de una solución. Como en el caso de las ecuaciones de primer orden, deberíamos asegurarnos de que una solución numérica sea consistente con cualquier información cualitativa que tengamos.

5. Existencia y Unicidad. Antes de que se intente hallar una solución (particularmente una de tipo numérico), deberíamos asegurarnos de que esa solución exista. Los teoremas de existencia y unicidad son, por tanto, esenciales.

Ampliaremos cada una de estas observaciones.

10.4 Comentarios acerca del hallazgo de soluciones y la clasificación de un sistema

a. **Autónomas.** Si P , y Q son independientes de la variable independiente t , es decir:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= P(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x, y) \end{aligned} \quad (20)$$

El sistema se llama autónomo.

Por ejemplo, los siguientes sistemas son autónomos:

Ejemplo 7. Ejemplos de sistemas autónomos:

$$\begin{aligned} \text{i.} \quad \frac{dx}{dt} &= 5x - 3y \\ \frac{dy}{dt} &= -2y + \frac{1}{2}xy \end{aligned} \qquad \text{ii.} \quad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= xy \\ \frac{dy}{dt} &= x - y^3 \end{aligned}$$

Sin embargo, al eliminar t y trabajar en el plano $x - y$, la información cualitativa frecuentemente se puede obtener. El plano $x-y$ se conoce como **plano de Fase** y la gráfica de y contra x se denomina **órbita**. La gráfica de una colección de órbitas representativas se llama **retrato de Fase**. Los sistemas autónomos se estudian básicamente en este texto.

b. Si $P(x)$ y $Q(x)$ son lineales en x y y , es decir:

$$\begin{aligned}x' &= a(t)x + b(t)y + g(t) \\y' &= c(t)x + d(t)y + f(t)\end{aligned}\quad (21)$$

Donde a, b, c, d, g y f son funciones de t , este sistema se llama **lineal**.

Esta ecuación, se puede escribir en forma vectorial como:

$$\vec{X}'(t) = A(t)\vec{X}(t) + \vec{f}(t). \quad (22)$$

$A(t)$ es una $n \times n$ matriz de funciones continuas sobre un intervalo I .

$\vec{f}(t)$ es una $n \times 1$ vector de funciones continuas sobre un intervalo I .

$\vec{X}(t)$ es un $n \times 1$ **vector solución** de funciones diferenciables sobre el intervalo I que satisfacen (22).

Si $\vec{f}(t) = \vec{0}$, el sistema es **homogéneo**:

$$\vec{X}'(t) = A(t)\vec{X}(t)$$

Ejemplo 8. Ejemplo de sistemas lineales no autónomo:

$$x' = tx + y + 3t,$$

$$y' = x - e^t y + 5t \quad (23)$$

Observe que en este caso tenemos:

$$\vec{X}'(t) = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

$$A(t) = \begin{bmatrix} t & 1 \\ 1 & -e^t \end{bmatrix}$$

$$\vec{X}(t) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\vec{f}(t) = \begin{bmatrix} 3t \\ 5t \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, el sistema 23 en forma matricial se puede escribir como:

$$\vec{X}'(t) = A(t)\vec{X}(t) + \vec{f}(t). \quad (24)$$

Ejemplo 9. Un sistema lineal homogéneo:

Escribir el sistema lineal de primer grado en forma matricial:

$$x' = 3x - 2y$$

$$y' = x$$

$$z' = -x + y + 3z$$

Solución:

El sistema lineal homogéneo de primer orden, lo podemos escribir como $\vec{X}'(t) = A(t)\vec{X}(t)$ donde:

$$\vec{X}'(t) = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \vec{X}(t), \text{ Donde } \vec{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

El vector:

$$\vec{X}_h = \begin{bmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix}$$

Es solución, lo cual se puede confirmar mostrando que:

$$A\vec{X}_h = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6e^{2t} - 2e^{2t} \\ 2e^{2t} \\ -2e^{2t} + e^{2t} + 3e^{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4e^{2t} \\ 2e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix}' = \vec{X}_h'$$

Ejemplo 10. Un sistema lineal no homogéneo:

Escribir el sistema lineal no homogéneo de primer grado en forma matricial.

$$x' = 3x - 2y + 2 - 2e^t$$

$$y' = x - e^t$$

$$z' = -x + y + 3z + e^t - 1$$

Solución:

Este sistema se puede escribir en la forma vectorial de matrices:

$\vec{X}'(t) = A(t)\vec{X}(t) + \vec{f}(t)$, donde:

$$: \vec{X}'(t) = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \vec{X} + \begin{bmatrix} 2 - 2e^t \\ -e^t \\ e^t - 1 \end{bmatrix}$$

Este sistema tiene como una solución particular

$$\vec{X}_p = \begin{bmatrix} e^t \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esto se puede confirmar, mostrando que $\vec{X}_p' - A\vec{X}_p = \vec{f}(t)$, como sigue:

$$\vec{X}_p' - A\vec{X}_p = \begin{bmatrix} e^t \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}' - \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t - (3e^t - 2) \\ 0 - e^t \\ 0 - (-e^t + 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - 2e^t \\ -e^t \\ e^t - 1 \end{bmatrix} = \vec{f}(t),$$

Ahora que se tiene una forma familiar de manipulación de un sistema lineal de ecuaciones de primer orden mediante la forma matricial, se puede hacer uso del álgebra lineal para encontrar soluciones de dichos sistemas.

Aplicando principios del álgebra lineal

Los fundamentos para el análisis de sistemas lineales empiezan con algunas definiciones y teoremas, muy similares a los vistos en los capítulos 4 y 9 pero adaptados a sistemas.

Problemas con valor inicial para sistemas de ecuaciones diferenciales

Para un sistema de ecuaciones lineales, un problema con valor inicial es la combinación de un sistema (22) y un vector de valor inicial:

$$\vec{X}'(t) = \mathbf{A}(t)\vec{X}(t) + \vec{f}(t), \quad \vec{X}(0) = \vec{X}_0 = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

Donde c_1, c_2, \dots, c_n son constantes.

Tal como vimos en las ecuaciones diferenciales de orden 1 y dos, la existencia de las soluciones está asegurada si las funciones elementales de $\mathbf{A}(t)$ y $\vec{f}(t)$ son continuas; para la unicidad se requieren condiciones iniciales y continuidad de las derivadas parciales. En el caso de los sistemas lineales, las derivadas parciales $\frac{\delta f(t)}{\delta x_i}$, son automáticamente continuas porque ellas son simplemente los coeficientes de $\vec{X}(t)$ los cuales son elementos de $\mathbf{A}(t)$.

Teorema de existencia y unicidad para sistemas de ecuaciones diferenciales.

Dada una función matricial $n \times n$ $\mathbf{A}(t)$ y una $n \times 1$ función $\vec{f}(t)$ ambas continuas sobre un intervalo I que contiene a t_0 , y un n - vector constante \vec{X}_0 , entonces existe una única función vectorial $\vec{X}(t)$ tal que:

$$\vec{X}'(t) = \mathbf{A}(t)\vec{X}(t) + \vec{f}(t) \text{ y } \vec{X}(t_0) = \vec{X}_0.$$

El trabajo que vimos en el capítulo 9, para encontrar la solución de ecuaciones diferenciales de segundo orden o de grado superior no homogénea se aplica para encontrar las soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales. Conocemos que la solución existe para:

$$\vec{X}^1(t) = A(t)\vec{X}(t) + \vec{f}(t) \quad (25)$$

Para encontrarla primero encontramos la solución \vec{X}_h del sistema homogéneo asociado de ecuaciones diferenciales:

$$\vec{X}^1(t) = A(t)\vec{X}(t)$$

hecho que veremos en la sección siguiente. Luego veremos cómo conseguir la de la no homogénea asociada \vec{X}_p . La solución completa de (25) es la construcción ya conocida de:

$$\vec{X}^1(t) = \vec{X}_h + \vec{X}_p$$

Sistemas lineales homogéneos

Empezamos con el principio de superposición para el sistema homogéneo de ecuaciones diferenciales lineales.

El principio de superposición para sistema lineal homogéneo de ecuaciones diferenciales. Sean $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \dots, \vec{X}_n$ vectores solución para la ecuación homogénea:

$$\vec{X}^1(t) = A(t)\vec{X}(t) \text{ Sobre } I$$

Entonces, toda combinación lineal de estos vectores solución es también una solución vectorial para el sistema. Es decir:

$$\vec{X} = c_1\vec{X}_1 + c_2\vec{X}_2 + \dots + c_n\vec{X}_n$$

Es una solución sobre I para todas las constantes reales c_1, c_2, \dots, c_n .

La prueba es muy similar a la realizada en el capítulo 8.

Ejemplo 11. Principio de superposición:

Verificar el principio de superposición para el sistema del ejemplo 8, si se sabe que:

$$\vec{X}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ e^{3t} \end{bmatrix}, \vec{X}_2 = \begin{bmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix}, \text{ y } \vec{X}_3 = \begin{bmatrix} e^t \\ e^t \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Son todas soluciones de $\vec{X}'(t) = \mathbf{A}(t)\vec{X}(t)$.

Solución:

Entonces por el principio de superposición se puede garantizar que:

$$c_1 \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ e^{3t} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} e^t \\ e^t \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Es también una solución para cualquier constante c_1, c_2, c_3 .

Para encontrar todas las soluciones de un sistema lineal de n ecuaciones diferenciales, tenemos que empezar por encontrar soluciones linealmente independientes para construir una base para el **espacio solución**. ¿Cuántas de tales soluciones son necesarias y suficientes?

Teorema del espacio solución para un sistema homogéneo de sistemas de ecuaciones diferenciales

Si:

$$\vec{X}'(t) = \mathbf{A}(t)\vec{X}(t)$$

Donde A es una $n \times n$ matriz, entonces el conjunto solución $\vec{X}(t)$ es un espacio vectorial de dimensión n .

Este teorema está muy ligado a las bases de un espacio vectorial de dimensión finita. Más adelante probaremos este teorema para el caso especial, cuando todas las entradas de A son constantes.

De acuerdo con el teorema del espacio solución, para $n \times n$ sistemas lineales debemos buscar n soluciones linealmente independientes $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \dots, \vec{X}_n$ para formar una base para el espacio solución. Luego por el principio de superposición se sigue que:

Teorema de la solución para sistemas de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas

Para n soluciones linealmente independientes $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \dots, \vec{X}_n$ del sistema:

$$\vec{X}'(t) = A(t)\vec{X}(t)$$

La solución general es:

$$\vec{X}_h = c_1\vec{X}_1 + c_2\vec{X}_2 + \dots + c_n\vec{X}_n, \quad c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$$

Ejemplo 12. Completando una solución general:

Para el ejemplo 8 y los vectores:

$$\vec{X}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{3t} \end{bmatrix}, \quad \vec{X}_2 = \begin{bmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix}, \quad \text{y } \vec{X}_3 = \begin{bmatrix} e^t \\ e^t \\ 0 \end{bmatrix}$$

del ejemplo 10, mostrar que $\{\vec{X}_1, \vec{X}_2, \vec{X}_3\}$ son linealmente independientes sobre $(-\infty, \infty)$.

Solución:

Para ver que esto es cierto, procedemos de la siguiente manera:

- Paso 1. Escogemos un punto cualquiera $x_0 = 0$ en $(-\infty, \infty)$.
- Paso 2. Calculamos $\vec{X}_1(0), \vec{X}_2(0), \vec{X}_3(0)$ y construimos la matriz espacio columna para $t_0 = 0$:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Paso 3. Verificamos la independencia lineal calculando el determinante de $|C|$.

Para $t_0 = 0$, $|\mathbf{C}| \neq 0$, luego el conjunto de vectores $\{\vec{\mathbf{X}}_1, \vec{\mathbf{X}}_2, \vec{\mathbf{X}}_3\}$ es linealmente independiente.

Entonces la solución general para: $\vec{\mathbf{X}}' = \mathbf{A}\vec{\mathbf{X}}$

Es:

$$\vec{\mathbf{X}}_h = c_1 \vec{\mathbf{X}}_1 + c_2 \vec{\mathbf{X}}_2 + c_3 \vec{\mathbf{X}}_3$$

En el lenguaje del álgebra lineal se permite varias formas de expresar la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales.

Ejemplo 13. Cómo expresar soluciones:

Expresar la solución completa del ejercicio 11.

Solución:

La solución completa del ejercicio anterior es:

$$\vec{\mathbf{X}}_h = c_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{3t} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tomando cada matriz columna $\vec{\mathbf{X}}_1, \vec{\mathbf{X}}_2, \mathbf{y} \vec{\mathbf{X}}_3$ y el vector columna formado por las constantes c_1, c_2, c_3 , se puede escribir de manera equivalente la expresión anterior como:

$$\vec{\mathbf{X}}_h = \begin{bmatrix} 0 & 2e^{2t} & e^t \\ 0 & e^{2t} & e^t \\ e^{3t} & e^{2t} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

Esta última expresión da origen a un término especial.

Matriz fundamental

Para una base de n vectores linealmente independientes de soluciones:

$$\vec{X}' = A\vec{X} \quad (26)$$

La matriz $\vec{X}(t)$ cuyas columnas son los vectores solución $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \dots, \vec{X}_n$ es llamada la matriz fundamental para el sistema. Entonces para construir una solución de un sistema de 3 dimensiones $\vec{X}' = A\vec{X}$

Podemos escribir:

$$\vec{X}_h = [\vec{X}_1, \vec{X}_2, \vec{X}_3] \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \text{ Donde } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \quad (27)$$

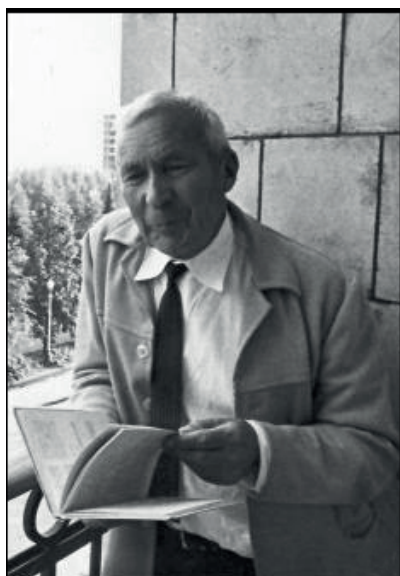
Esto se sigue de las propiedades del producto de matrices.

Observaciones acerca de la matriz fundamental:

1. La matriz fundamental no es única. Un conjunto diferente de n vectores linealmente independientes de soluciones produce una diferente $\vec{X}(t)$. La fórmula general de la solución (27) todavía se mantendría, pero los c_i serían específicos para cualquier solución particular.
2. El determinante de la matriz fundamental siempre es diferente de cero, es decir $|\vec{X}(t)| \neq 0$.
3. $\vec{X}' = A\vec{X}$.

10.5 Sistemas lineales homogéneos con coeficientes constantes

Figura 13. Andrey Nikolaevich Kolmogorov (1903-1987).



Fuente. Enciclopedia Británica (Biblioteca virtual Universidad EAN).

Andrey Nikolaevich nace el 25 de abril de 1903 en Tambova, a 500 kilómetros al sur de Moscú, muere en Moscú en 1987. Fue el matemático soviético más grande del siglo XX, con sus trabajos realizó grandes contribuciones a la matemática de la probabilidad, topología, lógica intuicionista, mecánica de la turbulencia clásica, algoritmos de la teoría de la información y complejidad computacional.

Para el sistema n – dimensional lineal de ecuaciones diferenciales $\vec{x}' = A\vec{x}$, donde A es una $n \times n$ matriz de constantes, la evolución del espacio solución según el teorema indicado anteriormente es como sigue:

Paso 1. El espacio solución es un espacio vectorial

Para ver esto, supongamos que el vector de funciones de la forma:

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

tiene componentes de clase C_1 , es un espacio vectorial bajo la adicción y multiplicación por un escalar, ya que si $\vec{U}(t)$, $\vec{V}(t)$ son soluciones de: $\vec{x}' = A\vec{x}$

Entonces se tiene que:

$$\vec{U}' = A\vec{U}(t) \text{ y } \vec{V}' = A\vec{V}(t)$$

Y si c_1 y c_2 son escalares, entonces:

$$\begin{aligned} (c_1\vec{U} + c_2\vec{V})' &= c_1\vec{U}' + c_2\vec{V}' = c_1A\vec{U}(t) + c_2A\vec{V}(t) = A(c_1\vec{U}) + A(c_2\vec{V}) \\ &= A(c_1\vec{U}(t) + c_2\vec{V}(t)) \end{aligned}$$

Luego el conjunto de soluciones es un espacio vectorial.

Paso 2. El teorema de existencia y unicidad dan un conjunto especial B de vectores solución

Como los coeficientes constantes son continuos sobre \mathbb{R} , el teorema de existencia y unicidad nos permite encontrar una solución:

$$\vec{x}_i(t) \text{ Con, } \vec{x}_i(0) = \vec{e}_i$$

Para $i = 1, 2, 3, \dots, n$ donde \vec{e}_i es el i -ésimo vector de la base estándar en \mathbb{R}^n . Es decir:

$$\vec{x}_1(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{x}_2(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \vec{x}_n(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Este paso crea un conjunto especial de vectores solución $B = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\}$.

Paso 3. Los vectores en B son linealmente independientes

Para mostrar este hecho, suponemos que tenemos constantes a_1, a_2, \dots, a_n tal que:

$$a_1 \vec{x}_1(t) + a_2 \vec{x}_2(t) + \dots + a_n \vec{x}_n(t) = \vec{0}$$

O, equivalentemente:

$$[\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t), \dots, \vec{x}_n(t)] \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \vec{0}$$

Entonces ese resultado es verdadero para todo t , incluyendo $t = 0$. Pero hemos asumido que:

$$[\vec{x}_1(0), \vec{x}_2(0), \dots, \vec{x}_n(0)] = I_n$$

Luego:

$$I_n \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \vec{0} \text{ Entonces } \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \vec{0}$$

Y $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ son linealmente independientes.

Paso 4. El conjunto B genera el espacio solución

Para ver esto, necesitamos mostrar que una solución arbitraria $\overline{\mathbf{U}}(t)$ de (26) es una combinación lineal de los $\overline{\mathbf{x}}_i(t)$. Supongamos que:

$$\overline{\mathbf{U}}(0) = \overline{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Y formamos $\overline{\mathbf{v}}(t)$ como sigue:

$$\overline{\mathbf{v}}(t) = b_1 \overline{\mathbf{x}}_1(t) + b_2 \overline{\mathbf{x}}_2(t) + \dots + b_n \overline{\mathbf{x}}_n(t)$$

Entonces $\overline{\mathbf{v}}(t)$ es también una solución de (26) por el principio de superposición. Pero:

$$\overline{\mathbf{v}}(0) = b_1 \overline{\mathbf{x}}_1(0) + b_2 \overline{\mathbf{x}}_2(0) + \dots + b_n \overline{\mathbf{x}}_n(0) = b_1 \overline{\mathbf{e}}_1 + b_2 \overline{\mathbf{e}}_2 + \dots + b_n \overline{\mathbf{e}}_n = \overline{\mathbf{b}}$$

Por el teorema de existencia y unicidad, $\overline{\mathbf{U}}$ y $\overline{\mathbf{v}}$ son la misma solución y:

$$\overline{\mathbf{U}} = b_1 \overline{\mathbf{x}}_1(t) + b_2 \overline{\mathbf{x}}_2(t) + \dots + b_n \overline{\mathbf{x}}_n(t)$$

Luego:

Generado (B) = Espacio solución

10.6 Tipos de gráficas y método de Euler

Para sistemas de ecuaciones diferenciales en dos variables, tenemos tres gráficos planares: en el plano t - x ; t - y , y x - y .

Gráficas en dos dimensiones para un sistema de ecuaciones diferenciales lineales

- Las gráficas en el plano t - x y t - y muestran las soluciones individuales de las funciones $x(t)$, y y $y(t)$ y son llamadas **las gráficas componentes, soluciones gráficas o series de tiempo**.
- La gráfica en el plano x - y es **el plano de fase**. Las trayectorias en el plano de fase son las curvas paramétricas descritas por $x(t)$ y $y(t)$.

Las trayectorias sobre el plano de fase crean el retrato de fase.

Veamos unos ejemplos de esto.

Ejemplo 14. Movimiento armónico simple:

La ecuación familiar:

$$x'' + 0.1x = 0$$

Analizar las gráficas de dicho sistema.

Solución:

Esta ecuación, la podemos pasar a un sistema haciendo:

$$x' = y$$

$$y' = -0.1x$$

O:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

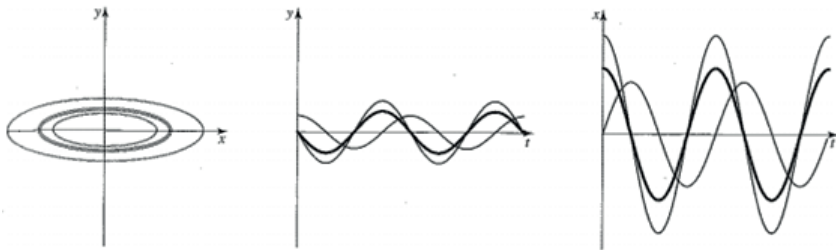
Cualquier versión de estas ecuaciones produce soluciones de la forma:

$$x(t) = c_1 \cos\sqrt{0.1}t + c_2 \sin\sqrt{0.1}t$$

$$y(t) = x'(t) = -\sqrt{0.1} c_1 \sin\sqrt{0.1}t + \sqrt{0.1} c_2 \cos\sqrt{0.1}t$$

Las tres gráficas se muestran en la siguiente figura.

Figura 14. Gráficas de soluciones del sistema dado.



Fuente. Elaborada por el autor con el programa Geogebra.

Ejemplo 15. Movimiento armónico amortiguado:

La ecuación diferencial de segundo orden:

$$x'' + 0.05x' + 0.1x = 0$$

Trazar la gráfica de dicho sistema.

Solución:

Esta ecuación la podemos ver como el sistema:

$$x' = y$$

$$y' = -0.1x - 0.05y$$

0:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.1 & 0.05 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

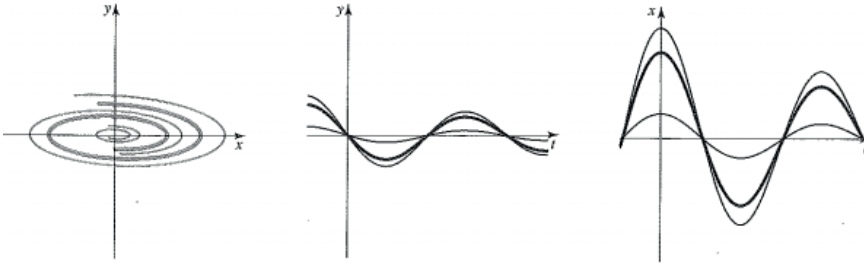
El cual tiene solución de la forma:

$$X(t) \approx e^{-0.25t}(c_1 \cos 0.32t + c_2 \operatorname{sen} 0.32t)$$

$$Y(t) \approx e^{-0.25t}(-0.32c_1 \operatorname{sen} 0.32t + 0.32c_2 \cos 0.32t) - 0.025e^{-0.025t}(c_1 \cos 0.32t + c_2 \operatorname{sen} 0.32t)$$

Las tres gráficas se muestran en la siguiente figura.

Figura 15. Gráficas del sistema dado.



Fuente. Elaborada por el autor con el programa Geogebra.

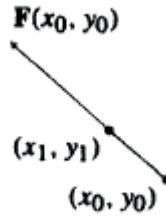
Como se vio en la sección 4.1, el método de Euler para una ecuación diferencial de primer orden, se basa en la idea de aproximar la gráfica de una solución mediante segmentos de línea, cuyas pendientes se obtienen de la ecuación diferencial. En el esquema de aproximación de Euler opera el mismo principio interpretado en un marco vectorial.

Con una condición inicial (x_0, y_0) , ¿cómo podemos usar el campo vectorial $F(x, y)$ para aproximar la curva solución? Igual que para las ecuaciones, escogemos primero un tamaño de paso Δt . El vector $F(x_0, y_0)$ corresponde a la velocidad de la solución que pasa por (x_0, y_0) , por lo que comenzamos nuestra solución aproximada usando $\Delta t \mathbf{F}(x_0, y_0)$

para formar el primer «paso». En otras palabras pasamos, de (x_0, y_0) a (x_1, y_1) , donde el punto (x_1, y_1) está dado por:

$$(x_1, y_1) = (x_0, y_0) + \Delta t \mathbf{F}(x_0, y_0)$$

Figura 16. Primeros pasos del método de Euler.



Fuente. Elaborada por el autor.

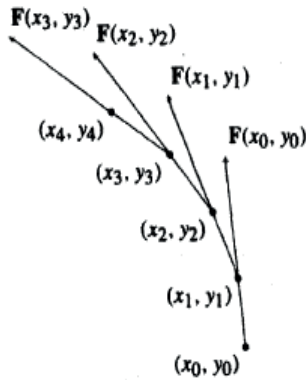
Esto es como viajar a lo largo de la recta durante el tiempo Δt con velocidad $F(x_0, y_0)$ (ver la figura 15).

Una vez calculado el punto (x_1, y_1) sobre la curva solución aproximada, calculamos el nuevo vector velocidad $F(x_1, y_1)$. El segundo paso es:

$$(x_2, y_2) = (x_1, y_1) + \Delta t \mathbf{F}(x_1, y_1)$$

Repetimos este esquema y obtenemos una curva solución aproximada (figura 17).

Figura 17. Aproximación de la curva solución por el método de Euler.



Fuente. Elaborada por el autor.

En la práctica escogemos un tamaño de paso Δt que sea suficientemente pequeño para proporcionar una solución exacta sobre el intervalo dado. En resumen:

Método de Euler para sistemas

El método de Euler para sistemas puede escribirse sin la notación vectorial como sigue. Con el sistema:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y)$$

$$\frac{dy}{dt} = g(x, y)$$

La condición inicial (x_0, y_0) y el tamaño de paso Δt , determinamos la aproximación de Euler repitiendo los cálculos:

$$m_k = f(x_k, y_k)$$

$$n_k = g(x_k, y_k)$$

$$x_{k+1} = x_k + m_k \Delta t$$

$$y_{k+1} = y_k + n_k \Delta t$$

Ejemplo 16. Método de Euler aplicado a la ecuación de Van der Pol

Considere la ecuación diferencial de segundo orden:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - (1 - x^2) \frac{dx}{dt} + x = 0$$

Esta se denomina la ecuación de Van der Pol. Encuentre el sistema equivalente y encontrar una solución numérica, si $(x_0, y_0) = (1, 1)$.

Solución:

Para hallar el sistema equivalente hacemos $y = \frac{dx}{dt}$. El sistema resultante es:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= -x + (1 - x^2)y \end{aligned}$$

Como nuestro punto inicial es $(1,1)$ realizamos los primeros cálculos a mano para ver cómo responde el método de Euler y luego dejamos que la computadora efectúe la parte iterativa. El método se efectúa de manera adecuada haciendo un cálculo con un tamaño de paso relativamente grande, aunque en la práctica nunca usaríamos un valor grande de Δt .

Sea $\Delta t = 0.25$. Dada la condición inicial si $(x_0, y_0) = (1,1)$, calculamos el campo vectorial:

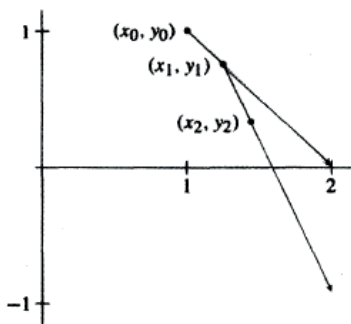
$$F(x, y) = (y, -x + (1 - x^2)y)$$

En el punto $(1, 1)$ obtenemos el vector $F(1, 1) = (1, -1)$. Nuestro primer paso comienza entonces en $(1, 1)$ y termina en:

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) &= (x_0, y_0) + \Delta t F(x_0, y_0) \\ &= (1, 1) + 0.25 (1, -1) = (1.25, 0.75) \end{aligned}$$

En otras palabras, como $\Delta t = 0.25$, obtenemos (x_1, y_1) a partir de (x_0, y_0) avanzando la cuarta parte del camino a lo largo del vector de desplazamiento $(1, -1)$ (figura 18) .

Figura 18. Primer paso en el método de Euler para la solución del sistema dado.



Fuente. Elaborada por el autor.

El paso siguiente se determina calculando el campo vectorial en (x_1, y_1) . Tenemos que $F(1.25, 0.75) = (0.75, -1.67)$ (con dos decimales). Por lo tanto, nuestro próximo paso empieza en $(1.25, 0.75)$ y finaliza en (ver figura 18):

$$\begin{aligned} (x_2, y_2) &= (x_1, y_1) + \Delta t \mathbf{F}(x_1, y_1) \\ &= (1.25, 0.75) + 0.25 (0.175, -1.67) = (1.44, 0.33) \end{aligned}$$

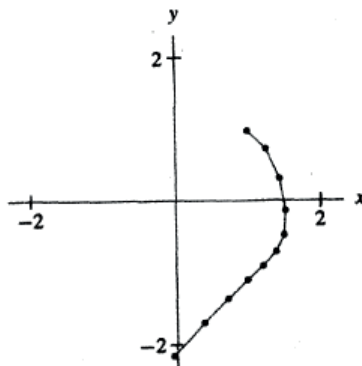
Siguiendo en este proceso se puede construir una tabla como la siguiente, en donde se han efectuado los cálculos para determinar los diez primeros pasos.

Tabla 1. Tabla con los diez primeros pasos en el método de Euler.

l	x_l	y_l	m_l	n_l
0	1	1	1	1
1	1.25	0.75	0.75	- 1.671875
2	1.4375	0.332031	0.32031	- 1.791580
3	1.520507	- 0.115864	- 0.115864	- 1.368501
4	1.4191542	- 0.457989	- 0.457989	- 0.930644
5	1.377045	- 0.690650	- 0.690650	- 0.758048
6	1.204383	- 0.880162	- 0.880162	- 0.807837
7	0.984342	- 1.082121	- 1.082121	- 1.017965
8	0.713811	- 1.336613	- 1.336613	- 1.369384
9	0.379658	- 1.678958	- 1.678958	- 1.816611
10	- 0.040082	- 2.133112		

Fuente. Elaborada por el autor.

La tabla anterior ilustra los cálculos necesarios para determinar los diez primeros pasos del método de Euler y principia con la condición inicial $(x_0, y_0) = (1, 1)$. Y con $\Delta t = 0.25$. La curva solución aproximada resultante se muestra en la siguiente figura.

Figura 19. Gráfica de la solución aproximada dada por el método de Euler.

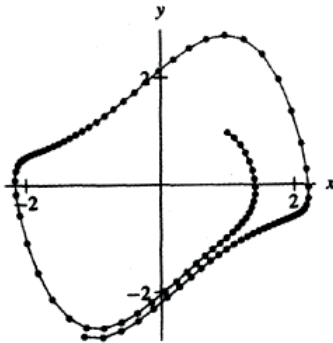
Fuente. Elaborada por el autor.

Si colocamos como salto de paso a $\Delta t = 0.1$, que es de un tamaño menos que el tomado anteriormente, se puede construir una tabla mucho mayor mediante un programa de computadora (aún se puede hacer en Excel) para obtener una gráfica como la de la figura 20.

Si se quiere ver la gráfica de $x(t)$ y, de $y(t)$ de esta solución aproximada, debemos incluir en nuestra tabla anterior información respecto a t .

Si suponemos que la condición inicial es $C(x_0, y_0) = (1, 1)$ que corresponde al tiempo inicial $t_0 = 0$, luego podemos añadir a nuestra tabla anterior una columna con los tiempos correspondientes, Así tenemos los tiempos correspondientes para construir las gráficas de $x(t)$ y, de $y(t)$.

Figura 20. Gráfica con el método de Euler y salto de paso más pequeño.



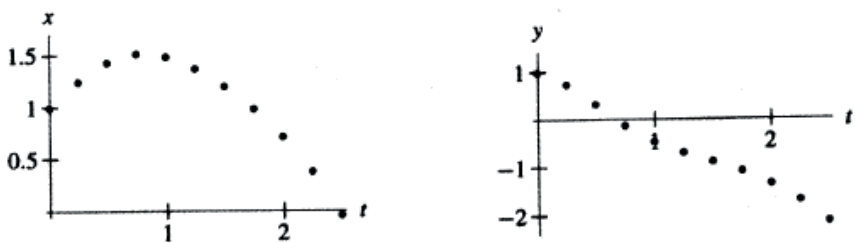
Fuente. Elaborada por el autor.

Tabla 2. Tabla trazada con herramientas de Excel.

l	t_l	x_l	y_l	m_l	n_l
0	0	1	1	1	1
1	0.25	1.25	0.75	0.75	-1.671875
2	0.5	1.4375	0.332031	0.32031	-1.791580
3	0.75	1.520507	-0.115864	-0.115864	-1.368501
4	1	1.4191542	-0.457989	-0.457989	-0.930644
5	1.25	1.377045	-0.690650	-0.690650	-0.758048
6	1.5	1.204383	-0.880162	-0.880162	-0.807837
7	1.75	0.984342	-1.082121	-1.082121	-1.017965
8	2.0	0.713811	-1.336613	-1.336613	-1.369384
9	2.25	0.379658	-1.678958	-1.678958	-1.816611
10	2.5	0.040082	2.133112		

Fuente. Elaborada por el autor.

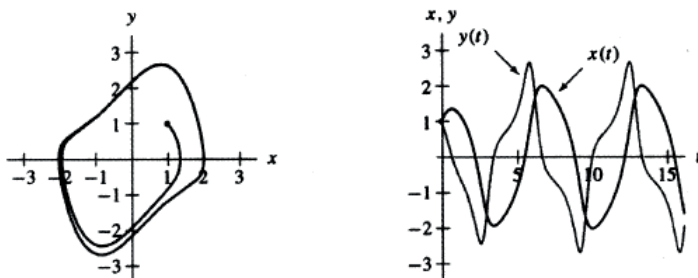
Entonces tenemos en esta tabla la información para trazar la gráfica de $x(t)$ y, de $y(t)$ de soluciones aproximadas (ver la siguiente figura).

Figura 21. Figura trazada con herramientas de Excel.

Fuente. Elaborada por el autor.

Las siguientes figuras nos muestran las gráficas de la curva casi cerrada en el plano de fase (el plano $x - y$) y las funciones $x(t)$ y, $y(t)$ que son esencialmente periódicas.

Figura 22. Gráficas reales de las soluciones del sistema.



Fuente. Elaborada por el autor con el programa Geogebra.

Ejemplo 17. Complicaciones con una ecuación no autónoma:

Comparemos el ejercicio 14 con la ecuación no autónoma.

$$x'' + 0.1x = 0.5 \cos t.$$

Encuentre el sistema equivalente y una solución numérica, mediante el método de Euler si $(x_0, y_0) = (1, 0)$.

Solución:

El sistema de ecuaciones para dicha ecuación es:

$$x' = y$$

$$y' = -0.1x + 0.5 \cos t.$$

O:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \cos t \end{bmatrix}$$

Si recordamos el trabajo realizado en el capítulo 8, podríamos dar una solución analítica de esta ecuación, pero con el computador podemos dar unas soluciones cortas del sistema utilizando el método de Euler, donde:

$X_{n+1} = x_n + \Delta t x'(t_n)$; $y_{n+1} = y_n + \Delta t y'(t_n)$; con $\Delta t = 0.1$ y $x(0) = 1$, $y(0) = 0$ y tenemos la tabla 3².

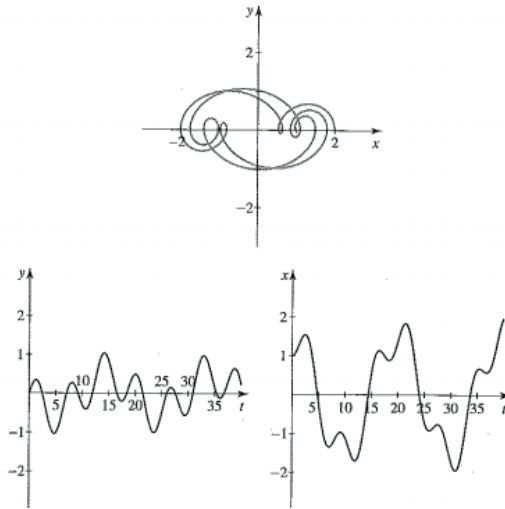
Tabla 3. Tabla construida para los diez primeros pasos del método de Euler.

l	ti	xi	yi	X/ = mi	y/= ni
0	0	1	0	0	0.4
1	0.1	1	0.04	0.04	0.3975
2	0.2	1.04	0.0798	0.0798	0.3896
3	0.3	1.0120	0.1187	0.1187	0.3765
4	0.4	1.023	0.1564	0.1564	0.9581
5	0.5	1.0395	0.1922	0.1922	0.3348
6	0.6	1.0587	0.2257	0.2257	0.3068
7	0.7	1.0813	0.2563	.0.2563	0.2743
8	0.8	1.1069	0.2838	0.2838	0.2377
9	0.9	1.1353	0.3075	0.3075	0.1973
10	1	1.1660	0.3273	0.3273	0.1535

Fuente. Elaborada por el autor.

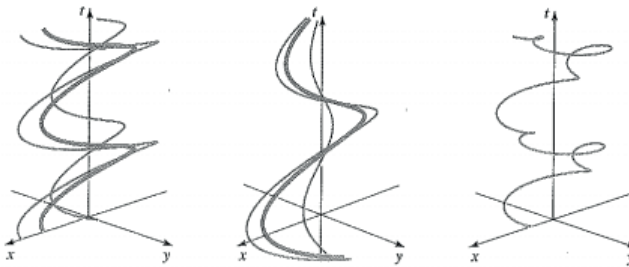
Cuyas gráficas $x - y$, $x(t)$ y $y(t)$ nos dan la siguiente figura.

² El método de Euler es una hoja de cálculo para todo sistema 2X2 de sistemas lineales como se muestra en la tabla. Solo se necesita t , x , y , el salto del paso h y las fórmulas explícitas para la derivada de x y de y .

Figura 23. Gráficas $x - y$, $x(t)$ y $y(t)$.

Fuente. Elaborada por el autor con el programa Geogebra.

Las gráficas se muestran en la figura 23, y ellas son conocidas. Sin embargo, este sistema visto en dos dimensiones del sistema de ecuaciones diferenciales tiene otra importante gráfica vista en tres dimensiones t , x , y como se muestra en la siguiente figura.

Figura 24. Gráfica de las soluciones vistas en tres dimensiones.

Fuente. Elaborada por el autor con el programa Derive.

Cada una de las gráficas del plano de la figura 23, se puede ver como la proyección sobre los otros ejes de la figura en tres dimensiones, la figura 24, así por ejemplo si suprime el eje t , se puede ver el retrato de fase en $x - y$.

10.7 Ejercicios

1. Clasifique las siguientes ecuaciones empleando los términos *autónomo*, *no autónomo*, *lineal*, *no lineal*, *homogéneo*, *no homogéneo* y *de coeficientes constantes*.

No intente resolver ninguna de estas ecuaciones.

a. $x' = y + \sin t$.

$$y' = x$$

c. $x' = y \cos t$

$$y' = 6x$$

e. $x' = 2\cos x - y$

$$y' = x + y$$

b. $x' = y + \sin t$

$$y' = x^2$$

d. $x' = y$

$$y' = x - x^3$$

f. $x' = x - y$

$$y' = x + y$$

2. Clasifique las siguientes ecuaciones diferenciales de segundo orden, haciendo uso de los términos *autónomo*, *no autónomo*, *lineal*, *no lineal*, *homogéneo*, *no homogéneo* y *de coeficientes constantes*. No intente resolver ninguna de estas ecuaciones.

a. $x'' = x' + \sin t$

b. $x'' = (x')^2 + t$

c. $x'' = -1 + e^{-t}(x')^2$

d. $x'' + g(x)x' + x = 0$ (ecuación de Liénard)

e. $x'' = x - x^3$ (ecuación de Duffing)

f. $x'' - x + x^3 = \cos t$ (ecuación de Duffing forzada)

g. $x'' + a^2(1 - x^2)x' + x = 0$ (ecuación de Van der Pol)

h. $t^2x'' + tx' + (t^2 - n^2)x = 0$ (ecuación de Bessel de orden n)

3. Demuestre que todas las ecuaciones diferenciales autónomas de segundo orden $x'' = R(x, x')$ se pueden transformar en la ecuación diferencial de primer orden $\frac{dy}{dx} = \frac{R(x,y)}{y}$, al introducir el cambio de variable $y = x'$, y $y' = \frac{dy}{dx}x'$. Esta ecuación proporciona las órbitas de $x'' = R(x, x')$ en el plano de fase.

4. Demuestre que todas las ecuaciones diferenciales de segundo orden de la forma $x'' = R(x, x')$ se pueden transformar a la ecuación de primer orden $\frac{dy}{dx} = R(t, y)$ al introducir $y = x'$.

5. Demuestre que la ecuación diferencial $a_2(t)x'' + a_1(t)x' + a_0(t)x = 0$ ($a_2 \neq 0$) puede escribirse como el sistema:

$$\begin{cases} x' = y. \\ y' = -\frac{a_0}{a_2} - \frac{a_1}{a_2}y - x \end{cases}$$

Al definir $y = x'/x$.

6. Convierta la ecuación de Van der Pol $x'' + a^2(1 - x^2)x' + x = 0$ en:

a. El sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x' = y. \\ y' = -a^2(1 - x^2)y - x \end{cases}$$

Al definir $y = x'$.

b. El sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x' = y - a^2(x - \frac{1}{3}x^3). \\ y' = -x \end{cases}$$

Al definir $y = x' + a^2(x - \frac{1}{3}x^3)$.

7. Convierta la ecuación de Liénard $x'' + g(x) x' + x = 0$ en el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x' = y - \int_0^x g(u) du. \\ y' = -x \end{cases}$$

Al definir $y = x' + \int_0^x g(u) du$.

8. Demuestre que el sistema:

$$\begin{cases} x' = y. \\ y' = -\operatorname{sen} x \end{cases}$$

Eliminando la variable dependiente da origen a la ecuación diferencial de segundo orden $x'' + \operatorname{sen} x = 0$. Explique por qué no es una ecuación diferencial lineal.

9. Demuestre que cualquier sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden de la forma:

$$\begin{cases} x' = a(t)x + b(t)y + f(t). \\ y' = c(t)x + d(t)y + g(t) \end{cases}$$

da origen a una ecuación diferencial lineal de segundo orden simple para x como función de t . ($x' = \frac{dx}{dt}$, $y' = \frac{dy}{dt}$).

10. Para cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales lineales, encuentre la ecuación diferencial lineal de segundo grado equivalente:

a. $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = -x + 2y \end{cases}$

b. $\begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = 2x - 2y \end{cases}$

c. $\begin{cases} x' = 5x - 2y + 3 \\ y' = 6x - 2y \end{cases}$

d. $\begin{cases} x' = -2x + yy \\ y' = 2x - y - t \end{cases}$

e. $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = -3x + 2y + \operatorname{cost} \end{cases}$

f. $\begin{cases} x' = -4x - 6y + 6e^{2t} \\ y' = x + y + 3e^{2t} \end{cases}$

11. El método de eliminación usado en los ejercicios 10.

También funciona para las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden que no estén en la forma dada por el ejercicio 9. Encuentre una ecuación diferencial de segundo grado al eliminar unas de las variables dependientes en los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales:

$$a. \begin{cases} x' + y' + y = 0 \\ 3x' + 2y' + x = 7 \end{cases}$$

$$b. \begin{cases} x' + y' + 2x = -e^t \\ 2x' - 2y' - y = 0 \end{cases}$$

$$c. \begin{cases} x' - 3y' - 4x = e^{2t} \\ 2x' - y' - y = 8 \end{cases}$$

$$d. \begin{cases} x' + 2x + y' = e^{-t} \\ 2tx' + 3y' + y = t - 3 \end{cases}$$

$$e. \begin{cases} tx' + x + y' = \cos t \\ 2x' - y' - y = -2\sin t \end{cases}$$

$$f. \begin{cases} x' + 2tx + y' = \sin t \\ 2tx' + 2y' + 5y = 0 \end{cases}$$

12. La forma general de una ecuación diferencial lineal de segundo grado homogénea con coeficientes constantes es:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p \frac{dy}{dt} + qy = 0$$

Escriba el sistema lineal de primer grado para esta ecuación y escríbala en forma matricial.

13. Convierta la ecuación de segundo orden:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 0$$

En un sistema de primer orden usando $v = dy/dt$ y escríbala.

14. Escribir cada sistema vectorial, como un sistema de ecuaciones diferenciales lineales.

$$a. \vec{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \vec{x}$$

$$c. \vec{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$b. \vec{x}' = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \vec{x} + e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$d. \vec{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \vec{x} + \text{sent} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

15. En los siguientes sistemas verifique que las funciones dadas los satisfacen; luego de una matriz fundamental $X(t)$ y la solución general del sistema.

$$a. \vec{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \vec{x}, \vec{u}(t) = \begin{bmatrix} e^{4t} \\ e^{4t} \end{bmatrix}, \vec{v}(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$b. \vec{x}' = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \vec{x}, \vec{u}(t) = \begin{bmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{bmatrix}, \vec{v}(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$c. \vec{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \vec{x}, \vec{u}(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ -2e^{-t} \end{bmatrix}, \vec{v}(t) = \begin{bmatrix} e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{bmatrix}$$

$$d. \vec{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \vec{x}, \vec{u}(t) = \begin{bmatrix} \text{sent} \\ \text{cost} \end{bmatrix}, \vec{v}(t) = \begin{bmatrix} \text{cost} \\ -\text{sent} \end{bmatrix}$$

16. Método numérico de Euler

Utilice el método numérico de Euler para cada uno de los siguientes sistemas:

a. Ejemplo 18. b. Ejemplo 19. c. Ejemplo 20.

Escoja en cada caso, como condición inicial el punto (1, 0) y como salto del paso 0.1

Encontrando trayectorias. Si la ecuación diferencial de primer orden:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cx + dy}{ax + by}$$

Se puede resolver para y como una función de x , la gráfica de tal función es la trayectoria en el plano de fase para el sistema:

$$x' = ax + by$$

$$y' = cx + dy$$

De manera alternativa, se pueden obtener trayectorias para resolver:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{ax + by}{cx + dy}$$

Para x como función de y use una o ambas técnicas para determinar y chequear las trayectorias en el plano de fase para los sistemas de los problemas 10 y 11. Prediga cómo la velocidad de un punto que viaja a lo largo de la trayectoria puede ser afectada por la posición del punto.

17. $x' = x$
 $y' = y$

18. $x' = y$
 $y' = -x$

El Wronskiano. Para un sistema lineal $n \times n$, $\vec{x}' = A(t)\vec{x}$, si $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$, son soluciones sobre el intervalo I y $X(t)$, que es la matriz cuyas columnas son los \vec{x}_i , entonces el determinante de X es llamado el Wronskiano de estas soluciones, y escribimos:

$$W = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n] = |X(t)|$$

Ya vimos que el Wronskiano de un conjunto de soluciones de una ecuación diferencial es idénticamente cero sobre I , 0 nunca es cero sobre I . Si el Wronskiano no es cero, las soluciones forman un conjunto fundamental. En los problemas 25 al 30, se dan las funciones soluciones de un sistema homogéneo. Calcular su Wronskiano en su orden para decidir si ellos forman un conjunto fundamental.

19. $\left\{ e^{2t} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

20. $\left\{ e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, e^{-t} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}$

21. $\left\{ e^t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

22. $\left\{ \begin{bmatrix} 3e^{4t} \\ e^{4t} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e^{4t} \\ e^{4t} \end{bmatrix} \right\}$

23. $\left\{ \begin{bmatrix} e^t \cos t \\ -e^t \sin t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e^t \sin t \\ e^t \cos t \end{bmatrix} \right\}$

24. $\left\{ \begin{bmatrix} \cos 3t \\ -\sin 3t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sin 3t \\ \cos 3t \end{bmatrix} \right\}$

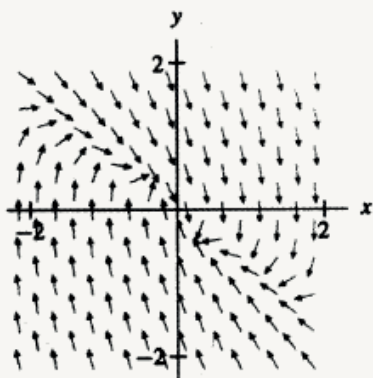
En los ejercicios 25 al 28 se da un sistema, una condición inicial, el salto del paso, y un entero n . También se proporciona el campo de direcciones para cada sistema.

Calcule la solución aproximada obtenida por el método de Euler para el punto inicial dado, para el salto del paso dado, para los n pasos pedidos.

Trace su solución sobre el campo de direcciones, y asegúrese de que esta solución sea coherente con el campo de direcciones.

$$25. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -2x - 3y \\ (x_0, y_0) = (1, 1) \\ \Delta t = 0.25 \\ n = 8 \end{cases}$$

Figura 25. Campo de direcciones.

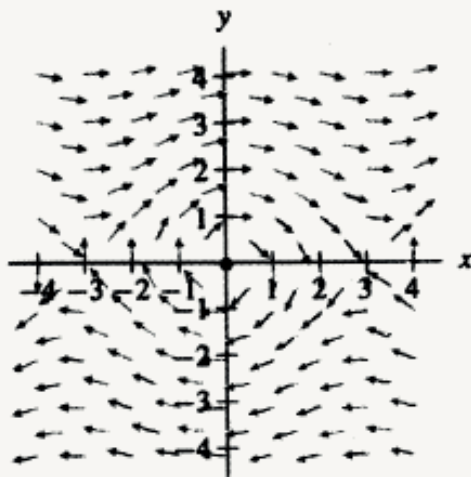


Fuente. Elaborado por el autor con el programa Geogebra.

$$26. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -\text{sent} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x_0, y_0) = (0, 2) \\ \Delta t = 0.25 \\ n = 10 \end{cases}$$

Figura 26. Campo de direcciones.

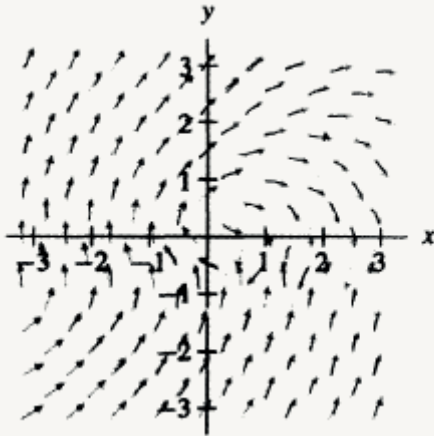


Fuente. Elaborada por el autor con el programa Geogebra.

$$27. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + y^2 \\ \frac{dy}{dt} = -x + \frac{y}{5} - xy + \frac{6y^2}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x_0, y_0) = (1, 1) \\ \Delta t = 0.25 \\ n = 5 \end{cases}$$

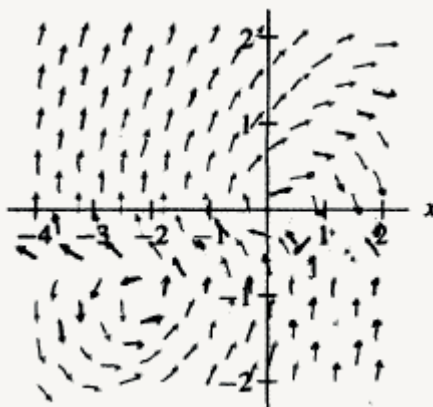
Figura 27. Campo de direcciones.



Fuente. Elaborada por el autor con el programa Geogebra.

$$28. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + y^2 \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{x}{2} + \frac{y}{5} - xy + \frac{6y^2}{5} \\ (x_0, y_0) = (1, 1) \\ \Delta t = 0.25 \\ n = 5 \end{cases}$$

Figura 28. Campo de direcciones.



Fuente. Elaborada por el autor con el programa Geogebra.

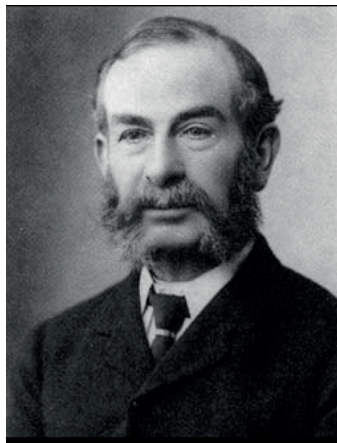
Para los ejercicios 29, 30 y 31 considere el sistema:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -x + 3y \\ \frac{dy}{dt} &= -3x - y\end{aligned}$$

29. Verifique que $Y_1 = (e^{-t}\text{sen}(3t), e^{-t}\text{cos}(3t))$ es una solución del sistema.
30. Compruebe que $Y_2 = (e^{-3(t-1)}\text{sen}(3(t-1)), e^{-3(t-1)}\text{cos}(3(t-1)))$ es una solución.
31. Esboce las curvas solución $Y_1(t), Y_2(t)$ en el plano de fase $x - y$.
¿Por qué $Y_1(t), Y_2(t)$ no contradicen el teorema de unicidad?

10.8 Solución de sistemas lineales usando vectores y valores propios reales de la matriz

Figura 29. Edward John Routh (1831-1907).



Fuente. Wikipedia.

Routh nació el 20 de enero de 1831 en Quebec Canadá y murió el 7 de junio de 1907 en Londres, Inglaterra. Fue un matemático inglés quien trabajó sobre la teoría matemática para la sistematización de la mecánica, y creó varias ideas críticas para el desarrollo de la moderna teoría del control.

Empezamos por las soluciones para el caso de un sistema 2×2 , de la forma:

$$\vec{X}' = \mathbf{A} \cdot \vec{X} \quad (26)$$

Donde A es una matriz constante. De lo que hemos aprendido acerca de las soluciones de la ecuación diferencial lineal:

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (27)$$

Aunque el sistema es más general, sabemos que existe una conexión subyacente, entre el sistema y la ecuación diferencial lineal de segundo orden. Cuando la ecuación es convertida a un sistema equivalente, los valores propios de la matriz del sistema son las raíces de la ecuación característica para la ecuación de segundo orden. ¿Cómo podemos hacer uso de este hecho? Si r_1 y r_2 son las raíces características para la ecuación (27), las soluciones son las bases para construir $e^{r_1 t}$ y $e^{r_2 t}$. Necesitamos encontrar las correspondientes bases para construir las soluciones para el sistema (26).

Como las soluciones de (26) son vectores, entonces intentaremos soluciones de la forma:

$$\vec{x} = e^{\lambda t} \vec{v} \quad (28)$$

Sustituyendo (28) en (26) nos da:

$$\lambda e^{\lambda t} \vec{v} = A e^{\lambda t} \vec{v}$$

Esto es equivalente a:

$$e^{\lambda t} A \vec{v} - \lambda e^{\lambda t} I \vec{v} = \vec{0}$$

Factorizando se tiene:

$$e^{\lambda t} (A - \lambda I) \vec{v} = \vec{0}$$

Como $e^{\lambda t}$ nunca es cero, entonces se tiene que se deben encontrar λ y \vec{v} tal que:

$$(A - \lambda I) \vec{v} = \vec{0} \quad (28)$$

La ecuación característica de la matriz y:

$$p(\lambda) = [\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}] = 0$$

Y esta es llamada: el **polinomio característico de A**, ecuación característica para los valores propios.

Para un escalar λ y un vector no cero \vec{v} que satisface (28), son ni más ni menos que el valor propio y el vector propio de la matriz A. Luego tenemos lo siguiente: **Soluciones de sistemas de ecuaciones 2x2, homogéneas con coeficientes constantes.**

Para un sistema de ecuaciones diferenciales lineales homogéneo 2×2 $\vec{X}' = \mathbf{A} \cdot \vec{X}$, donde A es una matriz de constantes que tiene valores propios λ_1 y λ_2 con sus correspondientes vectores propios \vec{v}_1 y \vec{v}_2 , se tienen las soluciones:

$$e^{\lambda_1 t} \vec{v}_1 \text{ y } e^{\lambda_2 t} \vec{v}_2$$

Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, estas dos soluciones son linealmente independientes y forman una base para el espacio solución. Entonces la solución general para constantes arbitrarias c_1 y c_2 es:

$$\vec{X}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \vec{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \vec{v}_2 \quad (29)$$

Si $\lambda_1 = \lambda_2$, entonces existe un solo vector propio linealmente independiente, tácticas adicionales se requieren para obtener una base de dos vectores para el espacio solución (en la siguiente unidad veremos cómo se trabaja este caso).

Del estudio del algebra lineal y en particular de las matrices y sus vectores y valores propios, sabemos que debemos esperar diferentes resultados dependiendo de la naturaleza de ellos ¿Son ellos reales o no reales? Si son reales, ¿ellos son distintos? En esta

sección estudiaremos los casos que involucran valores propios reales (primero distintos y luego repetidos). El caso no real, es decir raíces complejas, lo veremos en la sección siguiente.

Valores propios reales y distintos

Si una matriz A tiene dos valores propios reales. $\lambda_1 \neq \lambda_2$, con los correspondientes vectores propios \vec{v}_1 y \vec{v}_2 , entonces \vec{v}_1 y \vec{v}_2 son linealmente independientes (ver en álgebra lineal, el teorema de valores propios distintos). Usaremos este hecho para mostrar que $e^{\lambda_1 t} \vec{v}_1$ y $e^{\lambda_2 t} \vec{v}_2$ son también linealmente independientes. En efecto si:

$$c_1 e^{\lambda_1 t} \vec{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \vec{v}_2 = \vec{0}$$

Entonces para $t = 0$:

$$c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2 = \vec{0}, \text{ y } c_1 = c_2 = 0$$

Luego estas soluciones forman un conjunto fundamental de soluciones.

Ejemplo 18. Valores propios con signos opuestos:

Encontrar la solución general de:

$$\vec{X}' = \mathbf{A} \cdot \vec{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \vec{X},$$

Solución:

Paso 1. El polinomio característico de A es:

$$p(\lambda) = [\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}] = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 4 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

Paso 2: Por lo tanto:

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0_1$$

Lo anterior implica que:

$$\lambda_1 = -1 \text{ y } \lambda_2 = 3$$

Paso 3. Para encontrar los vectores propios resolvemos la ecuación (28).

Para $\lambda_1 = -1$. Tenemos que resolver la ecuación matricial:

$$(A - (-1)I)\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{1} - (-1) & \mathbf{1} \\ \mathbf{4} & \mathbf{1} - (-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \vec{0}$$

La matriz aumentada del sistema homogéneo es:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{array} \right], \text{ la cual se puede llevar a la matriz reducida } \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Luego se tiene $v_1 = -\frac{1}{2}v_2$, por lo tanto para $s \neq 0$:

$$\vec{v}_1 = s \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ -\mathbf{2} \end{bmatrix} \text{ Para } \lambda_1 = -1$$

Para $\lambda_2 = 3$, tenemos que resolver:

$$(A - 3I)\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{1} - \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{4} & \mathbf{1} - \mathbf{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \vec{0}$$

La matriz aumentada del sistema es:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \end{array} \right], \text{ la cual se puede llevar a la matriz reducida:}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Luego, $v_1 = \frac{1}{2}v_2$. Tomando $v_2 = 2s$, se tiene que $v_1 = s$, para $s \neq 0$

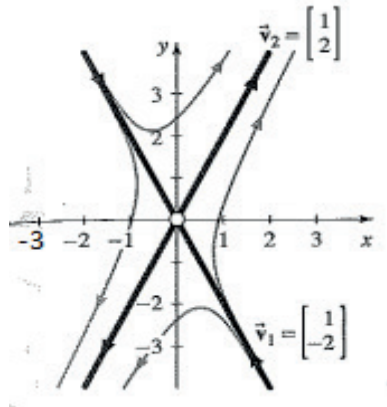
$$\vec{v}_2 = s \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \end{bmatrix} \text{ Para } \lambda_2 = 3$$

Entonces la solución general del sistema es:

$$\vec{X} = c_1 e^{-t} \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ -\mathbf{2} \end{bmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \end{bmatrix}$$

Algunas muestras de las trayectorias sobre el plano de fase se dan en la figura 30, con los vectores propios en negrilla.

Figura 30. Gráficas de algunas trayectorias del sistema dado.



Fuente. Elaborada por el autor con el programa Derive.

Ejemplo 19. Valores propios positivos:

Resolver el sistema:

$$\vec{X}' = \mathbf{A} \cdot \vec{X} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \vec{X},$$

Solución:

Primero calculamos los valores propios, mediante el polinomio característico:

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & 2 \\ 1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ o } \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$$

Luego los valores propios son:

$$\lambda_1 = 4 \text{ y } \lambda_2 = 1$$

Y los correspondientes vectores propios son:

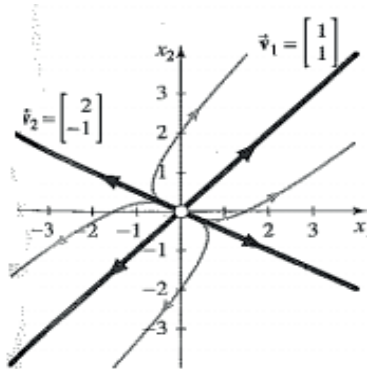
$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la solución general está dada por:

$$\vec{X} = c_1 e^{4t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^t \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Como se muestra en la siguiente figura, las trayectorias del plano de fase se alejan de un equilibrio inestable al origen.

Figura 31. Gráficas de algunas trayectorias del sistema dado.



Fuente. Elaborada por el autor con el programa Derive.

Ejemplo 20. Valores propios negativos:

Resolver el sistema con valor inicial:

$$\vec{X}' = \mathbf{A} \cdot \vec{X} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \vec{X}, \quad \vec{X}(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Solución:

Primero calculamos los valores propios, mediante el polinomio característico.

$$\begin{vmatrix} -2 - \lambda & 1 \\ 1 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ o } \lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$$

Luego los dos valores propios son:

$$\lambda_1 = -1 \text{ y } \lambda_2 = -3$$

Los vectores propios correspondientes son:

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Luego la solución general del sistema es:

$$\vec{X} = c_1 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Luego para los valores iniciales tenemos:

$$\vec{X}(0) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Construyendo la matriz aumentada, se tiene:

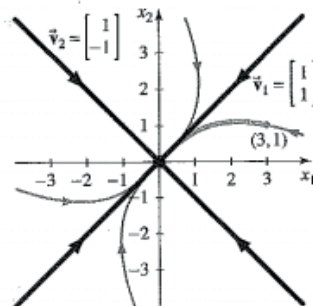
$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{array} \right] \text{ Reduciéndola se tiene: } \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

Por lo tanto $c_1 = 2$ y $c_2 = 1$. Luego la solución particular es:

$$\vec{X} = 2e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + e^{-3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} + e^{-3t} \\ 2e^{-t} - e^{-3t} \end{bmatrix}$$

La figura 32 muestra algunas soluciones generales, que se mueven hacia un equilibrio estable en el origen. La curva gris es la solución al problema con valor inicial.

Figura 32. Gráfica de la solución particular al problema dado.



Fuente. Elaborada por el autor con el programa Derive.

Comportamiento de las soluciones

Los sistemas dados en los ejemplos 17, 18 y 19, exhiben diferentes retratos de fases, porque cada uno de ellos depende de varias combinaciones de los signos de sus valores propios. Recapitulamos las principales posibilidades de raíces características reales diferentes que se mostraron en los ejemplos anteriores.

- En el ejemplo 19, se tiene un equilibrio estable. Todas las trayectorias tienden hacia el origen cuando $t \rightarrow \infty$, porque ambos valores propios son negativos. Además, porque e^{-3t} decrece más rápidamente que e^{-t} , las soluciones que no se encuentran en las líneas a lo largo de los vectores propios se aproximan al origen asintótico en la dirección de la disminución más lenta.
- En el ejemplo 18 se tiene un equilibrio inestable. Todas las trayectorias tienden a ∞ cuando $t \rightarrow \infty$, porque ambos valores propios son positivos. Pero en tiempo atrás, cuando $t \rightarrow -\infty$ hacia el origen en un patrón similar al del ejemplo 19. La única diferencia entre estos casos es un cambio de dirección del flujo hacia fuera para el ejemplo 18, hacia adentro para el ejemplo 19.
- En ejemplo 17 (figura 30) es un equilibrio de silla. Con un valor propio positivo y otro negativo, el comportamiento a lo largo de los vectores propios es diferente. Hacia adentro para el valor negativo y hacia afuera para el valor positivo. Las trayectorias entre los sectores de estas direcciones hacia adentro a lo largo del valor propio negativo, y hacia afuera a lo largo de la dirección del valor propio positivo.

Más adelante seguiremos hablando acerca de estos retratos de fase.

Esbozo de retratos de fase para sistemas 2X2

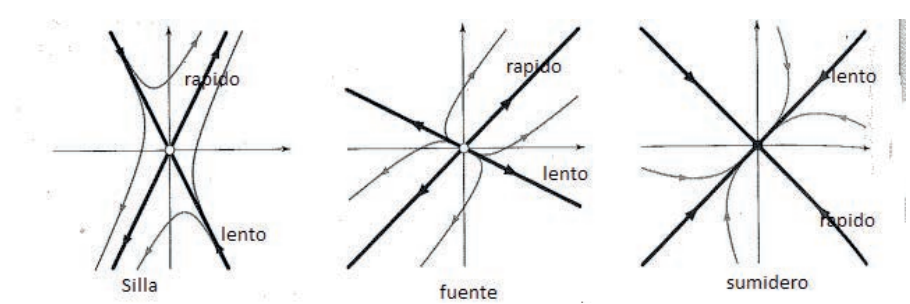
A menudo se usan computadores para trazar retratos de fase como los de las figuras 18, 19 y 20. Le resultará conveniente poder dibujar trayectorias a mano. En el caso de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales, tenemos (podríamos haber observado) una herramienta muy poderosa para esbozar retratos de fase: los valores y vectores propios. A través de esta sección veremos que todas las trayectorias son «guiadas» por estos dones del álgebra lineal. El material de estos regalos del álgebra lineal será cubierto en detalle en las próximas secciones, pero podemos usar los siguientes principios para dibujar un retrato de fase.

Regla para trazar el plano de fase a partir de los valores y vectores propios

Para un sistema de ecuaciones diferenciales lineales **autónomo y homogéneo de dimensión dos**.

- Las trayectorias se desplazan o se alejan del equilibrio, de acuerdo con el signo de los valores propios (negativos o positivos, respectivamente) asociados con los vectores propios.
- A lo largo de cada vector propio existe y, la única trayectoria llamada una **tractriz** que separa las trayectorias que curvan de una manera de las que curvan de otra manera.
- El equilibrio ocurre en el origen, y el retrato de fase es simétrico alrededor de este punto.

Para sistemas 2X2 con valores propios reales diferentes, hay tres posibles combinaciones de signos para los valores propios, signos opuestos, ambos positivos o ambos negativos. Cada posibilidad da un tipo particular de equilibrio, como se mostró en los ejemplos 17, 18 y 19, y se resume al final con la figura 33.

Figura 33. Tipos de equilibrio para los ejemplos 17, 18, y 19.

Fuente. Elaborada por el autor con el programa Derive.

En adición de las propiedades anteriores y a los principios conocidos se da un rápido bosquejo del retrato de fase, como sigue:

- Trazar los vectores propios con flechas de acuerdo con el signo de los valores propios.
- Todas las trayectorias deben seguir el campo vectorial.
- El teorema de existencia y unicidad, nos dice que las trayectorias en el plano de fase no pueden cortarse (las trayectorias en el plano de fase puede parecer que se encuentren en el punto de equilibrio, pero realmente nunca lo consigue allí).

Ejemplo 21. Construyendo un campo vectorial:

Escribir el ejemplo 17 en forma de componentes de ecuaciones diferenciales y trazar unos pocos elementos con las pendientes determinadas por dichas ecuaciones.

Solución:

Nuestro sistema matricial se convierte en:

$$x' = f(x, y) = x + y$$

$$y' = g(x, y) = 4x + y$$

Y trazando (figura 34) unos pocos elementos de vectores con pendientes como siguen:

En $(1, 0)$, $x' = 1, y' = 4$, derecha 1, arriba 4.

En $(1, 1)$, $x' = 2, y' = 5$, derecha 1, arriba 5.

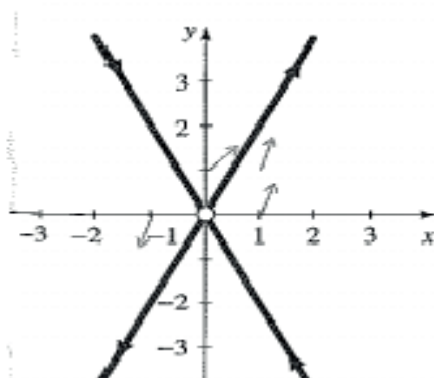
En $(0, 1)$, $x' = 1, y' = 1$, derecha 1, arriba 1.

En $(-1, 0)$, $x' = -1, y' = -4$, izquierda 1, abajo 4.

En $(0, 0)$, $x' = 0, y' = 0$, no se mueve.

El sistema está en equilibrio en el origen.

Figura 34. Gráfica del sistema con un equilibrio en el origen.



Fuente. Elaborada por el autor con el programa Derive.

Velocidad y forma de las trayectorias

Recordemos que si \vec{x} es un vector en el plano entonces su velocidad está dada por:

$$\text{Velocidad} = \|\vec{x}\| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

- La «velocidad» a lo largo de una trayectoria en la dirección de un vector propio depende de la magnitud (valor absoluto) del valor propio asociado: «rápido» para el valor propio con magnitud grande, o «pequeño» para el valor propio con magnitud pequeña.
- Las trayectorias se hacen paralelas a los vectores propios rápidos más alejados del origen, y tangentes a los vectores propios lentos, más próximos al origen, esto en los casos de fuente o sumidero, más allá del origen de una silla de montar.

En la figura 33 se observan "rápido" y "lento" correspondientes a los flujos de los ejercicios 17, 18 y 19.

Valores propios repetidos

Si la ecuación característica tiene una doble raíz, pueden existir dos vectores propios linealmente independientes que pertenezcan a ella, o puede haber solo uno. Si hay dos, no se necesita nada nuevo, pero si no hay un segundo vector propio independiente, debe encontrarse una solución de forma diferente.

En el caso 2×2 , espacio propio perteneciente a un valor propio doble, puede tener dos dimensiones solo si la matriz es un múltiplo de la matriz idéntica (ver ejercicio). Vemos las consecuencias en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 22. Valores propios repetidos:

Resolver el sistema:

$$\vec{x}' = \mathbf{A} \cdot \vec{x} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \vec{x},$$

Solución:

Observemos que la matriz \mathbf{A} , se puede escribir en la forma:

$$\mathbf{A} = 3 \cdot \mathbf{I}$$

Luego \mathbf{A} tiene un valor propio repetido:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 3$$

Y dos vectores linealmente independientes, los cuales son:

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ y } \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La solución general es:

$$\vec{x} = c_1 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{3t} \\ c_2 e^{3t} \end{bmatrix}$$

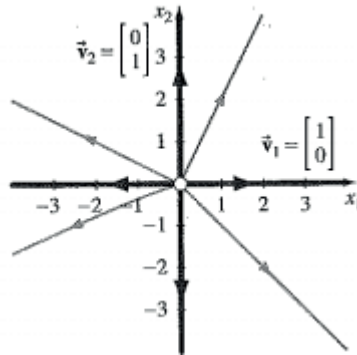
Todas las soluciones tienden a infinito cuando $t \rightarrow \infty$, y al origen cuando $t \rightarrow -\infty$, como se muestra en la figura 35 (para valores propios negativos, las direcciones se invierten) todas las trayectorias se extienden a lo largo de la mitad de la línea que se extiende desde el equilibrio inestable en el origen.

Observemos que el sistema dado se puede escribir como:

$$x_1' = 3x_1$$

$$x_2' = 3x_2$$

Y es claro que $x_1 = c_1 e^{3t}$ y $x_2 = c_2 e^{3t}$, luego $x_2 = \left(\frac{c_2}{c_1}\right) x_1$. Este es un ejemplo de un sistema desacoplado.

Figura 35. Gráfica de un sistema desacoplado.

Fuente. Elaborada por el autor con el programa Derive.

Ejemplo 23. Un vector propio tímido:

Resolver el sistema:

$$\vec{x}' = \mathbf{A} \cdot \vec{x} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \vec{x}, \quad (30)$$

Solución:

Primero calculamos los vectores propios para la matriz \mathbf{A} , y encontramos que el valor propio es repetido, es decir:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 4$$

Y entonces tenemos un único vector propio:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

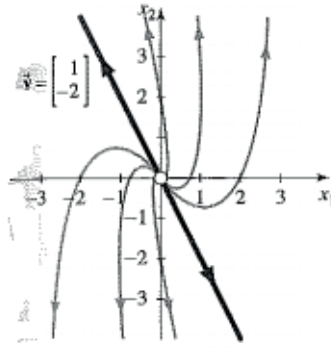
Luego una solución es:

$$\vec{x}_1 = e^{4t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Pero un sistema 2×2 necesita otra solución para formar una base para el espacio solución. Podemos ver esta necesidad si dibujamos un retrato de fase rápida (Gráficas de soluciones del sistema dado) de

isóclinas y vectores para algunos puntos seleccionados, o usamos un software de resolución de ecuaciones diferenciales mediante gráficos por una computadora, como se muestra en la figura 36.

Figura 36.



Fuente. Elaborada por el autor con el programa Derive.

El truco es muy similar al que usamos cuando resolvimos ecuaciones de segundo orden con coeficientes constantes, cuando la ecuación característica tiene raíces repetidas. Si tratamos con:

$$\overline{\mathbf{x}}_2 = te^{4t}\overline{\mathbf{v}} \quad (31)$$

Sustituimos en la ecuación inicial dada, y esta solución desaparece, como podemos demostrar.

Derivando $\overline{\mathbf{x}}_2$ tenemos:

$$\overline{\mathbf{x}}_2' = e^{4t}\overline{\mathbf{v}} + 4te^{4t}\overline{\mathbf{v}}$$

Y sabemos que $A\overline{\mathbf{v}} = \lambda\overline{\mathbf{v}}$, luego:

$$A\overline{\mathbf{x}}_2 = Ate^{4t}\overline{\mathbf{v}} = \lambda te^{4t}\overline{\mathbf{v}} = 4te^{4t}\overline{\mathbf{v}}$$

De la ecuación diferencial $\overline{\mathbf{x}}_2' = A\overline{\mathbf{x}}_2$, se convierte en:

$$e^{4t}\vec{v} + 4te^{4t}\vec{v} = te^{4t}A\vec{v}$$

La cual es verdadera únicamente si $\vec{v} = \vec{0}$, lo cual es una contradicción.

Una mejor conjetura para la segunda solución (linealmente independiente) a la ecuación del sistema anterior del ejemplo (22) es involucrar otro vector. El siguiente ejemplo introducirá un procedimiento útil complementar la búsqueda del segundo vector.

Ejemplo 23. Un vector propio tímido: en la búsqueda:

Buscar una segunda solución para el ejemplo del ejercicio (22).

Solución:

Todavía buscamos una segunda solución a la ecuación del ejemplo (22). Ya que la ecuación $e^{4t}\vec{v} + 4te^{4t}\vec{v} = te^{4t}A\vec{v}$ contiene términos en ambos lados, de la forma e^{4t} y $4te^{4t}$, luego parece razonable añadir a nuestro intento fallido al tomar (31) otro término que multiplica al molesto e^{4t} por el nuevo vector \vec{u} . Así que intentamos con

$$\vec{x}_2 = te^{4t}\vec{v} + e^{4t}\vec{u}$$

Derivando, se tiene:

$$\vec{x}_2' = e^{4t}\vec{v} + 4te^{4t}\vec{v} + 4e^{4t}\vec{u}$$

y reemplazando en la ecuación diferencial (30), se tiene:

$$e^{4t}\vec{v} + 4te^{4t}\vec{v} + 4e^{4t}\vec{u} = A(te^{4t}\vec{v} + e^{4t}\vec{u})$$

Igualando los coeficientes de te^{4t} y e^{4t} tenemos $4\vec{v} = A\vec{v}$ y $\vec{v} + 4\vec{u} = A\vec{u}$, o:

$$(A - I)\vec{v} = \vec{0} \text{ y } (A - 4I)\vec{u} = \vec{v} \quad (32)$$

Para resolver estas ecuaciones, para encontrar \vec{u} y \vec{v} , observemos que de la primera ecuación se tiene a \vec{v} , el vector propio correspondiente al valor propio $\lambda = 4$. Sabemos que $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Este valor del vector \vec{v} lo podemos reemplazar en la segunda ecuación de (32) para encontrar \vec{u} :

$$(A - 4I)\vec{u} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Luego $u_1 + \frac{1}{2}u_2 = -\frac{1}{2}$. Si hacemos $u_1 = k$, entonces $u_2 = -2k - 1$, y:

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} k \\ -2k - 1 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$\vec{x}_2 = te^{4t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + ke^{4t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + e^{4t} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Podemos suprimir el término de la mitad ya que este es un múltiplo de nuestra primera solución para \vec{x}_1 , luego la segunda solución es:

$$\vec{x}_2 = te^{4t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + e^{4t} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = e^{4t} \begin{bmatrix} t \\ -2t - 1 \end{bmatrix}$$

Se puede demostrar fácilmente que estas dos soluciones son linealmente independientes (se deja como ejercicio). La solución general es entonces:

$$\vec{x} = c_1 \vec{x}_1 + c_2 \vec{x}_2 = c_1 e^{4t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + c_2 e^{4t} \begin{bmatrix} t \\ -2t - 1 \end{bmatrix}$$

La figura 33 (ejemplo 22) muestra trayectorias típicas en el plano de fase para el sistema dado, el cual tiene un equilibrio inestable en el origen. El valor propio positivo hace que todas las soluciones tiendan a infinito a lo largo de una trayectoria que va paralela al vector propio cuando $t \rightarrow \infty$. Cuando $t \rightarrow -\infty$, la solución tiende hacia el origen, asintóticamente a la línea $x_2 = -2x_1$ a lo largo de un único

vector. El vector propio generalizado \vec{u} incluye una variable t , por lo que no puede dibujarse como un segundo vector estable en el retrato de fase.

Creando un vector propio generalizado para un sistema con vectores propios insuficientes

Si un sistema lineal homogéneo 2×2 de ecuaciones diferenciales de primer orden tiene un valor propio λ repetido con un solo vector propio, una segunda solución linealmente independiente puede ser creada como sigue:

Paso 1. Encuentre un vector propio \vec{v} correspondiente a λ .

Paso 2. Encuentre un vector no cero \vec{u} tal que:

$$(A - \lambda I)\vec{u} = \vec{v}$$

Paso 3. Entonces:

$$\vec{x}(t) = c_1 e^{\lambda t} \vec{v} + c_2 e^{\lambda t} (t\vec{v} + \vec{u})$$

El vector \vec{u} es llamado un vector propio generalizado de A correspondiente a λ .

Generalización a dimensiones superiores

En esta sección nos hemos concentrado en sistemas de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas en dos dimensiones con coeficientes constantes. Muchos de los resultados pueden ser generalizados a sistemas de n dimensiones como sigue.

Resolviendo ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de dimensión n con coeficientes constantes.

Para un sistema de dimensión n de ecuaciones diferenciales

lineales $\vec{x}' = \mathbf{A} \cdot \vec{x}$, donde \mathbf{A} es una matriz de constantes que tiene valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ con correspondientes vectores propios $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$, se tienen soluciones:

$$e^{\lambda_1 t} \vec{v}_1, e^{\lambda_2 t} \vec{v}_2, \dots, e^{\lambda_n t} \vec{v}_n,$$

Si $\lambda_i \neq \lambda_j$ para toda i, j con $i \neq j$, estas soluciones son **linealmente independientes** y forman una base para el espacio solución. Luego la solución general, para constantes arbitrarias $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathcal{R}$, es:

$$\vec{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \vec{v}_2 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} \vec{v}_n$$

En el caso de valores propios repetidos ($\lambda_i = \lambda_j$ para $i \neq j$) requiere ya sean vectores propios independientes o vectores propios generalizados.

Ejemplo 25. Valores propios repetidos en 3D:

Resolver el sistema:

$$x' = 3x + y - z$$

$$y' = x + 3y - z$$

$$z' = 3x + 3y - z$$

Solución:

Este sistema en forma matricial es:

$$\vec{x}' = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{bmatrix} \vec{x}$$

La ecuación característica para la matriz \mathbf{A} , es $|(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})| = 0$, es decir $\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = 0$, de donde se obtienen los valores propios:

$$\lambda_1 = 1, \text{ y } \lambda_2 = \lambda_3 = 2$$

Y para obtener los vectores propios correspondientes, resolvemos para $\lambda_1 = 1$, la ecuación matricial:

$$(\mathbf{A} - \mathbf{1I})\vec{v}_1 = \vec{0}$$

De donde:

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

De manera similar para $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$, usamos el proceso para valores propios repetidos, y obtenemos:

$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

El valor propio doble tiene dos vectores propios linealmente independientes. Como se ha encontrado un conjunto fundamental de soluciones para el sistema de ecuaciones diferenciales, así:

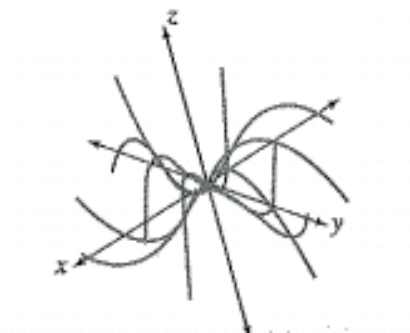
$$\vec{x}_1 = e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \vec{x}_2 = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{x}_3 = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Luego, la solución general para el sistema dado es:

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = c_1 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Algunas de las trayectorias se muestran en la figura 37. En dicha figura tridimensional se observa que todas las trayectorias emanan de una vecindad infinitesimal del origen.

Figura 37. Gráfica tridimensional de las trayectorias del sistema.



Fuente. Elaborada por el autor con el programa Derive.

El método para resolver sistemas con insuficientes vectores propios, extendidos a lo visto de sistemas de dimensión 2×2 a dimensión superior. Para valores propios de multiplicidad m , con vectores propios menores que m , podemos encontrar un valor propio $\bar{\nu}$ para otra solución de la forma:

$$\overrightarrow{x(t)} = e^{\lambda t}(t\bar{\nu} + \bar{u})$$

10.9 Ejercicios

En los problemas 1 al 4 encuentre las soluciones constantes $x(t) \equiv K$ para cada ecuación de segundo grado y determine el comportamiento como sigue:

- I. Reescribiendo la ecuación como un sistema de dos ecuaciones lineales de primer orden.
- II. Encuentre la solución(es) de equilibrio del sistema equivalente de primer orden.
- III. Deduzca el comportamiento de las trayectorias cerca del punto fijo cuando $t \rightarrow \infty$, por ejemplo, volando lejos del punto fijo, orbitando lejos de él o acercándose a él.
- IV. Describa el comportamiento físico de las soluciones para la ecuación diferencial. Diga qué significa esto para un problema masa resorte.

1. $x'' + x' + x = 0$

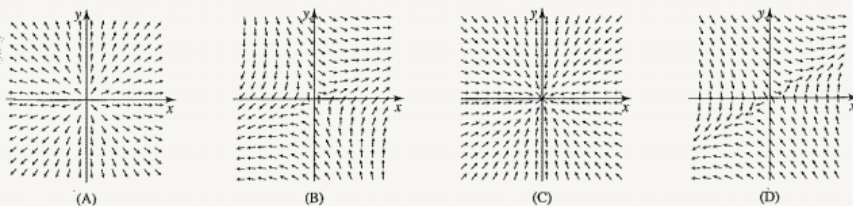
2. $x'' - x' + x = 0$

3. $x'' + x = 1$

4. $x'' + 2x' + x = 2$

Haga coincidir cada sistema de los problemas del 5 al 8 con uno de los campos vectoriales de la figura 38.

Figura 38. Campos vectoriales para los sistemas dados.



Fuente. Elaborados por el autor con el programa Geogebra.

$$5. \begin{aligned} x' &= x \\ y' &= y \end{aligned}$$

$$6. \begin{aligned} x' &= -x \\ y' &= -y \end{aligned}$$

$$7. \vec{X}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \vec{X}$$

$$8. \vec{X}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \vec{X}$$

Valores propios reales diferentes. Encuentre la solución general para los problemas 9 al 22. Chequee los vectores propios y trace unas pocas trayectorias típicas.

$$9. \vec{X}' = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \vec{X}$$

$$10. \vec{X}' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \vec{X}$$

$$11. \vec{X}' = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \vec{X}$$

$$12. \vec{X}' = \begin{bmatrix} 10 & -5 \\ 8 & -12 \end{bmatrix} \vec{X}$$

$$13. \vec{X}' = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \vec{X}$$

$$14. \vec{X}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \vec{X}$$

$$15. \vec{X}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \vec{X}$$

$$16. \vec{X}' = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \vec{X}$$

$$17. \vec{X}' = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \vec{X}$$

$$18. \vec{X}' = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} \vec{X}$$

$$19. \vec{X}' = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \vec{X}$$

$$20. \vec{X}' = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} \vec{X}$$

$$21. \vec{X}' = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 8 & -6 \end{bmatrix} \vec{X}$$

$$22. \vec{X}' = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \vec{X}$$

Valores propios repetidos. Encuentre las soluciones generales para los problemas 23 y 24. Trace los vectores propios y algunas trayectorias típicas.

$$23. \vec{X}' = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \vec{X}$$

$$24. \vec{X}' = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -8 & -5 \end{bmatrix} \vec{X}$$

Soluciones particulares. Resuelva los problemas con valor inicial del 25 al 34.

$$25. \vec{X}' = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} \vec{X}, \quad \vec{X}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$26. \vec{X}' = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \vec{X}, \quad \vec{X}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$27. \vec{X}' = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \vec{X}, \vec{X}(0) = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$28. \vec{X}' = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \vec{X}, \vec{X}(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$29. \vec{X}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \vec{X}, \vec{X}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$30. \vec{X}' = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \vec{X}, \vec{X}(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$31. \vec{X}' = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \vec{X}, \vec{X}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$32. \vec{X}' = \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \vec{X}, \vec{X}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$33. \vec{X}' = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \vec{X}, \vec{X}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$34. \vec{X}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \vec{X}, \vec{X}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

35. Creando nuevos problemas

- Encuentre una matriz 3×3 con valores propios de multiplicidad dos, es decir $\lambda_1 = \lambda_2$ que tienen solo un vector propio y otro valor propio $\lambda_3 \neq \lambda_1$ con su vector propio.
 - Encuentre una matriz 3×3 con un valor propio de multiplicidad tres y dos vectores linealmente independientes.
-

36. Teoría de valores propios repetidos. Suponga que:

$$\vec{X}' = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \vec{X}$$

- Muestre que el sistema tiene un valor propio de multiplicidad dos si y solo si la condición $(a - b)^2 + 4bc = 0$ se satisface, y que el valor propio es $\frac{1}{2}(a + d)$.

- b. Muestre que si la condición en a se satisface y $a = d$, el espacio propio tiene que ser de dimensión dos solo si la matriz:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

es una matriz diagonal.

- c. Muestre que si la condición a se satisface y $a \neq d$, los vectores propios pertenecientes a $\frac{1}{2}(a + d)$ son linealmente dependientes, es decir, que son múltiplos escalar de:

$$\begin{bmatrix} 2b \\ d - a \end{bmatrix}$$

- d. Muestre que la solución general del sistema con valores propios de multiplicidad dos y $a \neq d$ es:

$$c_1 e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 2b \\ d - a \end{bmatrix} + c_2 e^{\lambda t} \left(t \begin{bmatrix} 2b \\ d - a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$$

Donde $\lambda = \frac{1}{2}(a + d)$

37. Para la ecuación (30) del ejercicio 22. Muestre los cálculos para los vectores en los puntos que usted elija. Confirme que su resultado tenga las mismas características que la figura 36. Luego chequee algunas trayectorias sobre su gráfica.

38. Vectores propios generalizados. Supongamos que deseamos extender el método descrito para encontrar un vector propio generalizado para encontrar dos (o más) vectores propios generalizados. Examinemos el caso en el que el valor propio λ tiene multiplicidad 3 pero solo tiene un vector propio \vec{v} , linealmente independiente. Primero encontramos \vec{u}_1 , por el método descrito en esta sección. Luego encontramos un vector \vec{u}_2 , tal que: escriba aquí la ecuación

$$(A - \lambda I)\vec{u}_2 = \vec{u}_1 \quad 0, \quad (A - \lambda I)^2 \vec{u}_2 = \vec{v}$$

(Continuamos de esta manera para obtener $\vec{v}, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_r$ para $r < m$, donde m es la multiplicidad de λ y r es el número de vectores propios «ausentes» para λ).

a. Muestre que:

$$\begin{aligned}\vec{x}_1 &= e^{\lambda t} \vec{v} \\ \vec{x}_2 &= (t\vec{v} + \vec{u}_1) e^{\lambda t} \\ \vec{x}_3 &= \left(\frac{1}{2} t^2 \vec{v} + t\vec{u}_1 + \vec{u}_2\right) e^{\lambda t}\end{aligned}$$

Son soluciones del sistema $\vec{X}' = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \vec{X}$, dado que $A \cdot \vec{v} = \lambda \vec{v}$, λ tiene multiplicidad 3 y $r = 2$.

b. Muestre que los vectores $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ son linealmente independientes.

c. Resuelva el sistema:

$$\vec{X}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{X}$$

- 39. Un vector propio independiente. Considere $\vec{X}' = A\vec{X}$ para:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

a. Muestre que A tiene un valor propio $\lambda = 1$ de multiplicidad 3 y que todos los vectores propios son múltiplos escalares de:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

b. Use la parte a para encontrar soluciones del sistema de la forma:

$$\vec{x}_1 = e^{t\vec{v}}$$

c. Encuentre una segunda solución de la forma:

$$\vec{x}_2 = (t\vec{v} + \vec{u}) e^t$$

donde el vector \vec{u} está bien determinado. Ayuda: encuentre \vec{u} que satisfaga $(A - \lambda I)\vec{u} = \vec{v}$.

d. Use el resultado de la parte c para encontrar la tercera solución del sistema de la forma:

$$\vec{x}_3 = \left(\frac{1}{2} t^2 \vec{v} + t\vec{u} + \vec{w} \right) e^t$$

Ayuda: encuentre \vec{w} que satisfice $(A - I)\vec{w} = \vec{u}$.

Soluciones en el espacio. Encontrar las soluciones generales para los problemas 40 y 41:

40.

$$41. \vec{X} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \vec{X}$$

Obtenga soluciones particulares para los problemas con valor inicial 42 y 43.

$$42. \vec{X} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \vec{X}, \quad \vec{X}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$43. \vec{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \vec{X}, \quad \vec{X}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

44. Muestre que las soluciones obtenidas en el ejemplo 23 son linealmente independientes.

45. **Sistema Adjunto.** El sistema lineal:

$$\vec{x}' = \mathbf{A} \cdot \vec{x} \quad (33)$$

Tiene un sistema «asociado»:

$$\vec{w}' = -\mathbf{A}^T \cdot \vec{w} \quad (34)$$

Llamado el **adjunto** (tomando el negativo de la transposición dos veces devuelve la matriz original, por lo que cada sistema es el adjunto de la otra):

a. Determine el sistema adjunto para $\vec{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \vec{x}$.

b. Establezca que para las soluciones \vec{x} y \vec{w} de los sistemas adjuntos (33) y (34) se cumple que:

$$\frac{d}{dt} (\vec{w}^T \vec{x}) = \vec{w}'^T \vec{x} + \vec{w}^T \vec{x}' = 0$$

Es decir que $\vec{w}^T \vec{x} \equiv \text{constante}$. Ayuda: recuerde que $(A \cdot B)^t = B^T \cdot A^T$.

c. Resuelva el problema con valor inicial para el sistema de la parte a. si: $\vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

d. Resuelva el problema con valor inicial, del sistema adjunto de la parte a y la condición inicial:

$$\vec{w}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e. Para la condición inicial en las partes c. y d., $\vec{w}^T(0)\vec{x}(0) = 0$. ¿Qué puede concluir acerca de los caminos $\vec{x}(t)$ y $\vec{w}(t)$ si ellos son trazados sobre el mismo sistema de coordenadas?

46. **Sistemas Cauchy Euler.** El sistema $t\vec{x}' = A\vec{x}$, donde A es una matriz constante y $t > 0$, es llamado un **sistema Cauchy Euler**.

a. Muestre que el sistema Cauchy Euler tiene una solución de la forma $\vec{x} = t^\lambda \vec{v}$, donde λ es un valor propio de A y \vec{v} es el vector propio correspondiente.

b. Resuelva el sistema de Cauchy Euler:

$$t \vec{x}' = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \vec{x}, \quad t > 0$$

10.10 Sistemas lineales con valores propios en los números complejos

En la búsqueda de soluciones del sistema 2×2 de sistemas de ecuaciones diferenciales de la forma:

$$\vec{X}' = \mathbf{A} \cdot \vec{X} \quad (35)$$

En la sección anterior, sustituimos $\vec{x} = e^{\lambda t} \vec{v}$ en la ecuación anterior y encontramos que podemos obtener un escalar y un vector no cero \vec{v} , tal que:

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \vec{v} = \vec{0} \quad (36)$$

Donde el valor propio λ es una solución de la ecuación característica:

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = 0$$

Si la ecuación cuadrática anterior tiene discriminante negativo, las soluciones son números complejos conjugados:

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta$$

Donde α y β son números reales y $\beta \neq 0$.

En el capítulo 8, donde estudiamos las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes constantes discutimos los valores propios complejos, pero no las consecuencias sobre los vectores propios. El vector propio \vec{v}_1 correspondiente al valor propio λ_1 , determinado por la ecuación (35), la cual puede tener componentes complejas.

Tomando el complejo conjugado de:

$$(A - \lambda_1 I)\vec{v}_1 = \vec{0}$$

se tiene:

$$(A - \bar{\lambda}_1 I)\overline{\vec{v}_1} = (A - \lambda_2 I)\overline{\vec{v}_1} = \vec{0}$$

Luego $\vec{v}_2 = \overline{\vec{v}_1}$

Luego se ha demostrado que:

Valores y vectores propios complejos

Para una matriz real A , los valores propios no reales, vienen en pares conjugados complejos:

$$\lambda_1, \lambda_2 = \alpha \pm i\beta$$

Con α y β , números reales y $\beta \neq 0$.

Los correspondientes vectores propios son también complejos conjugados por pares y pueden ser escritos:

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2 = \vec{p} \pm i\vec{q}$$

Donde \vec{p} y \vec{q} son vectores reales.

Ejemplo 26. Valores propios complejos para una matriz:

Encuentre los valores propios de la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

Solución:

La ecuación característica de la matriz está dada por:

$$|A - \lambda I| = 0$$

Luego:

$$\left| \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0, \text{ de donde } \lambda^2 - 10\lambda + 29 = 0$$

Factorizando se tiene:

$$\lambda_1, \lambda_2 = 5 \pm 2i$$

Con vectores propios:

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 - 2i \end{bmatrix}, \text{ y } \vec{v}_2 = \overline{\vec{v}_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 + 2i \end{bmatrix}$$

Alternativamente podemos escribir:

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \pm i \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Donde:

$$\vec{p} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{q} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones diferenciales lineales

Regresemos a la solución del sistema de ecuaciones lineales (36), en general para el caso de valores propios no reales. Para $\lambda_1, \lambda_2 = \alpha \pm i\beta$, y los correspondientes vectores propios conjugados \vec{v}_1 y \vec{v}_2 , podemos escribir:

$$\vec{X} = c_1 e^{\lambda_1 t} \vec{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \vec{v}_2$$

Sin embargo, para el análisis del comportamiento cualitativo de las trayectorias cuando los valores y vectores propios no son reales, se tienen que escribir las soluciones en términos de los vectores reales \vec{p} y \vec{q} (las partes reales e imaginarias de \vec{v}_1 respectivamente).

Para el valor propio $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ y su correspondiente vector propio $\vec{v}_1 = \vec{p} + i\vec{q}$ una solución se puede escribir en la forma:

$$\vec{X}(t) = e^{\lambda_1 t} \vec{v}_1 = e^{(\alpha+i\beta)t} (\vec{p} + i\vec{q}). \quad (37)$$

Como se vio en el capítulo 8, podemos encontrar que las partes real e imaginaria de la solución compleja de la ecuación anterior son soluciones reales y linealmente independientes del sistema inicial.

Entonces para resolver un sistema como el dado inicialmente (35) podemos seguir los siguientes pasos.

Paso 1. Supongamos que:

$$\vec{X}(t) = \overrightarrow{X_{Re}}(t) + i\overrightarrow{X_{Im}}(t)$$

Es un vector solución del sistema inicial (35), con $\overrightarrow{X_{Im}}(t) \neq \vec{0}$. Entonces:

$$\vec{X}'(t) = \overrightarrow{X'_{Re}}(t) + i\overrightarrow{X'_{Im}}(t) = A\overrightarrow{X_{Re}}(t) + iA\overrightarrow{X_{Im}}(t) = A\overrightarrow{X}(t)$$

Si en esta igualdad separamos la parte real y la parte imaginaria de esta ecuación, encontramos que:

$$\overrightarrow{X'_{Re}}(t) = A\overrightarrow{X_{Re}}(t) \text{ y } \overrightarrow{X'_{Im}}(t) = A\overrightarrow{X_{Im}}(t)$$

Luego $\overrightarrow{X_{Re}}(t)$ y $\overrightarrow{X_{Im}}(t)$ son soluciones por separado de nuestra ecuación inicial (35).

Paso 2. Para la solución compleja (37), podemos determinar las partes real e imaginaria usando la fórmula de Euler, $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, para escribir:

$$\begin{aligned} e^{\lambda_1 t} \vec{v}_1 &= e^{\alpha t} (\cos\beta t + i\sin\beta t) (\vec{p} + i\vec{q}) \\ &= e^{\alpha t} (\cos\beta t \cdot \vec{p} - \sin\beta t \cdot \vec{q}) + ie^{\alpha t} (\sin\beta t \cdot \vec{p} + \cos\beta t \cdot \vec{q}) \end{aligned}$$

Donde:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{X_{Re}}(t) &= e^{\alpha t} (\cos\beta t \cdot \vec{p} - \sin\beta t \cdot \vec{q}), \text{ y} \\ \overrightarrow{X_{Im}}(t) &= e^{\alpha t} (\sin\beta t \cdot \vec{p} + \cos\beta t \cdot \vec{q}) \end{aligned}$$

Paso 3.

Como $\overrightarrow{X_{Re}}(t)$, y $\overrightarrow{X_{Im}}(t)$ son soluciones linealmente independientes y solamente necesitamos dos (por el teorema del espacio solución) entonces la solución general está dada por:

$$\overrightarrow{X}(t) = c_1 \overrightarrow{X_{Re}}(t) + c_2 \overrightarrow{X_{Im}}(t)$$

para constantes arbitrarias c_1 y c_2 . Cualquier solución derivada de λ_2 y $\overrightarrow{v_2}$ será una combinación lineal de las soluciones ya determinadas a partir de λ_1 y $\overrightarrow{v_1}$.

Con todo lo anterior, ya tenemos una estrategia completa para resolver la ecuación (35). En resumen:

Solucionando un sistema de dimensión dos de ecuaciones diferenciales lineales de la forma $\overrightarrow{X}' = A \cdot \overrightarrow{X}$ con valores propios no reales $\lambda_1, \lambda_2 = \alpha \pm i\beta$

Paso 1. Para un valor propio λ_1 , encontrar su vector propio correspondiente $\overrightarrow{v_1}$. El segundo valor propio λ_2 y su vector propio correspondiente $\overrightarrow{v_2}$ son complejos conjugados del primero. Los vectores propios son de la forma $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{p} + i\overrightarrow{q}$.
Paso 2. Construir las partes linealmente independientes real $\overrightarrow{X_{Re}}$ y imaginaria $\overrightarrow{X_{Im}}$ de la solución como sigue:

$$\overrightarrow{X_{Re}}(t) = e^{\alpha t} (\cos \beta t \cdot \overrightarrow{p} - \sin \beta t \cdot \overrightarrow{q}) \quad (38)$$

$$\overrightarrow{X_{Im}}(t) = e^{\alpha t} (\sin \beta t \cdot \overrightarrow{p} + \cos \beta t \cdot \overrightarrow{q})$$

Paso 3. La solución general es:

$$\overrightarrow{X}(t) = c_1 \overrightarrow{X_{Re}}(t) + c_2 \overrightarrow{X_{Im}}(t) \quad (39)$$

Las fórmulas (38) y (39) son más complicadas que cuando las soluciones del sistema tienen vectores propios, porque cada una de las soluciones linealmente independientes $\overrightarrow{X_{Re}}(t)$ y $\overrightarrow{X_{Im}}(t)$ no involucra

uno sino dos vectores. Afortunadamente, ellas son los mismos dos vectores en cada caso, por lo que la solución general todavía implica solo dos vectores, \bar{p} y \bar{q} .

Primero daremos ejemplos de los comportamientos típicos de las trayectorias para los sistemas con valores propios no reales; a lo cual le siguen interesantes trayectorias y fórmulas.

Ejemplo 27. Valores complejos para un sistema de ecuaciones diferenciales lineales:

Resolver el sistema:

$$\bar{X}' = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \cdot \bar{X}$$

Solución:

Recordemos el ejemplo 25 donde los valores propios de A son $\lambda_1, \lambda_2 = 5 \pm 2i$, y el vector propio correspondiente a $\lambda_1 = 5 + 2i$ es:

$$\bar{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Luego por (38) un conjunto fundamental de soluciones para el sistema dado es:

$$\bar{X}_{Re}(t) = e^{5t} \cos(2t) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - e^{5t} \text{sen}(2t) \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} = e^{5t} \begin{bmatrix} \cos(2t) \\ \cos(2t) + 2\text{sen}(2t) \end{bmatrix}$$

$$\bar{X}_{Im}(t) = e^{5t} \text{sen}(2t) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + e^{5t} \cos(2t) \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} = e^{5t} \begin{bmatrix} \text{sen}(2t) \\ \text{sen}(2t) - 2\cos(2t) \end{bmatrix}$$

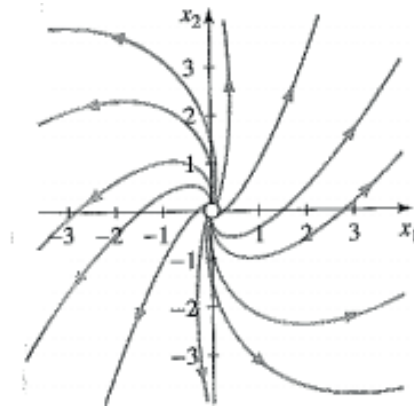
La solución general del sistema dado es:

$$\bar{X}(t) = c_1 \bar{X}_{Re}(t) + c_2 \bar{X}_{Im}(t) = e^{5t} \left(c_1 \begin{bmatrix} \cos(2t) \\ \cos(2t) + 2\text{sen}(2t) \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} \text{sen}(2t) \\ \text{sen}(2t) - 2\cos(2t) \end{bmatrix} \right)$$

Donde c_1 y c_2 son constantes reales arbitrarias.

Como $\alpha = 5 > 0$, entonces todas las trayectorias son espirales que salen hacia afuera infinito cuando $t \rightarrow \infty$. Algunas trayectorias típicas son mostradas en la figura 39 (trayectorias en sentido contrario se tienen cuando $t \rightarrow -\infty$, en este caso la espiral tiende al origen).

Figura 39. Algunas trayectorias típicas del sistema dado.



Fuente. Elaborado por el autor con el programa Derive.

Ejemplo 28. Espirales inversas:

Resolver el sistema:

$$\vec{X}' = \mathbf{A} \cdot \vec{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} \vec{X}$$

Solución:

Resolvemos la ecuación característica $|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = 0$ y obtenemos los valores propios:

$$\lambda_1 = -1 + 3i \text{ y } \lambda_2 = -1 - 2i$$

De donde se tiene que $\alpha = -1$ y $\beta = 2$. Para determinar los vectores propios correspondientes, escribimos el sistema (36) para $\lambda_1 = -1 + 3i$.

$$\begin{bmatrix} 1 - 2i & 1 \\ -5 & -2 + 1 - 2i \end{bmatrix} \vec{v} = \vec{0}$$

Y encontramos que:

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 + 2i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \vec{p} + i\vec{q}$$

De las ecuaciones (38), se tiene que:

$$\vec{X}_{Re}(t) = e^{-t} \cos(2t) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} - e^{-t} \operatorname{sen}(2t) \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = e^{-t} \begin{bmatrix} \cos(2t) \\ -\cos(2t) - 2\operatorname{sen}(2t) \end{bmatrix},$$

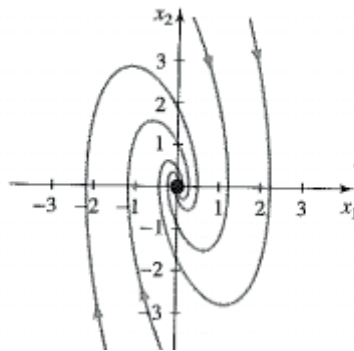
$$\vec{X}_{Im}(t) = e^{-t} \operatorname{sen}(2t) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + e^{-t} \cos(2t) \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = e^{-t} \begin{bmatrix} \operatorname{sen}(2t) \\ -\operatorname{sen}(2t) + 2\cos(2t) \end{bmatrix}$$

De donde la solución general del sistema para constantes arbitrarias c_1 y c_2 es:

$$\vec{X}(t) = c_1 \vec{X}_{Re}(t) + c_2 \vec{X}_{Im}(t) = e^{-t} \left(c_1 \begin{bmatrix} \cos(2t) \\ -\cos(2t) - 2\operatorname{sen}(2t) \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} \operatorname{sen}(2t) \\ -\operatorname{sen}(2t) + 2\cos(2t) \end{bmatrix} \right)$$

Como $\alpha = -1 < 0$, las trayectorias en el plano de fase son espirales que van hacia el origen cuando $t \rightarrow \infty$ (y salen del origen cuando $t \rightarrow -\infty$). Algunas trayectorias se muestran en la siguiente figura.

Figura 40. Algunas trayectorias para el sistema dado.



Fuente. Elaborado por el autor con el programa Derive.

Ejemplo 29. Imaginarios puros:

Resolver el sistema:

$$\vec{X}' = \mathbf{A} \cdot \vec{X} = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} \vec{X}$$

Solución:

Los valores propios son imaginarios puros (es decir $\alpha = 0$), ya que la ecuación característica de la matriz \mathbf{A} es:

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & -5 \\ 5 & -4 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Lo cual implica $\lambda^2 + 9 = 0$. Entonces se tiene que:

$$\lambda_1 = 3i = 0 + 3i, \quad \text{y} \quad \lambda_2 = -3i = 0 - 3i$$

Con vectores propios:

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \pm 3i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} \pm i \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix} = \vec{p} \pm i\vec{q}$$

Por las ecuaciones (36) encontramos:

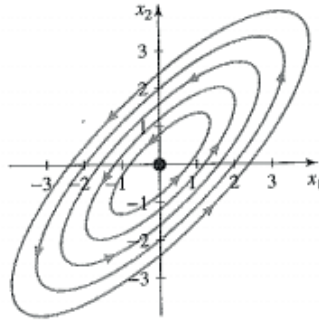
$$\vec{X}_{Re}(t) = \cos(3t) \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} - \text{sen}(3t) \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \vec{X}_{Im}(t) = \text{sen}(3t) \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} + \cos(3t) \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

La solución general para el sistema dado es, para constantes arbitrarias c_1 y c_2 .

$$\vec{X}(t) = c_1 \vec{X}_{Re}(t) + c_2 \vec{X}_{Im}(t) = \left(c_1 \begin{bmatrix} 5 \cos(3t) \\ 4 \cos(3t) + 3 \text{sen}(3t) \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 5 \text{sen}(3t) \\ 4 \text{sen}(3t) - 3 \cos(3t) \end{bmatrix} \right)$$

En este caso no existe un factor exponencial de crecimiento o decrecimiento, ya que $\alpha = 0$. Las trayectorias son curvas cerradas que encierran el origen. Algunas curvas típicas son trazadas en la gráfica 41. Tales soluciones son periódicas, repiten su movimiento después de regresar a su punto de origen trazando una órbita cerrada. Podemos reconocer la dirección de la flecha para las trayectorias tomando puntos x_1 y x_2 de interés y calculando x_1' y x_2' .

Figura 41. Gráficas de algunas soluciones periódicas.



Fuente. Elaborado por el autor con el programa Derive.

Comportamiento de las soluciones

Los sistemas de los ejemplos 26 al 28 exhiben diferentes tipos de diagramas de fase, ya que ellos tienen diferentes tipos de valores propios no reales.

- En el ejemplo 26 (figura 39) se tiene un equilibrio inestable. Las trayectorias son en espiral hacia fuera desde el origen, creciendo sin límite, porque $\alpha > 0$.
- En el ejemplo 27 (figura 40) se tiene un equilibrio asintóticamente estable. Las trayectorias se dirigen en espiral hacia el origen, decayendo a cero, porque $\alpha < 0$. Técnicamente nunca alcanzan a cero (debido a la singularidad, el origen es una solución separada, de punto fijo), pero cada vez se acercan más.
- En el ejemplo 28 (figura 41) es estable. Las trayectorias son bucles cerrados y representan el movimiento periódico. En contraste con el ejemplo 27, el equilibrio en el origen no atrae soluciones cercanas, pero tampoco las rechaza, por lo que lo llamamos estable, pero no asintóticamente estable. Esto ocurre siempre que $\alpha = 0$.

Bosquejo de los retratos de fase

Si los valores propios no son reales, debemos esperar retratos de fase en espiral. Pero debido a que los vectores propios son también no reales, no aparecen en el plano de fase. Sin embargo, los esbozos rápidos se pueden hacer fácilmente usando nuclinares, los cuales resumimos a continuación.

Nuclinares para sistemas de ecuaciones diferenciales

Para un sistema de dos ecuaciones diferenciales:

$$x' = f(x, y)$$

$$y' = g(x, y)$$

- La v - nuclinar es el conjunto con pendiente vertical, la cual ocurre sobre la curva obtenida al resolver $x' = f(x, y) = 0$.
- La h - nuclinar es el conjunto de todos los puntos con pendiente horizontal, la cual ocurre sobre la curva obtenida al resolver $y' = g(x, y) = 0$.

Cuando una h - nuclinar y una v - nuclinar se intersectan, un punto de equilibrio o punto fijo ocurre.

La adición de unos pocos vectores de dirección al bosquejo de las nuclinares en puntos clave, es suficiente para mostrar el comportamiento general de la trayectoria para el sistema lineal de ecuaciones diferenciales lineales.

Ejemplo 30. Bosquejo rápido:

Hacer un bosquejo rápido del sistema del ejemplo 26, es decir del sistema:

$$\vec{x}' = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \cdot \vec{x}$$

Solución:

Tenemos que las ecuaciones diferenciales son:

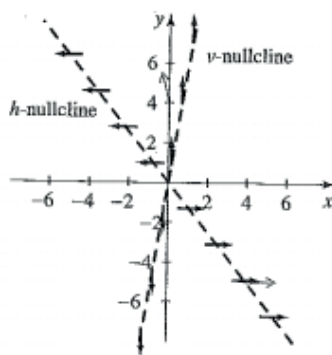
$$x' = 6x - y$$

$$y' = 5x + 4y$$

Entonces tenemos que las v - nuclinares están sobre $y = 6x$ y las h - nuclinares están sobre $y = -\frac{5}{4}x$.

Las nuclinares nos dan una indicación del flujo de la trayectoria. La dirección de la circulación puede ser determinada chequeando las direcciones de los vectores tangentes a las trayectorias en puntos convenientes. Así por ejemplo, como se muestra en la figura 42.

Figura 42. Gráfica de las nuclinares del sistema dado.



Fuente. Elaborado por el autor con el programa Derive.

$$\text{En } (0, 4) \quad \frac{dx}{dt} = 6(0) - 1(4) = -4 \text{ (a la izquierda)}$$

$$\frac{dy}{dt} = 5(0) + 4(4) = 16 \text{ (hacia arriba)}$$

$$\text{En } (4, -5) \quad \frac{dx}{dt} = 6(4) - 1(-5) = 29 \text{ (a la derecha)}$$

$$\frac{dy}{dt} = 5(4) + 4(-5) = 0 \text{ (no tiene movimiento vertical)}$$

Interpretando las soluciones

Si tomamos algunas libertades y reescribimos las fórmulas de solución (38) para $\vec{X}_{Re}(t)$ y $\vec{X}_{Im}(t)$ de una forma que es fácil de interpretar y recordar, tenemos lo siguiente.

Soluciones reales para valores propios no reales

Para $\vec{X}' = \mathbf{A} \cdot \vec{X}$ con valores propios no reales $\lambda_1, \lambda_2 = \alpha \pm i\beta$ y vectores propios $\vec{v}_1, \vec{v}_2 = \vec{p} + i\vec{q}$, organizamos las componentes de las soluciones como:

$$\begin{bmatrix} \vec{X}_{Re} \\ \vec{X}_{Im} \end{bmatrix} = e^{\alpha t} \begin{bmatrix} \cos\beta t & -\text{sen}\beta t \\ \text{sen}\beta t & \cos\beta t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{p} \\ \vec{q} \end{bmatrix} \quad (40)$$

Donde $e^{\alpha t}$ da la expansión, $\begin{bmatrix} \cos\beta t & -\text{sen}\beta t \\ \text{sen}\beta t & \cos\beta t \end{bmatrix}$ da la rotación, $\begin{bmatrix} \vec{p} \\ \vec{q} \end{bmatrix}$ da la inclinación y la forma.

Cada uno de los factores de (40) tiene un significado particular:

- a. El primer factor $e^{\alpha t}$, determina una expansión o contracción.
 - Si $\alpha > 0$, las trayectorias son en espiral hacia fuera desde el origen, representando **soluciones que crecen infinitamente**.
 - Si $\alpha < 0$, las trayectorias son en espiral hacia dentro, hacia el origen, representando **soluciones que decaen a cero**.
 - Si $\alpha = 0$, las trayectorias son curvas cerradas, representando **soluciones periódicas**.
- b. El segundo factor es la familiar matriz de rotación. El ángulo de rotación βt es siempre creciente cuando t es creciente, también las trayectorias en espiral alrededor del origen en sentido contrario para $\beta > 0$.

³ En la ecuación (40) los elementos de la primera y última matriz son vectores con números reales.

c. El tercer factor, que contiene a \vec{p} , y a \vec{q} , determina la **inclinación y la forma de las trayectorias elípticas** que resultan cuando $\alpha = 0$.

Entonces, los valores propios ($\alpha \pm i\beta$) controlan la expansión y rotación, mientras que los vectores propios ($\vec{p} + i\vec{q}$) determinan la inclinación y la forma de las trayectorias espirales. Algunos ejercicios más adelante nos permitirán explorar más en detalles estas relaciones.

Ejemplo 31. Interpretación:

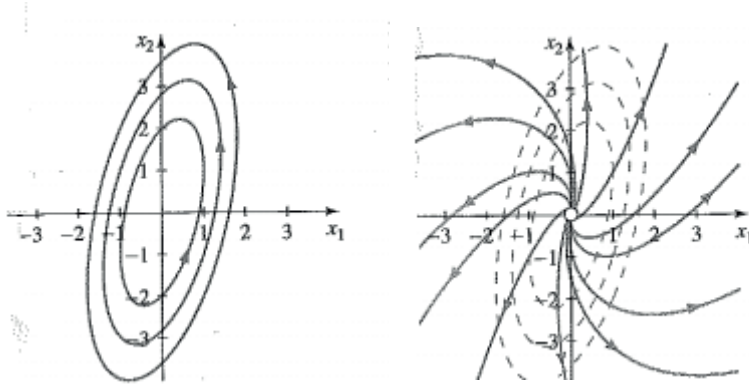
En el ejemplo (26) con las soluciones generales dadas, hacer un análisis de dicha solución.

Solución:

En esta solución tenemos que $\alpha = 5$, y la expansión de trayectorias con giro en sentido contrario a las agujas del reloj y alguna asimetría, debido al hecho de que \vec{p} y \vec{q} no son perpendiculares.

Si trazamos las ecuaciones paramétricas, sin el factor de expansión e^{5t} , cada trayectoria se convierte en una elipse, inclinada y estirada, como la figura 43(a).

Luego la figura 43(b) nos muestra varias trayectorias de la solución completa de la ecuación dada, allí se ve cómo la rotación y los factores elípticos afectan la expansión de las trayectorias.

Figura 43. Gráficas de las soluciones completas del sistema dado.

Fuente. Elaborado por el autor con el programa Derive.

Ecuaciones de segundo orden versus sistemas lineales dos por dos

Vimos en el capítulo 8 cómo resolver la ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes:

$$ax'' + bx' + cx = 0 \quad (41)$$

En el caso en que las raíces de la ecuación característica $ar^2 + br + c = 0$ no fueran reales, las soluciones son de la forma $\alpha \pm i\beta$. Encontramos que $e^{\alpha t} \cos \beta t$ y $e^{\alpha t} \sin \beta t$ forman un conjunto fundamental de soluciones para esta ecuación diferencial.

Podemos ver ahora que la ecuación (41) se puede convertir en un sistema 2×2 de ecuaciones diferenciales de primer grado, haciendo $x_1 = y$ y $x_2 = y'$. En este caso:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= -\frac{c}{a}x_1 - \frac{b}{a}x_2 \end{aligned} \quad (42)$$

El sistema toma la forma:

$$\vec{X}' = \mathbf{A} \cdot \vec{X} \text{ Donde } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{a} & -\frac{b}{a} \end{bmatrix} \quad (43)$$

La ecuación característica de la matriz \mathbf{A} es $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$. Resolviendo (43) para:

$$\vec{X}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

nos da la solución $y(t) = x_1(t)$ de (41), y $y'(t)$ está dada por $x_2(t)$. Vamos a confirmar este hecho con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 32. Haciendo la conexión:

Analizar la ecuación diferencial:

$$Y'' + 2Y' + 5Y = 0$$

Como una ecuación diferencial de segundo orden y como un sistema de ecuaciones lineales.

Solución:

Aplicando lo visto en el capítulo 8, tenemos que esta ecuación corresponde a un oscilador armónico forzado. Su ecuación característica es:

$$r^2 + 2r + 5 = 0$$

El discriminante, $\Delta = 2^2 - 4(5) = -16$. Entonces encontramos que las raíces características son $r_1, r_2 = -1 \pm 2i$, y entonces la solución general está dada por:

$$Y(t) = e^{-t}(c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t) \quad (44)$$

Ahora el sistema correspondiente a dicha ecuación sería por (15):

$$\vec{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} \vec{x}$$

el cual, el mismo sistema del ejemplo (26), con solución general:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = e^{2t} \left(c_1 \begin{bmatrix} \cos(2t) \\ \cos(2t) + 2\text{sen}(2t) \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} \text{sen}(2t) \\ \text{sen}(2t) - 2\cos(2t) \end{bmatrix} \right)$$

La primera componente $x_1(t)$ es la misma que la ecuación (44) para la solución de la ecuación diferencial de segundo grado, y podemos calcular de (44) que:

$$\begin{aligned} y(t) &= -e^{-t}(c_1 \cos 2t + c_2 \text{sen} 2t) + e^{-t}(-2c_1 \text{sen} 2t + 2c_2 \cos 2t) \\ &= e^{-t}[(-c_1 + 2c_2)\cos 2t + (-2c_1 - c_2)\text{sen} 2t] \end{aligned}$$

Expresión que corresponde a la segunda componente $x_2(t)$. Tenemos la conexión completa.

Ejemplo 33. Haciendo la conexión con raíces reales diferentes:

Encontrar la solución general de:

$$x'' + 7x' + 12x = 0$$

Solución:

Como vimos en el ejemplo anterior, podemos resolver la ecuación utilizando nuestro método del capítulo 8, utilizando la ecuación característica $r^2 + 7r + 12 = 0$, la cual tiene como raíces $r_1 = -3$, y $r_2 = -4$, luego la solución general es la combinación de las dos funciones exponenciales simples:

$$x(t) = c_1 e^{-4t} + c_2 e^{-3t} \quad (45)$$

Vemos que podemos obtener la misma respuesta utilizando los valores y vectores propios para el sistema lineal correspondiente. Primero, como ya vimos, convertimos la ecuación de segundo grado en un sistema equivalente haciendo $y = \frac{dx}{dt}$ y por lo tanto $\frac{dy}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$, esto es:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= -12x - 7y\end{aligned}$$

0:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -12 & -7 \end{bmatrix} \vec{x} = \mathbf{A}\vec{x}$$

Encontramos los valores propios para la matriz A, es decir:

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \lambda^2 + 7\lambda + 12 = (\lambda + 4)(\lambda + 3) = 0$$

Estos son los mismos que los de la ecuación característica, y vemos estos dos valores propios $\lambda = -4, -3$. Existen diferentes vectores propios correspondientes a cada valor propio.

Para $\lambda = -4$, usamos el sistema homogéneo:

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -12 & -7 - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

0:

$$4x + y = 0$$

$$-12x - 3y = 0$$

Estas dos ecuaciones son las mismas, por lo cual tienen los mismos resultados.

Por lo tanto:

$$Y = -4x$$

Luego si $x = 1$, se tiene que $y = -4$, y el vector propio para $\lambda = -4$ es $x(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} e^{-4t}$.

De manera similar para $\lambda = -3$, tenemos el sistema de ecuaciones lineales:

$$3x + y = 0$$

$$-12x - 4y = 0$$

Estas dos ecuaciones dan el mismo resultado, luego tomamos una sola ecuación:

$$Y = -3X$$

Si tomamos $x = 1$, tenemos que para el valor propio $\lambda = -3$ se tiene el vector propio $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$. Esto significa que el sistema de ecuaciones diferenciales tiene la siguiente solución elemental correspondiente al vector propio $\lambda = -3$; $x(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} e^{-3t}$

Luego la solución general es la combinación lineal de las dos soluciones elementales correspondientes a cada valor propio, es decir:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} e^{-4t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} e^{-3t} \quad (46)$$

La igualdad (46) nos da que $x(t) = c_1 e^{-4t} + c_2 e^{-3t}$ que es la misma obtenida en (45). También obtenemos $y(t) = -4c_1 e^{-4t} - 3c_2 e^{-3t}$, lo cual en este caso es lo mismo que $y = \frac{dx}{dt}$.

10.11 Ejercicios

Encuentre las soluciones generales para los problemas 1 al 12 y haga un bosquejo del retrato de fase de las no lineales y el campo vectorial (se puede utilizar un programa de computación).

$$1. \frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \vec{x}$$

$$2. \frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \vec{x}$$

$$3. \frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \vec{x}$$

$$4. \frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \vec{x}$$

$$5. \frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \vec{x}$$

$$6. \frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \vec{x}$$

$$7. \frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \vec{x}$$

$$8. \frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \vec{x}$$

$$9. \frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \vec{x}$$

$$10. \frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \vec{x}$$

$$11. \frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \vec{x}$$

$$12. \frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \vec{x}$$

Soluciones particulares. Resuelva los PVI del 13 al 16.

$$13. \frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \vec{x}, \quad \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$14. \frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \vec{x}, \quad \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$15. \frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \vec{x}, \quad \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$16. \frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \vec{x}, \quad \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

17. **Condiciones no reales.** Supóngase que A es una matriz 2×2 con valores propios no reales $\lambda = \alpha \pm \beta i$.

a. Muestre que uno de los elementos de la no diagonal, pero no ambos, tiene que ser negativo para que el valor propio no sea real.

b. Muestre que los valores propios son imaginarios puros ($\alpha = 0$) si y solo si $\text{traza}(A) = 0$ y $|A| > 0$.

18. Direcciones de la rotación. Muestre que para $\vec{X}' = A \cdot \vec{X}$, con valores propios no reales de:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

la rotación a lo largo de las trayectorias se determina de la siguiente manera:

- Si b es negativo, la rotación es en sentido contrario de las agujas del reloj.
- Si c es negativo, la rotación es en el mismo sentido de las agujas del reloj.

Ayuda: ver el problema 17(a).

19. Complejidades de vectores propios complejos. Las trayectorias elípticas en el plano de fase ocurren en una matriz 2×2 de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales con valores propios imaginarios puros, que se tienen cuando $\text{traza}(A) = 0$ y $|A| > 0$. Entonces, para $\lambda = \pm\beta i$:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} \text{ y } \beta^2 = |A|$$

a. Muestre que:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} -b \\ a - \beta i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b \\ a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\beta \end{bmatrix} i$$

Donde $\vec{p} = \begin{bmatrix} -b \\ a \end{bmatrix}$ y $\vec{q} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\beta \end{bmatrix}$ es un vector propio para $\lambda = \beta i$.

b. Recordemos que un múltiplo escalar de \vec{v} es también un vector propio. Sin embargo, si el múltiplo escalar es también complejo, el resultado está lejos de ser obviamente «el mismo».

Multiplicando el vector \vec{v} en a. por el escalar complejo $\frac{1}{b}(\alpha + \beta i)$ nos da un nuevo vector:

$$\vec{v}^* = \frac{1}{b}(\alpha + \beta i) = \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -a - \beta i \\ -c \end{bmatrix}$$

Muestre que \vec{v}^* Es también un vector propio para $\lambda_1 = \beta i$.

c. Explique cómo escribir:

$$\vec{v}^* = \vec{p}^* + \vec{q}^* = \begin{bmatrix} -a \\ -c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\beta \\ 0 \end{bmatrix} i$$

dadas las partes real e imaginaria \vec{p}^* y \vec{q}^* , para el vector propio complejo que es completamente diferente de las partes real e imaginaria \vec{p} y \vec{q} para \vec{v} .

20. Forma e inclinación elíptica. Para un sistema lineal de ecuaciones diferenciales lineales 2×2 :

$$\vec{X}' = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} \cdot \vec{X}$$

Con valores propios imaginarios puros $\lambda_1, \lambda_2 = \pm \beta i$ y vectores propios complejos de la forma particular dado en el problema 19(a):

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -b \\ a \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} 0 \\ -\beta \end{bmatrix} i = \vec{p} \pm \vec{q} i$$

Podemos hacer una combinación rápida de las trayectorias elípticas de la siguiente manera.

a. Todas las trayectorias elípticas son concéntricas y similares, así que podemos obtener toda la información clave de una sola. Tenemos de la ecuación (39):

$$\vec{X}(t) = c_1 \vec{X}_{Re}(t) + c_2 \vec{X}_{Im}(t)$$

Escogiendo la solución particular donde $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, reducimos la solución a la ecuación singular (38):

$$\vec{X}_{Re}(t) = (\cos \beta t \cdot \vec{p} - \text{sen} \beta t \cdot \vec{q}).$$

Calcular $\vec{X}(t) = \overrightarrow{X_{Re}}(t)$ y $\vec{X}'(t)$, luego hacer las partes b y c del ejercicio 19.

b. Muestre que para $t = 0$:

$\vec{X}(0) = \vec{p}$ da una condición inicial, con

$\vec{X}'(0) = -\beta\vec{q}$ la velocidad inicial, como una tangente vertical apuntando hacia arriba.

Muestre también que para $\beta t = \pi$:

$\vec{X}(\pi/\beta) = -\vec{p}$ da otro punto sobre la misma trayectoria elíptica, con

$\vec{X}'(\pi/\beta) = \beta\vec{q}$ como velocidad apuntando hacia arriba.

Luego muestre que para $\beta t = \pi/2$:

$\vec{X}(\pi/2\beta) = -\vec{q}$ está sobre la misma elipse, con

$\vec{X}'(\pi/2\beta) = -\beta\vec{p}$ como la velocidad, antiparalela a \vec{p} .

Y que para $\beta t = 3\pi/2$:

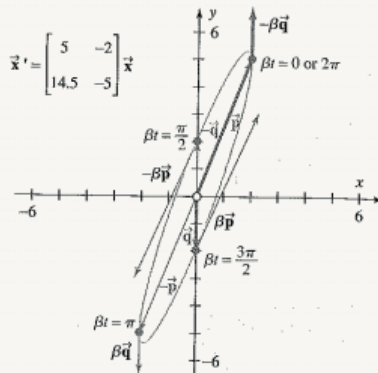
$\vec{X}(3\pi/2\beta) = \vec{q}$ está también sobre la misma elipse, con

$\vec{X}'(\beta t = \pi) = \beta\vec{p}$ como la velocidad, paralela a \vec{p} .

Por lo tanto, los cuatro vectores $\pm\vec{p}$ y $\pm\vec{q}$ con sus vectores tangentes, definen un paralelogramo en el que la elipse debe encajar. Un ejemplo se muestra en la figura 36. Otros ejemplos son dados en los puntos 21 al 24 (vea la nota de precaución para los problemas 21-29 para una discusión del parámetro βt):

$$\vec{X}' = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 14.5 & -5 \end{bmatrix} \cdot \vec{X}$$

Figura 44. Gráfica del paralelograma formado por los vectores tangentes al sistema.



Fuente. Elaborado por el autor con el programa Derive.

Para un 2×2 sistema lineal de ecuaciones diferenciales $\vec{X}' = \mathbf{A} \cdot \vec{X}$ con valores propios no reales, las partes real e imaginaria de los vectores propios $\pm \vec{p}$ y $\pm \vec{q}$, junto con los vectores de velocidad de los vectores propios apropiados para sus puntos finales, determinan la forma y la inclinación de una trayectoria elíptica. Para nuestro ejemplo, se toma $\beta = 2$, se ha dibujado los vectores de velocidad a escala media.

Para los ejercicios 21 al 24:

- Encuentre y grafique las partes real e imaginaria de los vectores $\pm \vec{p}$ y $\pm \vec{q}$, como se encontraron en el ejercicio 19(a).
- Añada los vectores de velocidad apropiados al final de cada uno (vea el problema 20) y dibuje la trayectoria elíptica que pasa a través de estos cuatro puntos.
- Compare su boceto con un retrato de fase mediante un programa gráfico, a través de una computadora para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales y explique cualquier discrepancia.

$$21. \vec{x}' = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} \cdot \vec{x}$$

$$22. \vec{x}' = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \vec{x}$$

$$23. \vec{x}' = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \vec{x}$$

$$24. \vec{x}' = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \vec{x}$$

25. **Inclinación con precisión.** Para un sistema como el descrito en el problema 20, tenemos la condición en la que, en los extremos de los ejes mayor y menor de una trayectoria elíptica, el vector de velocidad debe ser ortogonal al vector de posición. Es decir, debemos tener:

$$\vec{X}(t) \cdot \vec{X}'(t) = 0$$

Usando la ecuación del problema 20(a), mostrar que la condición anterior se satisface cuando:

$$\tan 2\beta t = \frac{2\vec{p} \cdot \vec{q}}{\|\vec{q}\|^2 - \|\vec{p}\|^2} \quad (47)$$

En los problemas 26 al 29 explique cómo se aplica este principio a estos ejercicios.

Ejes para las elipses. Para los problemas 26 al 29.

- Usar la ecuación (47) para los problemas del problema 25, para encontrar los valores de βt^* para los cuales se satisface (19).
- Sustituir (uno a la vez) cada valor de βt^* encontrado en la parte a, en las soluciones encontradas en el problema 20(a), para calcular los extremos de los ejes mayor y menor de la trayectoria elíptica, para el sistema específico de ecuaciones diferenciales lineales.
- Utilice un retrato de fase de por medio de una computadora, para resolver gráficamente el sistema de ecuaciones diferenciales y confirmar sus resultados. Discutir cualquier discrepancia.

Observación. Este es un problema en coordenadas, no en ángulos. La cantidad βt es un parámetro en la base

descrita por \vec{p} , \vec{q} y definitivamente no es un ángulo en el plano de fase. Ver por ejemplo la figura 33, la cual muestra claramente este hecho: los cuatro puntos de la trayectoria se muestran separados por incrementos de $\beta t = \pi/2$, pero los ángulos representados están lejos de ser iguales. A lo largo de la trayectoria elíptica, la velocidad angular en el plano x - y para el ángulo theta con el eje x no es constante.

$$26. \vec{x}' = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} \cdot \vec{x} \qquad 27. \vec{x}' = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \vec{x}$$

$$28. \vec{x}' = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \vec{x} \qquad 29. \vec{x}' = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \vec{x}$$

30. **Un sistema 3×3.** Resolver el sistema:

$$\vec{x}' = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \vec{x}$$

Como sigue:

a. Muestre que los valores propios de A son:

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2i, \text{ y } \lambda_3 = -2i$$

b. Use un vector propio para λ_1 para obtener una solución:

$$\vec{x}_1 = e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

c. Muestre que: $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

es un vector propio perteneciente a λ_2 . Obtenemos dos soluciones más:

$$\vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos 2t \\ -\text{sen} 2t \end{bmatrix} \text{ y } \vec{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ \text{sen} 2t \\ \cos 2t \end{bmatrix}$$

d. Escriba la solución general y obtenga sus componentes en la forma:

$$X = c_1 e^{-t}$$

$$Y = c_2 \cos 2t + c_3 \sin 2t$$

$$Z = c_3 \cos 2t - c_2 \sin 2t$$

e. Escriba la solución particular del problema con valor inicial:

$$\vec{X}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

en la forma de la parte d.

f. Discuta la geometría de la curva solución dada en la parte e, de acuerdo con sus ecuaciones paramétricas. La curva es una hélice.

Soluciones triples. Resolver los sistemas 3×3 dados en los problemas 31 al 34.

$$31. \vec{X}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \vec{X}$$

$$32. \vec{X}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \vec{X}$$

$$33. \vec{X}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \vec{X}$$

$$34. \vec{X}' = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \vec{X}$$

• **Problemas con valor inicial de orden tres.** Resolver los problemas con valor inicial 35 y 36.

$$35. \vec{X}' = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \vec{X}$$

$$\vec{X}(0) = \begin{bmatrix} -5 \\ 13 \\ -26 \end{bmatrix}$$

$$36. \vec{X}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \vec{X}$$

$$\vec{X}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

37. **La cuestión de la independencia.** Muestre que la parte real e imaginaria \vec{X}_{Re} y \vec{X}_{Im} de las soluciones de (39) son linealmente independientes.

38. **Sistema con matriz antisimétrica.** Recordemos que la matriz antisimétrica se define como una matriz A que cumple la condición $A = -A^T$. Soluciones de $\vec{X}' = A \cdot \vec{X}$, donde A es una matriz antisimétrica tienen longitud constante para todo t . Encuentre explícitamente la fórmula para las soluciones del sistema:

$$\vec{X}' = \begin{bmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{bmatrix} \cdot \vec{X}, \quad k \text{ es real,}$$

y verifique que su longitud es constante.

10.12 Estabilidad y clasificación de sistemas lineales

Figura 45. David Hilbert (1860-1943).



Fuente. Enciclopedia Británica (Biblioteca Virtual de la Universidad EAN).

Hilbert nació en Wehlan, actual Alemania, en 1860, y murió en Gotinga, Alemania en 1943. Fue el matemático alemán mejor conocido a finales del siglo XIX y principios del siglo XX. Su padre era juez, y fue destinado al poco de su nacimiento a Königsberg, donde David recibió su educación, y en cuya universidad inició los estudios de matemáticas. Estudió también en las universidades de Heidelberg y Berlín, asistiendo en esta última a los cursos de Weierstrass, Helmholtz y Kronecker. Una conjetura acerca de sistemas planos con funciones de tasa de cambio cuadráticas, es que tienen no más de cuatro ciclos límites o un número infinito de ellos. El matemático chino Shi Song Li encontró en 1970 un sistema de cuatro ciclos. El matemático ruso N. N. Ilíaschenko recientemente resolvió parte de la conjetura al demostrar que cualquier sistema de este tipo tiene un número finito de ciclos; no se sabe mucho más al respecto. David Hilbert formuló esta pregunta

sobre el número y la colocación de ciclos como la #16, en su famosa lista de 23 problemas al Congreso Internacional de Matemáticos en París (1900). La mayor parte de los problemas de Hilbert han sido resueltos, pero no el #16.

Introducción

Caracterizaremos la estabilidad e inestabilidad de las soluciones de equilibrio de un sistema lineal de ecuaciones diferenciales. Clasificaremos la estabilidad de los puntos fijos en el retrato de fases que corresponde a las soluciones de equilibrio para un sistema homogéneo 2×2 de ecuaciones diferenciales lineales.

Estabilidad de las soluciones de equilibrio

Ahora podemos redefinir y resumir lo que hemos aprendido acerca de los comportamientos de soluciones a sistemas de ecuaciones diferenciales lineales. Para comenzar, revisamos el concepto central de equilibrio.

Solución de equilibrio. Una solución constante $\vec{x} \equiv \vec{c}$ del sistema autónomo $\vec{x}' = \vec{f}(\vec{x})$ tal que $\vec{f}(\vec{c}) = \vec{0}$ es llamada una solución de equilibrio. Una **solución de equilibrio** en el plano de fase es simplemente un punto, llamado **punto fijo**.

Por conveniencia, a través de esta sección tomamos el origen $\vec{x} \equiv \vec{0}$ como nuestro punto fijo.

Una solución de equilibrio representa un estado estable constante de los sistemas del mundo real que están siendo modelados. Lo importante de esta solución es la naturaleza de las soluciones «cercanas». Pequeñas perturbaciones en el sistema físico perturbarán las condiciones \vec{c} de a un vector \vec{x}_0 ligeramente diferente, y la solución que comienza en este nuevo punto puede, o no, devolver el sistema a su estado estacionario.

Más claramente hablando, $\vec{x} \equiv \vec{c}$ es estable si las soluciones que comienzan cerca permanecen cerca. Y \vec{c} es inestable, si hay condiciones iniciales \vec{x}_0 arbitrariamente cercanas tales que las soluciones que comienzan allí no permanecen cerca de \vec{c} .

Las soluciones de equilibrio aisladas $\vec{x} \equiv \vec{c}$ (aislado significa que hay un disco alrededor de \vec{c} que no contiene ninguna otra solución de equilibrio) es estable si para cada disco S alrededor de \vec{c} existe un número positivo b (que depende de S) con la propiedad siguiente: para cualquier condición inicial \vec{x}_0 a una distancia de b unidades de \vec{c} , la solución que comienza en \vec{x}_0 permanece en S para todo $t \geq 0$.

Estabilidad de las soluciones de equilibrio

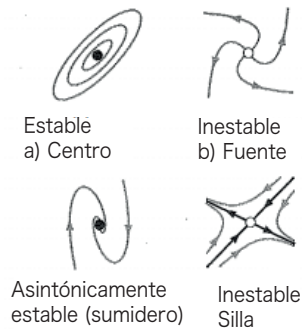
Una solución de equilibrio $\vec{x} \equiv \vec{c}$ de un sistema autónomo $\vec{x}' = \vec{f}(\vec{x})$ es **estable** si las soluciones que comienzan suficientemente cerca a \vec{c} permanecen acotadas.

- Si las soluciones cercanas no solo permanecen cerca sino que en realidad tienden a \vec{c} cuando un límite $t \rightarrow \infty$, la solución de equilibrio se denomina **asintóticamente estable**.
- Si las soluciones cercanas no son atraídas ni repelidas, la solución de equilibrio se denomina **neutralmente estable**.

Una solución de equilibrio que no es estable es llamada **inestable**.

La figura 46 nos muestra ejemplos de estos diferentes tipos de equilibrio que aparecerán a través de esta unidad¹.

¹ Para un estudio más avanzado de estos conceptos ver el texto de Guckenheimer John, Philip Holmes: Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields. Springer (1983).

Figura 46. Tipos de Equilibrio de un sistema dinámico.

Fuente. Farlow, Hall, Mcdill y West. (2007).

Ahora veremos cómo pueden organizarse para predecir su comportamiento. Crearemos un catálogo que incluya los distintos comportamientos de transición que ocurren en los límites de cada uno de estos tipos.

Esta unidad está dedicada a la clasificación de las soluciones de equilibrio de sistemas lineales homogéneos 2×2 , con coeficientes constantes. Esta restricción puede considerarse como un caso muy especial, pero proporciona las percepciones visuales que sirven como punto de partida para estudiar tanto los sistemas lineales de mayor dimensión de este capítulo, como los sistemas no lineales del capítulo 11.

Comencemos de nuevo con el sistema lineal:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy \end{cases} \quad 0, \quad \vec{X}' = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \vec{X}$$

Tenemos que el polinomio característico de la matriz A se iguala a cero para encontrar los valores propios:

$$|A - \lambda I| = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0$$

Observemos que:

$$(a + d) = \text{tr}A, y (ad - bc) = |A|$$

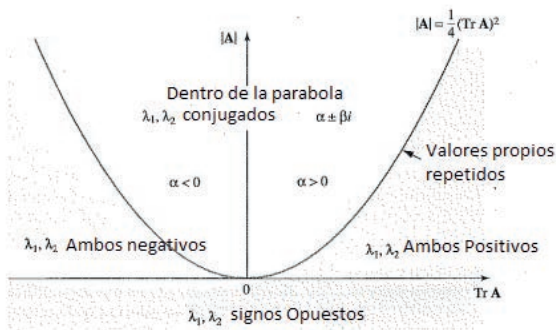
Luego por la fórmula cuadrática, resolviéndola para los valores propios en términos de la traza y el determinante de A, se tiene:

$$\lambda = \frac{\text{Tr}A \pm \sqrt{(\text{Tr}A)^2 - 4|A|}}{2} \quad (48)$$

El signo del discriminante $\Delta = (\text{Tr}A)^2 - 4|A|$ determina cuándo se tienen dos valores propios reales distintos, uno repetido o un par de valores propios de números complejos conjugados.

El hecho de que ahora tengamos dos parámetros $\text{Tr}A$ y $|A|$, en lugar de las cuatro entradas de la matriz originales, significa que podemos construir un gráfico en un plano de parámetro de $|A|$ con respecto a $\text{Tr}A$, donde las coordenadas de puntos en el plano de parámetros determinan los valores propios dados por (48)².

Figura 47. Parábola para el plano Traza – Determinante.



Fuente. Farlow, Hall, Mcdill y West. (2007).

2 Ver el texto de Hirsch Wess. 200. Morris, Smale Stephen, Debaney L. Robert. (2004). Differential Equations, Dynamical Systems An introductions to Chaos. Second Edition, Editorial Elsevier. Acaqdemc Press.

$$\Delta = (\text{Tr}A)^2 - 4|A| = 0$$

Nos da una parábola en el **plano traza determinante**.

Una vez que encontramos el valor propio, ¿cuál es el papel del vector propio? Para valores propios λ_1 , y λ_2 con vectores propios correspondientes \vec{v}_1 y \vec{v}_2 , obtenemos dos soluciones para el sistema inicial:

$$e^{\lambda_1 t} \vec{v}_1 \quad \text{y} \quad e^{\lambda_2 t} \vec{v}_2$$

Si estas soluciones son linealmente independientes, entonces ellas forman una base del espacio solución para el sistema. Por supuesto, esto no es siempre el caso, porque podemos tener valores propios repetidos, con un solo vector propio.

a. Valores propios reales distintos ($\Delta > 0$)

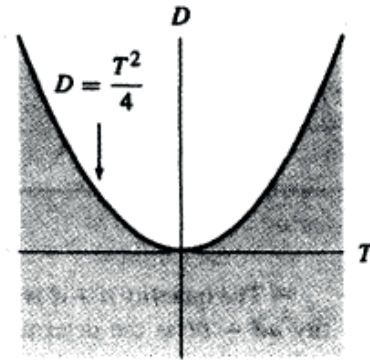
Comportamiento del nodo.

Cuando $\Delta = (\text{Tr}A)^2 - 4|A| > 0$ (en la región sombreada de la figura 48), tenemos valores propios reales $\lambda_1 \neq \lambda_2$, con los correspondientes vectores propios linealmente independientes \vec{v}_1 y \vec{v}_2 , y generan la solución general:

$$\vec{X}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \vec{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \vec{v}_2 \quad (49)$$

Los signos de los valores propios dirigen el comportamiento de la trayectoria en el retrato de fase.

Figura 48. Plano Traza – determinante.



$$(\text{Tr}A)^2 - 4|A| > 0$$

Fuente. Blanchard, Devaney y Hall (1999).

Es común etiquetar las direcciones **rápidas y lentas**, dependiendo de la magnitud de los valores propios. En todos los casos las trayectorias son paralelas al vector propio rápido y tangentes al vector propio lento.

Nodo atractor. ($\lambda_1 < \lambda_2 < 0$). Cuando $\lambda_1, y \lambda_2$ son ambos negativos, ambos términos de (49) tienden a cero cuando $t \rightarrow \infty$, también el punto fijo es asintóticamente estable y se dice que es un **nodo atrayente o un sumidero de nodo**. El término $e^{\lambda_1 t}$ tiende hacia cero más rápido que $e^{\lambda_2 t}$, por lo que las trayectorias tienden a acercarse al origen a lo largo de una trayectoria tangente a \vec{v}_2 . Llamamos \vec{v}_1 la **dirección propia rápida** y \vec{v}_2 la **dirección propia lenta**.

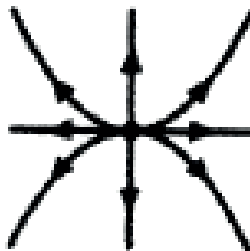
Figura 49. Nodo adyacente o nodo sumidero.

Un nodo atrayente (o nodo sumidero)

$$\lambda_1, \lambda_2 < 0$$

Fuente. Blanchard, Devaney y Hall (1999).

Nodo repeledor. ($0 < \lambda_1 < \lambda_2$). Cuando ambos λ_1 , y λ_2 son positivos, las soluciones de (49) tienden a infinito cuando $t \rightarrow \infty$. Los vectores \vec{v}_1 y \vec{v}_2 son la dirección propia lenta y rápida respectivamente. El término $e^{\lambda_2 t}$ crece más rápidamente que el término $e^{\lambda_1 t}$, por lo que las trayectorias tienden a ser paralelas (pero no asintóticas) a la dirección rápida \vec{v}_2 . El origen es llamado un **nodo repeledor** o un **nodo fuente**. Esto es claramente un punto fijo inestable.

Figura 50. Un nodo Repeledor o nodo fuente.

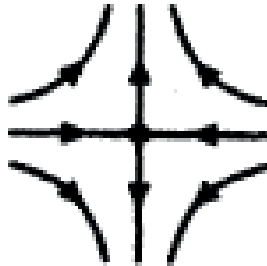
Un nodo repeledor (o nodo fuente)

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2$$

Fuente. Blanchard, Devaney y Hall (1999).

Punto de silla ($\lambda_1 < 0 < \lambda_2$). Cuando los valores propios λ_1 , y λ_2 tienen signos diferentes, las soluciones todavía tienen forma (49), pero los términos $e^{\lambda_1 t}$ y $e^{\lambda_2 t}$ se comportan de manera muy diferente cuando $t \rightarrow \infty$. El término $e^{\lambda_1 t}$ tiende hacia cero y $e^{\lambda_2 t}$ tiende hacia el infinito. En el plano de fase, el vector propio $\bar{\mathbf{v}}_1$ está apuntado hacia el origen y el vector propio $\bar{\mathbf{v}}_2$ está apuntado hacia fuera del origen. Las trayectorias se ralentizan cuando se aproximan al origen a lo largo de $\bar{\mathbf{v}}_1$ y se aceleran de nuevo cuando salen a lo largo de $\bar{\mathbf{v}}_2$. Usted puede ver este fenómeno como una solución gráfica, que evoluciona trazando trayectoria al usar un tamaño de paso muy pequeño (recuerde que no podemos ver t en el retrato de fase). La trayectoria en el plano de fase tenderá hacia $\bar{\mathbf{v}}_2$ asintóticamente. El punto fijo inestable en el origen se denomina punto de silla (figura 51).

Figura 51. (Un punto de silla)



Punto de silla

$$\lambda_1 < 0 < \lambda_2 \text{ Donde } |\lambda_1| > |\lambda_2|$$

Fuente. Blanchard, Devaney y Hall (1999).

Casos límite

Son los casos en que uno de los valores propios es cero o hay un valor propio repetido, los cuales son raros y serán manejados por separado más adelante sobre casos límites. Primero clasificaremos puntos fijos para la segunda categoría principal de soluciones, es decir, cuando los valores propios no son números reales.

Valores propios conjugados complejos. ($\Delta < 0$)

Comportamiento en espiral

Cuando $\Delta = (\text{Tr} \mathbf{A})^2 - 4|\mathbf{A}| < 0$ (en el área sombreada de la figura 40) tendremos valores propios no reales:

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta \text{ y } \lambda_2 = \alpha - i\beta,$$

Donde $\alpha = \text{Tr} \mathbf{A}/2$ y $\beta = -\sqrt{\Delta}$. Observe que α y β son reales, y $\beta \neq 0$.

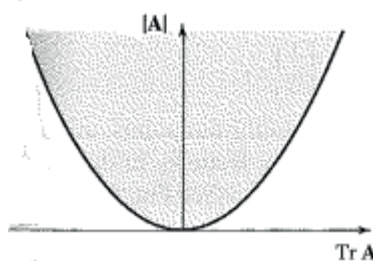
Recordemos de la sección 10.4 ecuación (38), que las soluciones reales están dadas por:

$$\overrightarrow{X}_{Re}(t) = e^{\alpha t} (\cos \beta t \cdot \vec{p} - \text{sen} \beta t \cdot \vec{q}) \quad (50)$$

$$\overrightarrow{X}_{Im}(t) = e^{\alpha t} (\text{sen} \beta t \cdot \vec{p} + \cos \beta t \cdot \vec{q})$$

Para valores propios complejos, el comportamiento de la estabilidad de las soluciones depende del signo de α .

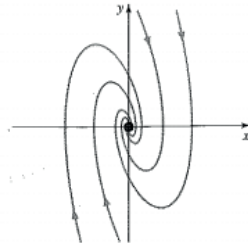
Figura 52. Parábola traza determinante.



Fuente. Elaborado por el autor con el programa Derive.

Atractor en espiral ($\alpha < 0$). Cuando α es negativo, las soluciones decaen hacia el origen, porque en (50) el factor $e^{\alpha t} \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. Luego las trayectorias son espirales descendientes que van hacia el punto fijo, el origen, el cual es asintóticamente estable y es llamado un **Atractor espiral o sumidero espiral** (figura 53).

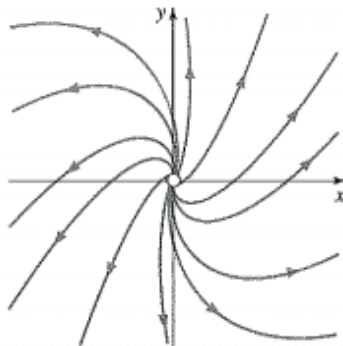
Figura 53. Atractor en espiral.



Fuente. Blanchard, Devaney y Hall (1999).

Repeledor en espiral ($\alpha > 0$). Cuando α es positivo las soluciones crecen, porque en (50) el factor $e^{\alpha t} \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$. Las trayectorias son espirales sin que crecen límite lejos del origen. El punto fijo en el origen es llamado un **Repeledor espiral o fuente espiral** y es claramente inestable (figura 54).

Figura 54. Repeledor en espiral.



Fuente. Blanchard, Devaney y Hall (1999).

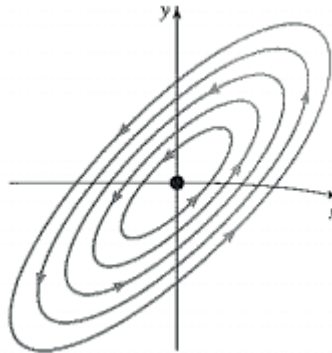
Centro ($\alpha = 0$). Cuando $\alpha = 0$, los valores propios son imaginarios puros. El sistema (50) se reduce a:

$$\overrightarrow{X_{Re}}(t) = (\cos\beta t \cdot \vec{p} - \operatorname{sen}\beta t \cdot \vec{q})$$

$$\overrightarrow{X_{Im}}(t) = (\operatorname{sen}\beta t \cdot \vec{p} + \cos\beta t \cdot \vec{q})$$

Las trayectorias en el plano de fase son bucles cerrados alrededor del punto fijo $\vec{x} = \vec{0}$, representa un movimiento periódico (figura 55). Este punto fijo es llamado un centro. Un centro no es atractor ni repeledor, por lo que es neutralmente estable. Esto sucede siempre que $\operatorname{Tr} A = 0$, en el plano traza-determinante ocurre a lo largo del eje vertical positivo.

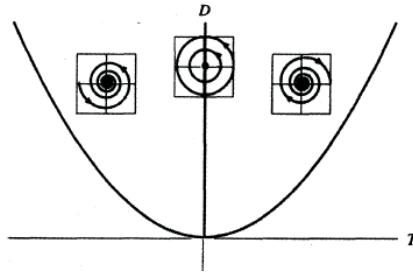
Figura 55. Punto fijo centro.



Fuente. Blanchard, Devaney y Hall (1999).

Estos tres casos los podemos resumir en la siguiente figura traza-determinante.

Figura 56. Resumen de los tres casos anteriores en la parábola traza determinante.

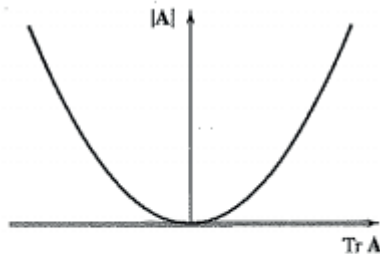


Fuente. Blanchard, Devaney y Hall (1999).

Caso límite: valores propios cero ($|\mathbf{A}| = 0$)

Cuando $|\mathbf{A}| = 0$ al menos un valor propio es cero. Si uno de los valores propios es cero, obtenemos una fila de puntos fijos no aislados en las direcciones propias asociadas con ese auto valor, y las trayectorias de plano de fase son todas rectas en la dirección del otro vector propio.

Figura 57. (Determinante cero en el plano traza determinante)



Valor propio cero ocurre sobre el eje horizontal en el plano traza determinante.

Fuente. Farlow, Hall, Mcdill y West. (2007).

Ejemplo 33. Un valor propio cero:

Analizar el sistema:

$$\vec{X}' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \cdot \vec{X}$$

Solución:

La ecuación característica es:

$$\lambda^2 - 5\lambda = 0$$

Entonces los valores propios son:

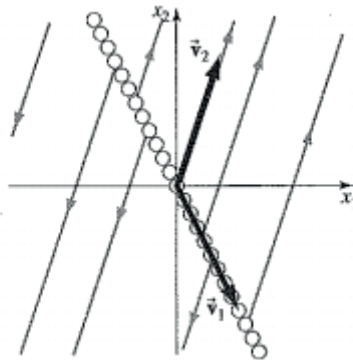
$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 5$$

Con vectores propios:

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ y } \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

A lo largo de \vec{v}_1 , tenemos que $\vec{X}' = \vec{0}$, luego existe una línea de puntos de equilibrio, inestable porque $\lambda_2 = 5 > 0$. Las otras trayectorias se alejan de \vec{v}_1 en dirección paralela a \vec{v}_2 . Ninguna de ellas puede cruzar \vec{v}_1 por la unicidad.

Figura 58. Caso especial para un vector propio igual a cero.



Fuente. Farlow, Hall, Mcdill y West. (2007).

Si los dos valores propios son ceros (un caso especial de valores propios repetidos), existe un solo vector propio a lo largo del cual tenemos una fila de puntos fijos no aislados. Las trayectorias desde cualquier otro punto del plano de fase también deben ir paralelas al vector propio, en las direcciones especificadas por el sistema.

Ejemplo 35: Valor propio cero, repetido:

Analizar el sistema:

$$\vec{x}' = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \vec{x}$$

Solución:

La ecuación característica es:

$$\lambda^2 = 0$$

Luego tenemos un valor propio repetido:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

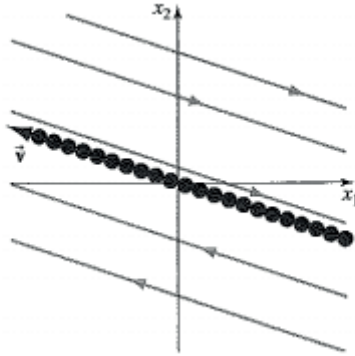
el cual tiene un solo vector propio:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A lo largo de \vec{v} se tiene $\vec{X} = \vec{0}$, luego de nuevo tenemos una línea de puntos de equilibrio. Cualquier otro punto en el plano de fase, se mueve en forma paralela al vector \vec{v} , cuya dirección está determinada por el sistema. Por ejemplo:

En $(1, 0)$, $x' = 3$, $y' = -1$, indica que se mueve a la derecha y hacia abajo.

En $(-1, 0)$, $x' = -3$, $y' = 1$, indica que se mueve hacia la izquierda y hacia arriba.

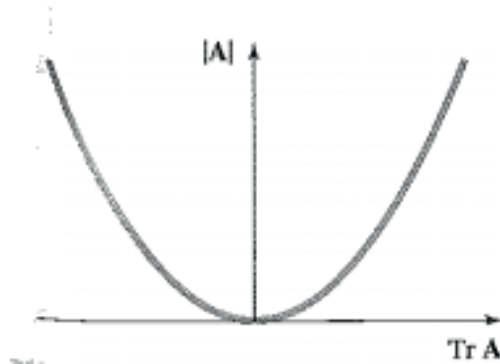
Figura 59. Valor propio cero repetido.

Fuente. Farlow, Hall, Mcdill y West. (2007).

Caso límite: valores propios reales repetidos ($\Delta = 0$)

Los puntos correspondientes a los valores propios repetidos están localizados sobre la parábola:

$$\Delta = (\text{Tr} A)^2 - 4|A| = 0$$

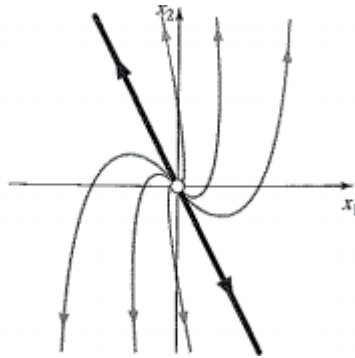
Figura 60. Gráfica para valores propios reales repetidos con $\Delta = 0$.

Fuente. Elaborado por el autor con el programa Derive.

En la figura 60 están en la frontera que separa las regiones entre espirales y nodos (es decir la región que separa los valores propios no reales y reales no repetidos respectivamente). El compor-

tamiento del plano de fase resultante depende de si hay uno o dos vectores linealmente independientes para λ . En otras palabras, ¿es la multiplicidad geométrica una o dos? Puede ser cualquiera, pero consideraremos la posibilidad más común primero.

Figura 61. Nodo generado.



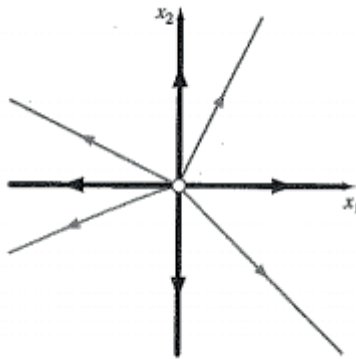
Fuente. Farlow, Hall, Mcdill y West. (2007).

Cuando un valor propio repetido λ tiene un vector propio linealmente independiente, el punto fijo es llamado un **nodo degenerado**. Atractor y asintóticamente estable para λ negativo, repeledor e inestable para λ positivo. El signo de valor propio da la estabilidad, porque solo existe una dirección propia, que cumple lo siguiente:

- Si $\lambda > 0$, las trayectorias tienden al infinito, paralelamente a \vec{v} .
- Si $\lambda < 0$, las trayectorias se aproximan al origen paralelamente a \vec{v} .
- Sí $\lambda = 0$, que se produce en el origen en el plano traza-determinante, una línea de puntos fijos se encuentra a lo largo del vector propio, todas las demás trayectorias son paralelas al vector propio (ver figura 59 del ejemplo 34).

Cuando un valor propio repetido λ , tiene dos vectores propios linealmente independientes, ellos generan el plano. En consecuencia, todo vector es un vector propio para λ . Toda trayectoria es en línea recta, aproximándose al origen, si λ es negativo o saliendo del origen si λ es positivo. El punto fijo es llamado un **punto atractor** o **repeledor** **nodo estrella** y es estable o inestable.

Figura 62. Gráfica de un Nodo estrella.

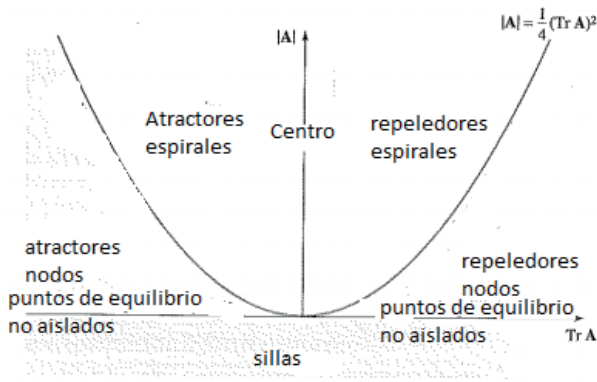


Fuente. Elaborado por el autor con el programa Derive.

Viajar a través del plano de parámetros

Ahora que todos los casos principales y fronterizos han sido explicados, estamos listos para pensar en lo que sucederá a medida que cambien los parámetros de la ecuación y nos movemos a través del plano traza-determinante, mostrado nuevamente en la siguiente figura. Para $\vec{X}' = \mathbf{A} \cdot \vec{X}$ si se tiene $\text{tr } A > 0$, o $|A| < 0$, el sistema es inestable.

Figura 63. Regiones en el plano traza determinante.

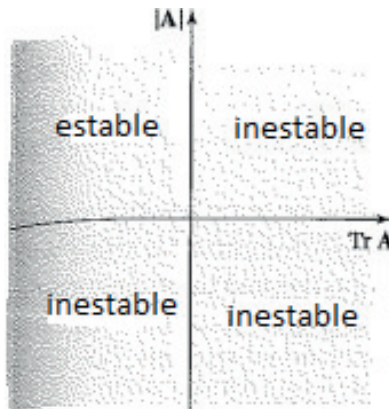


Plano traza-determinante para $\vec{X}' = A \cdot \vec{X}$

Fuente. Farlow, Hall, Mcdill y West. (2007).

Los comportamientos estables son la excepción más que la regla.

Figura 64. Regiones de clasificación en el plano traza determinante.



Fuente. Farlow, Hall, Mcdill y West. (2007).

Ejemplo 36. Amortiguar o no amortiguar:

Volvamos al oscilador armónico amortiguado no forzado, estudiado en el capítulo 8:

$$a x'' + b x' + c x = 0, \text{ con } a, c > 0, \text{ y } b \geq 0$$

Reescribir, la ecuación como un sistema de ecuaciones lineales y hacer el análisis de dicho sistema.

Solución:

Reescribiendo, la ecuación dada como un sistema, tenemos:

$$\begin{aligned} x' &= y, \\ y' &= -\frac{c}{a}x - \frac{b}{a}y, \end{aligned} \quad \vec{X}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{a} & -\frac{b}{a} \end{bmatrix} \cdot \vec{X}$$

De donde:

$$\text{Tr } A = -\frac{b}{a} \leq 0 \text{ y } |A| = \frac{c}{a} > 0$$

De donde se tiene que:

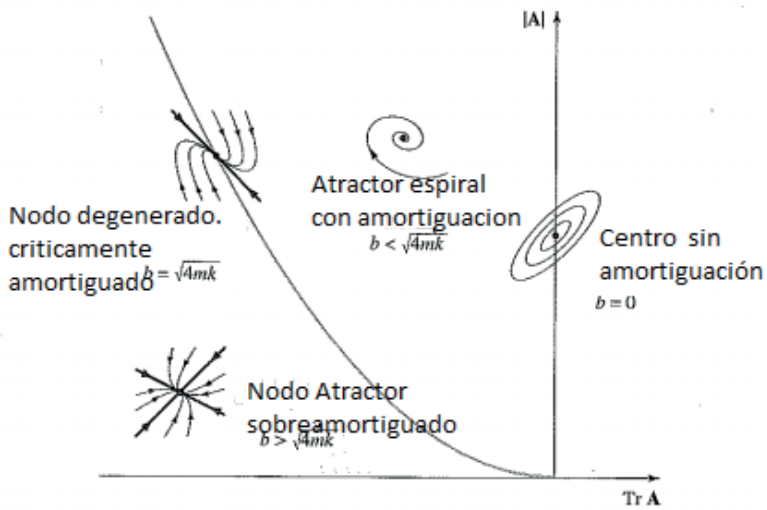
$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{-\frac{b}{a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{a^2} - 4\frac{c}{a}}}{2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a} \sqrt{b^2 - 4ac}$$

Supongamos que trazamos una trayectoria de puntos en una porción apropiada del plano de parámetros mostrada en la figura 58, que corresponden a las regiones:

- $b = 0$ (sin amortiguación).
- $0 < b < \sqrt{4ac}$ (con amortiguación).
- $b = \sqrt{4ac}$ (críticamente amortiguado).
- $b > \sqrt{4ac}$ (sobre-amortiguado).

Las inserciones en la figura 65 muestran los comportamientos en el retrato de fase típicos que se vería en cada caso.

Figura 65. Comportamiento en el retrato fase típico que se vería en cada caso.



Fuente. Farlow, Hall, Mcdill y West. (2007).

10.13 Ejercicios

Clasificación y verificación. Para cada uno de los sistemas de los ejercicios 1 al 6, verifique que el punto de equilibrio es el origen y que él tiene la característica mencionada de su comportamiento.

1. $\vec{X}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \cdot \vec{X}$ (punto de silla).
2. $\vec{X}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \vec{X}$ (centro).
3. $\vec{X}' = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \vec{X}$ (nodo estrella).
4. $\vec{X}' = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \vec{X}$ (nodo degenerado).
5. $\vec{X}' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \vec{X}$ (nodo).
6. $\vec{X}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \vec{X}$ (punto espiral).

7. **(Resorte sin amortiguamiento).** Convertir la ecuación del sistema masa resorte sin amortiguamiento:

$$x'' + \omega_0 x = 0$$

en un sistema de ecuaciones diferenciales lineales. Determine su punto o puntos de equilibrio y clasifique su geometría y estabilidad en cada uno de ellos.

8. **(Resorte amortiguado).** Considere la ecuación del resorte vibrante amortiguado, cuya ecuación es:

$$m x'' + b x' + k x = 0$$

en un sistema de ecuaciones diferenciales lineales (con masa m , constante de amortiguamiento b y constante del resorte k). Muestre que el origen es una solución de equilibrio y

clasifique su geometría y estabilidad como función de m , b y k .

9. **(Un valor propio cero).** Suponga que $\lambda_1 = 0$, y $\lambda_2 \neq 0$, demuestre que:

a. Existe una línea de puntos de equilibrio.

b. Las soluciones que comienzan en la línea de equilibrio tienden hacia la recta si $\lambda_2 < 0$, y alejándose de ella si $\lambda_2 > 0$.

10. **(Un ejemplo de cero como valor propio).** Considere el sistema:

$$\begin{aligned}x_1' &= 0 \\x_2' &= -x_1 + x_2\end{aligned}$$

a. Muestre que los valores propios son $\lambda_1 = 0$, y $\lambda_2 = 1$.

b. Encuentre los puntos de equilibrio del sistema.

c. Obtenga la solución general del sistema.

d. Muestre que las curvas solución son líneas rectas.

En los ejercicios 11 al 16 reescriba el sistema usando la notación matricial.

11.
$$\begin{aligned}x' &= -x + 3y \\y' &= 2y\end{aligned}$$

12.
$$\begin{aligned}x' &= 6x + 4y \\y' &= -8x - 6y\end{aligned}$$

13.
$$\begin{aligned}x' &= x + y \\y' &= -x + y\end{aligned}$$

14.
$$\begin{aligned}x' &= -y \\y' &= x\end{aligned}$$

15.
$$\begin{aligned}x' &= x + y \\y' &= -x + y + e^t\end{aligned}$$

16.
$$\begin{aligned}x' &= -y + \text{sent} \\y' &= x\end{aligned}$$

(Valores propios cero). En los problemas 17 al 20, se pide investigar la naturaleza de las soluciones del sistema 2×2 , $\vec{X}' = \mathbf{A} \vec{X}$, cuando ambos valores propios de \mathbf{A} son cero. Encuentre la solución, grafique todos los puntos fijos sobre el retrato de fase, e indique toda la información pertinente sobre su gráfica.

$$17. \vec{X}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \vec{X}$$

$$18. \vec{X}' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \cdot \vec{X}$$

$$19. \vec{X}' = \begin{bmatrix} 3 & -9 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \vec{X}$$

$$20. \vec{X}' = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -8 & 4 \end{bmatrix} \cdot \vec{X}$$

21. **(De nuevo cero)**. Considere el sistema:

$$\vec{X}' = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \vec{X}$$

- Encuentre los valores y vectores propios.
 - Trace las curvas solución típica en el plano de fase.
-

22. **(Todos cero)**. Describa el retrato de fase del sistema:

$$\vec{X}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \vec{X}$$

23. **(Estabilidad)**. Clasificar las propiedades geométricas y de estabilidad del sistema:

$$\vec{X}' = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \vec{X}$$

Para los siguientes valores del parámetro k .

- $k < -1$.
- $k = -1$.
- $-1 < k < 0$.
- $k = 0$.
- $k > 0$.

24. **(Punto de bifurcación).** Puntos de bifurcación son valores de un parámetro de un sistema, en el cual el comportamiento de las soluciones cambia cualitativamente. Determine los puntos de bifurcación del sistema:

$$\vec{X}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & k \end{bmatrix} \cdot \vec{X}$$

25. **(Relaciones interesantes).** El sistema $\vec{X}' = \mathbf{A} \cdot \vec{X}$. Donde:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Tiene los valores propios λ_1 , y λ_2 . Muestre lo siguiente:

$$\text{Tr } \mathbf{A} = \lambda_1 + \lambda_2 \quad \text{b. } |\mathbf{A}| = \lambda_1 \cdot \lambda_2$$

Interpretando el plano traza-determinante. Para $\vec{X}' = \mathbf{A} \cdot \vec{X}$, la figura 19 representa las posibles combinaciones de valores del plano traza $\text{Tr } \mathbf{A}$, y determinante $|\mathbf{A}|$. En los problemas 26 al 33, establezca los hechos acerca de la solución de equilibrio $\vec{X} = \vec{0}$.

26. Si $|\mathbf{A}| > 0$ y $(\text{Tr } \mathbf{A})^2 - 4|\mathbf{A}| > 0$, el origen es un nodo.

27. Si $|\mathbf{A}| < 0$, el origen es un punto de silla.

28. Si $\text{Tr}(\mathbf{A}) \neq 0$ y $(\text{Tr } \mathbf{A})^2 - 4|\mathbf{A}| < 0$, el origen es un punto espiral.

29. Si $\text{Tr}(\mathbf{A}) = 0$ y $|\mathbf{A}| > 0$, entonces el origen es un centro.

30. Si $(\text{Tr } \mathbf{A})^2 - 4|\mathbf{A}| = 0$ y $\text{Tr}(\mathbf{A}) \neq 0$, el origen es un nodo degenerado o nodo estrella.

31. Si $\text{Tr}(\mathbf{A}) > 0$ y $|\mathbf{A}| < 0$, el origen es inestable.

32. Si $|\mathbf{A}| > 0$ y $\text{TrA} = 0$, el origen es neutralmente estable. Este es el caso en donde los valores propios son imaginarios propios puros.

33. Si $|\mathbf{A}| < 0$ y $|\mathbf{A}| > 0$ el origen es asintóticamente estable.

10.14 Sistemas lineales de ecuaciones diferenciales desacoplados

La diagonalización es la clave

Miraremos cómo el proceso de diagonalización estudiado en álgebra lineal, que está ligado al cambio de base en un espacio vectorial, nos permite analizar más fácilmente algunos sistemas de ecuaciones diferenciales lineales. Para muchos sistemas es verdadero que los vectores propios forman una base superior para el sistema. Estos vectores propios definen las direcciones del comportamiento de las soluciones del sistema³.

Vamos a mirar esta idea mostrando cómo el proceso de diagonalización para un sistema de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, se puede llevar a cabo si la matriz es diagonalizable.

³ Una exposición muy importante de este tema lo podemos encontrar en Perko Lawrence. (2001). *Differential Equations and Dynamical Systems*. Third Edition. Editorial Springer.

Diagonalización de una matriz

Una matriz $n \times n$, A es diagonalizable si tiene n valores propios y n vectores propios linealmente independientes. Podemos construir:

- Una matriz D diagonal cuyos elementos de la diagonal son los valores propios de A .
- P una matriz cuyas columnas son los vectores propios, listados en el orden correspondiente a él orden de los valores propios en la matriz D .
- P es una matriz de cambio de base tal que:

$$A = PDP^{-1} \text{ y } D = P^{-1}AP \text{ (51)}$$

Decimos en este caso que P diagonaliza A .

Las ecuaciones en (51) son bastante útiles, para comprobar sus cálculos, o para probar muchos resultados sorprendentes, como el siguiente.

Desacoplado un sistema lineal homogéneo

Para un sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\vec{X}' = \mathbf{A} \cdot \vec{X} \text{ (52)}$$

Con matriz diagonalizable A , el cambio de variables:

$$\vec{X} = \mathbf{P}\vec{W} \text{ (53)}$$

Transforma el sistema (52), en un sistema desacoplado:

$$\vec{W}' = \mathbf{D} \cdot \vec{W} \text{ (54)}$$

Donde cada ecuación componente involucra una sola variable que puede ser fácilmente resuelta para encontrar \vec{W} . La solución general \vec{X} para (52) se sigue de (53).

Prueba:

Si $\vec{X} = P\vec{W}$, entonces, $\vec{W} = P^{-1}\vec{X}$, y:

$$\vec{W}' = P^{-1}\vec{X}' = P^{-1}A\vec{X} = P^{-1}(PDP^{-1})\vec{X} = D\vec{W}$$

En el sistema (54) las variables ya no se mezclan como en (52). Cada ecuación de componente de (64) es un sistema de ecuaciones diferenciales lineal de primer orden en una sola variable dependiente, y ya se sabe cómo resolver este tipo de ecuaciones. Una vez que haya encontrado cada solución de componentes w_i se puede encontrar $\vec{X} = P\vec{W}$ mediante una simple multiplicación de matriz. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 37. Diagonalizando:

Aplicar el proceso de diagonalización para resolver el sistema:

$$\vec{X}' = A\vec{X} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \vec{X} \quad (55)$$

Solución:

Primero calculamos los valores propios de la matriz A, obteniendo que $\lambda_1 = 4$ y $\lambda_2 = 1$. Los vectores propios correspondientes son:

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ y } \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

A partir de los valores propios y de los vectores propios construimos las matrices:

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ y } P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Luego podemos reemplazar el sistema dado en (55) por el sistema transformado correspondiente $\vec{W}' = D\vec{W}$, es decir:

$$\begin{aligned} x_1' &= 2x_1 + 2x_2 & \Rightarrow & w_1' = 4w_1 \\ x_2' &= x_1 + 3x_2 & & w_2' = w_2 \end{aligned} \quad (56)$$

La solución para el sistema \overline{W} es inmediata:

$$w_1(t) = c_1 e^{4t} \text{ y } w_2(t) = c_2 e^t$$

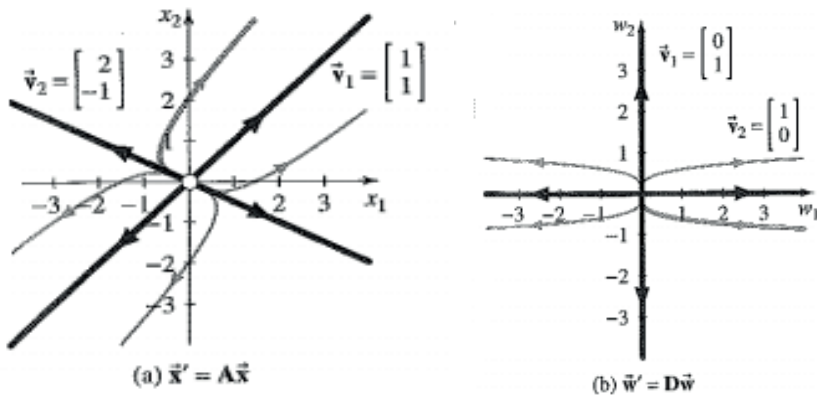
Por (53) tenemos que la solución general para (55) es:

$$\overline{X} = P\overline{W} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 e^{4t} \\ c_2 e^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{4t} + 2c_2 e^t \\ c_1 e^{4t} - c_2 e^t \end{bmatrix}$$

Se puede observar que este es el mismo resultado del ejercicio 19 de la sección 10.3.

En la figura 66 se muestran los retratos de fase de los dos sistemas (56) en el ejemplo 36, en donde se muestra lo que el desacoplamiento logra. Los vectores propios en el espacio \overline{X} han sido rotados (individualmente) para alinearse con los ejes en el espacio $-\overline{W}$.

Figura 66. Retrato de fase de dos sistemas desacoplados.



Fuente. Farlow, Hall, McMillan and West. (2007).

El ejemplo (36) ilustra que para obtener la solución general a un sistema homogéneo de ecuaciones diferenciales lineal, solo es necesario encontrar D para la ecuación (54) y P para la ecuación (53). El computo P nos permite (a) revisar nuestros cálculos o (b)

incorporar una condición inicial \vec{X}_0 . Podemos evaluar entonces c_1 en solución general usando el siguiente hecho: $\vec{X}_0 = P\vec{W} = P\vec{C}$, luego:

$$\vec{C} = P^{-1}\vec{X}_0 \quad (57)$$

Ejemplo 38. Explotando P-1:

Utilizando la ecuación (57), encontrar la solución particular del ejemplo (36) para $\vec{X}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Solución:

Para nuestro ejemplo (36) se tiene que:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{bmatrix}$$

Podemos confirmar nuestro cálculo usando la multiplicación y la ecuación (51), es decir:

$$D = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para encontrar la solución que pasa por el punto $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, calculamos c_1 y c_2 : usando (57), es decir:

$$\vec{C} = P^{-1}\vec{X}_0$$

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/3 \\ -2/3 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo en la solución general (53) se tiene:

$$\vec{X} = P\vec{W} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4/3 e^{4t} \\ -2/3 e^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/3 e^{4t} - 4/3 e^t \\ 4/3 e^{4t} + 2/3 e^t \end{bmatrix}$$

Ejemplo 39. En tres dimensiones:

Resolver el sistema:

$$\vec{X}' = \mathbf{A} \cdot \vec{X}$$

Para:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Solución:

La ecuación característica está dada por:

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = \lambda(\lambda + 3)^2 = 0$$

De donde los valores propios son: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda_3 = -3$. A pesar de que existe un valor propio repetido, podemos encontrar suficientes vectores propios linealmente independientes:

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ y } \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

que diagonalizan la matriz \mathbf{A} . Entonces podemos escribir con estos valores propios y vectores propios:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \text{ y } \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Con $\vec{X} = \mathbf{P}\vec{W}$, convertimos el sistema $\vec{X}' = \mathbf{A} \cdot \vec{X}$, en el sistema más simple $\vec{W}' = \mathbf{D} \cdot \vec{W}$, es decir:

$$\begin{aligned} x_1' &= -2x_1 + x_2 + x_3 & w_1' &= 0 \\ x_2' &= x_1 - 2x_2 + x_3 & \Rightarrow w_2' &= -3w_2 \\ x_3' &= x_1 + x_2 - 2x_3 & w_3' &= -3w_3 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema $\vec{W}' = \mathbf{D} \cdot \vec{W}$, nos da:

$$\vec{W}(t) = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 e^{-3t} \\ c_3 e^{-3t} \end{bmatrix}$$

Entonces, el sistema de ecuaciones diferenciales $\vec{X}' = \mathbf{A} \cdot \vec{X}$, tiene como solución:

$$\vec{X} = \mathbf{P} \vec{W} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 e^{-3t} \\ c_3 e^{-3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 - (c_2 + c_3) e^{-3t} \\ c_1 + c_2 e^{-3t} \\ c_1 + c_3 e^{-3t} \end{bmatrix}$$

Sistemas no homogéneos desacoplados

La mejor ventaja del proceso de diagonalización con ecuaciones diferenciales se da cuando este proceso se puede extender a sistemas de ecuaciones diferenciales no homogéneos.

Desacoplando un sistema lineal no homogéneo de ecuaciones diferenciales de primer orden

Para desacoplar un sistema lineal de la forma:

$$\vec{X}' = \mathbf{A} \cdot \vec{X} + \mathbf{f}(t) \quad (58)$$

Donde \mathbf{A} es una matriz $n \times n$ que tiene n vectores propios linealmente independientes, se procede como sigue.

Paso 1. Calcule los valores propios de la matriz \mathbf{A} , con sus n vectores propios correspondientes.

Paso 2. Encuentre la matriz diagonal \mathbf{D} cuyos elementos de la diagonal son los valores propios de \mathbf{A} y la matriz \mathbf{P} cuyas columnas son los n vectores propios, listados en el orden de sus correspondientes valores propios. Entonces encuentre \mathbf{P}^{-1} .

Paso 3. Sea:

$$\vec{X} = P \cdot \vec{W} \quad (59)$$

Y resuelva el sistema desacoplado:

$$\vec{W}' = D \cdot \vec{W} + P^{-1} \vec{f}(t) \quad (60)$$

Paso 4. Resuelva (58) usando (59) y la solución para (60).

Prueba:

$$\begin{aligned} \vec{W}' &= (P^{-1} \vec{X})' = P^{-1} \vec{X}' \\ &= P^{-1} (A \cdot \vec{X} + f(t)) \\ &= P^{-1} A \vec{X} + P^{-1} \vec{f} \\ &= P^{-1} (P D P^{-1}) \vec{X} + P^{-1} \vec{f} \\ &= D \vec{W} + P^{-1} \vec{f} \end{aligned}$$

El sistema transformado (60) es también un sistema de ecuaciones diferenciales lineales no homogéneo, con función forzada $P^{-1} \vec{f}$. Las ecuaciones componentes del sistema son ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas, que se pueden resolver tal como se hizo en los primeros capítulos.

Ejemplo 40. Desacoplando sistemas lineales no homogéneos:

Resolver el sistema:

$$\begin{aligned} x_1' &= -3x_1 + x_2 \\ x_2' &= x_1 - 3x_2 + e^{-t} \end{aligned}$$

No homogéneo 2×2 .

Solución:

Este sistema tiene la forma de la ecuación (57) donde:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \text{ y } \vec{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-t} \end{bmatrix}$$

Calculando los valores propios de la matriz A, se tiene que $\lambda_1 = -2$, y $\lambda_2 = -4$, con vectores propios linealmente independientes:

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ y } \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Respectivamente, luego tenemos que la matriz diagonal D y la matriz P son:

$$D = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \text{ y } P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

Luego el nuevo término forzado es:

$$P^{-1}\vec{f} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{-t} \\ -\frac{1}{2}e^{-t} \end{bmatrix}$$

De donde nuestro sistema desacoplado es:

$$\vec{W}' = D \cdot \vec{W} + P^{-1}\vec{f}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{-t} \\ -\frac{1}{2}e^{-t} \end{bmatrix}$$

O:

$$\begin{aligned} w_1' &= -2w_1 + \frac{1}{2}e^{-t} \\ w_2' &= -4w_2 - \frac{1}{2}e^{-t} \quad (61) \end{aligned}$$

Resolviendo las ecuaciones desacopladas de (61) separadamente, con los métodos dados en los primeros capítulos, se tiene:

$$\begin{aligned} w_1 &= c_1 e^{-2t} + \frac{1}{2} e^{-t} \\ w_2 &= -\frac{1}{6} e^{-t} \end{aligned}$$

Ahora usamos el hecho de que $\vec{X} = \mathbf{P} \cdot \vec{W}$ (ver ejemplo 59) para obtener:

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & -\mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 + w_2 \\ w_1 - w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-4t} + \frac{1}{3} e^{-t} \\ c_1 e^{-2t} - c_2 e^{-4t} + \frac{2}{3} e^{-t} \end{bmatrix}$$

De la que podemos escribir:

$$x_1(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-4t} + \frac{1}{3} e^{-t} \quad \text{y} \quad x_2(t) = c_1 e^{-2t} - c_2 e^{-4t} + \frac{2}{3} e^{-t}$$

10.15 Ejercicios

Desacoplando sistemas lineales homogéneos. Para los problemas 1 al 10, construya apropiadamente las matrices diagonales que desacoplen el sistema lineal, y luego resuelva el sistema.

$$1. \vec{X}' = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \vec{X}$$

$$2. \vec{X}' = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \vec{X}$$

$$3. \vec{X}' = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \vec{X}$$

$$4. \vec{X}' = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \vec{X}$$

$$5. \vec{X}' = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \cdot \vec{X}$$

$$6. \vec{X}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \vec{X}$$

$$7. \vec{X}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \vec{X}$$

$$8. \vec{X}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \vec{X}$$

$$9. \vec{X}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \vec{X}$$

$$10. \vec{X}' = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \vec{X}$$

Desacoplando sistemas lineales no homogéneos. Para los problemas 11 al 20 construya la diagonalización apropiada de las matrices, desacople el sistema lineal y luego resuelva el sistema no homogéneo.

$$11. \vec{X}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \vec{X} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$12. \vec{X}' = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \vec{X} + \begin{bmatrix} \text{sent} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$13. \vec{X}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \vec{X} + \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$14. \vec{X}' = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \vec{X} + \begin{bmatrix} 5t \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$15. \vec{X}' = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \vec{X} + \begin{bmatrix} t \\ 2t \end{bmatrix}$$

$$16. \vec{X}' = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 11 \end{bmatrix} \cdot \vec{X} + \begin{bmatrix} e^t \\ e^t \end{bmatrix}$$

$$17. \vec{X}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \vec{X} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$18. \vec{X}' = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \vec{X} + \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$19. \vec{X}' = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \vec{X} + \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \end{bmatrix}$$

20. **Trabajando hacia atrás.** Encuentre una matriz con valores propios $\lambda_1 = 1$, y $\lambda_2 = -1$, y correspondientes vectores propios:

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ y } \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

21. **Formas de Jordan.** Para el sistema:

$$\vec{X}' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \vec{X} \quad (62)$$

El desacoplamiento golpea con un obstáculo. La matriz A tiene un valor propio λ de multiplicidad dos, con un solo vector propio independiente, luego la matriz A no puede diagonalizarse. Sin embargo, esto se puede solucionar utilizando la forma de Jordan.

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Por un procedimiento un poco parecido al de la diagonalización. Sea $P = [\vec{v} \ \vec{w}]$, es la matriz 2×2 que se forma con los vectores columnas de \vec{v} y \vec{w} , donde \vec{v} es el vector propio correspondiente a λ , es decir una solución de la ecuación $(A - \lambda I) \cdot \vec{v} = \vec{0}$ y \vec{w} , es la solución de:

$$(A - \lambda I) \cdot \vec{w} = \vec{v}$$

(En otras palabras, \vec{w} es el vector propio generalizado de A).

- Calcular λ , \vec{w} , P y P^{-1} , verifique que $P^{-1}AP = J$.
 - Muestre cómo se puede usar una modificación en el método de desacoplación para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales lineales (62).
-

22. **(Desacoplación compleja).** Encontrar las soluciones para:

$$\vec{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \vec{x}$$

por el método dado en la sección 10.3, luego encuentre la solución desacoplando y confirme que usted puede obtener el mismo resultado.

10.16 Matriz exponencial

La idea de esta sección es definir e^A y e^{At} para una matriz A de tamaño $n \times n$, y usar este hecho para dar una forma alternativa de resolver un sistema de n ecuaciones diferenciales lineales, ya sean homogéneas o no homogéneas.

Matriz exponencial constante

Para una constante a , hemos visto que la solución general de la ecuación diferencial de primer orden $y' = ay$ es, $y = ce^{at}$, donde c es una constante arbitraria. Mostraremos ahora que esto es posible definirlo para una matriz $n \times n$ de la forma e^{At} , tal que si se tiene:

$$\vec{X} = e^{At} \vec{C}$$

Esta es una solución del sistema lineal $\vec{X}' = \mathbf{A} \cdot \vec{X}$, donde \mathbf{A} es una matriz constante $n \times n$, y \vec{C} es el vector $n \times 1$ de constantes arbitrarias. En (61) el vector \vec{C} está posmultiplicando a la matriz e^{At} debido a que el producto $e^{At} \vec{C}$ es un vector $n \times 1$.

Nuestra primera tarea es definir e^A para una matriz cuadrada constante A . Una motivación importante para definir la exponencial de una matriz, involucra la serie de expansión del escalar de la función exponencial:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^k}{k!} + \dots, \quad (62)$$

la cual es convergente para cualquier número real o complejo x . Reemplazando el número 1 por la matriz idéntica I , y x una matriz A de tamaño $n \times n$, nos da la matriz exponencial:

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots + \frac{A^k}{k!} + \dots, \quad (63)$$

El cálculo de la matriz exponencial no es fácil, debido al hecho de que es una serie infinita, pero en algunos casos, como cuando la matriz A es una matriz diagonal, este cálculo es sencillo.

Ejemplo 41. La matriz exponencial de una matriz diagonal:

Para la matriz diagonal $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ se tiene que $A^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{bmatrix}$. ¿Cuál sería la expresión para la matriz exponencial?

Solución:

Por (63) se tiene que:

$$\begin{aligned} e^A &= I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots + \frac{A^k}{k!} + \dots \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{a^2}{2} & 0 \\ 0 & \frac{b^2}{2} \end{bmatrix} + \dots \\ &= \begin{bmatrix} 1 + a + \frac{a^2}{2} + \dots & 0 \\ 0 & 1 + b + \frac{b^2}{2} + \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^b \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Entonces, la exponencial de una matriz diagonal 2×2 , con la observación anterior se ve que es también una matriz con sus elementos en la diagonal exponenciales. Luego para una matriz $n \times n$ diagonal se sigue por inducción, así como el mismo razonamiento anterior que la matriz exponencial de:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_n \end{bmatrix} \text{ es simplemente } A^n = \begin{bmatrix} e^{a_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{a_n} \end{bmatrix}.$$

Las matrices nilpotentes forman otro tipo de matrices cuadradas, para las cuales es muy fácil encontrar su matriz exponencial.

Matrices nilpotentes

Una matriz cuadrada A , es llamada nilpotente si $A^n = 0$, para algún entero positivo n .

En el caso de una matriz nilpotente, la serie (63) termina después de un número finito de pasos, luego la matriz exponencial e^A es una suma finita. Una clase de matrices nilpotentes es la clase de matrices triangulares, para las cuales todas las entradas por debajo de la diagonal de la matriz son cero.

Ejemplo 42. Matriz nilpotente:

Encuentre la matriz exponencial e^A para la matriz triangular:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Solución:

Para el cálculo de e^A , basta calcular:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego para $n \geq 3$, se tiene que $A^n = 0$, por lo tanto:

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots + \frac{A^k}{k!} + \cdots$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \cdots$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz exponencial e^A satisface muchas de las propiedades de la función exponencial escalar.

Propiedades de la matriz exponencial e^A

1. $e^0 = I_n$, donde 0 es la matriz cero $n \times n$.
2. $(e^A)^{-1} = e^{-A}$
3. Si $A \cdot B = B \cdot A$, entonces $e^{A \cdot B} = e^A e^B$.

La función matriz exponencial

Si t es un escalar variable, entonces reemplazando la matriz constante A , por tA tenemos la función matriz exponencial.

La función matriz exponencial

Dada una matriz constante $n \times n$ A :

$$e^{tA} = I + tA + \frac{t^2}{2!} A^2 + \dots + \frac{t^k}{k!} A^k + \dots \quad (64)$$

Se puede mostrar que la serie (64) converge para una matriz $n \times n$ para t .

Ejemplo 43. Función matriz nilpotente:

Usando la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Del ejemplo (41), calcular la función matriz exponencial e^{tA} .

Solución:

De acuerdo con el ejemplo anterior, podemos proceder como sigue:

$$\begin{aligned}
 e^{tA} &= I + tA + \frac{t^2}{2!} A^2 \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{t^2}{2!} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & -t & 2t - t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Teorema. Derivación de la función matriz exponencial

$$\frac{d}{dt}(e^{tA}) = Ae^{At} \quad (65)$$

Prueba:

La derivada de e^{tA} , se sigue de la misma forma que la derivada de la función escalar e^{ax} , es decir $\frac{d}{dx}(e^{ax}) = ae^{ax}$. Para verificar esto en el caso vectorial, basta derivar la serie de potencias dada en (64) término a término, estos son:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx}(e^{At}) &= \frac{d}{dx} \left(I + tA + \frac{t^2}{2!} A^2 + \dots + \frac{t^k}{k!} A^k + \dots \right) \\
 &= 0 + A tA^2 + \dots \\
 &= A \left(I + tA + \frac{t^2}{2!} A^2 + \dots + \frac{t^k}{k!} A^k + \dots \right) = Ae^{At}
 \end{aligned}$$

Teorema. Solución matricial de la ecuación diferencial

$$\vec{X}' = A \cdot \vec{X}$$

La solución general de:

$$\vec{X}' = A \cdot \vec{X} \quad (66)$$

Donde A es una matriz constante de tamaño $n \times n$, está dada por:

$$\vec{X} = e^{At} \vec{C} \quad (67)$$

Donde \vec{C} es una $n \times 1$ vector de constantes arbitrarias.

Si una condición inicial, $\vec{X}(0) = \vec{X}_0$ es adicionada a la condición (66), entonces el resultado del problema con condición inicial es:

$$\vec{X} = e^{At} \vec{X}_0 \quad (68)$$

Prueba:

Por sustitución directa de (67) en (66), tenemos que:

$$\vec{X}' = \frac{d}{dx}(\vec{X}) = \frac{d}{dx}(e^{At} \vec{C}) = A e^{At} \vec{C} = A \vec{X}$$

Luego, la matriz exponencial e^{At} es una matriz fundamental $\vec{X}(t)$ del sistema lineal $\vec{X}' = A \cdot \vec{X}$.

Sustituyendo por la condición inicial $\vec{X}(0) = \vec{X}_0$, se tiene $\vec{C} = \vec{X}_0$, entonces la sustitución del problema con valor inicial nos da (68).

Ejemplo 44. Un problema de un oscilador armónico:

Resolver el siguiente sistema mediante la solución matricial:

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -x, \end{aligned}$$

Solución:

Escribiendo el sistema en la forma matricial $\vec{X}' = A \cdot \vec{X}$, se tiene:

$$\vec{X}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \vec{X}$$

Para encontrar la solución en la forma de matriz exponencial, se requiere calcular:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = -I \cdot A = -A$$

$$A^4 = A^3 A = -A \cdot A = -A^2 = I$$

$$A^5 = A$$

⋮

Luego la matriz exponencial e^{At} , matriz fundamental, es:

$$\begin{aligned} e^{At} &= I + tA - \frac{t^2}{2!}I - \frac{t^3}{3!}A + \frac{t^4}{4!}I + \dots \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \frac{t^2}{2!} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{t^3}{3!} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{t^4}{4!} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \dots \\ &= \begin{bmatrix} 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots & t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots \\ -t + \frac{t^3}{3!} - \frac{t^5}{5!} + \dots & 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Luego la solución general para el oscilador armónico puede ser escrita como:

$$\begin{aligned} \vec{X}(t) &= e^{At} \vec{C} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c_1 \cos t + c_2 \sin t \\ -c_1 \sin t + c_2 \cos t \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Interpretación alternativa de la matriz exponencial

La matriz exponencial e^{At} puede ser siempre calculada de acuerdo a la definición dada en (64), la cual involucra series infinitas, pero este enfoque sólo podría aplicarse fácilmente en casos con ciertos patrones de repetición inherente. Afortunadamente hay otras maneras de encontrar e^{At} que no usan la definición. Algunas maneras siguen

en esta sección. En el capítulo siguiente veremos cómo lo podríamos hacer usando la transformada de Laplace.

Teorema:

La solución del problema con valor inicial:

$$\vec{X}' = \mathbf{A} \cdot \vec{X} \quad \vec{X}(0) = \vec{X}_0$$

Puede ser escrito de manera compacta en términos de la matriz fundamental \vec{X} , cuyas columnas son los vectores solución linealmente independientes \vec{x}_i de $\vec{X}' = \mathbf{A} \cdot \vec{X}$. Entonces tenemos:

$$e^{At} = \mathbf{X}(t) \cdot \mathbf{X}^{-1}(0) \quad (69)$$

Prueba:

La solución general de $\vec{X}' = \mathbf{A} \cdot \vec{X}$ es:

$$\vec{X} = a_1 \vec{x}_1 + a_2 \vec{x}_2 + \dots + a_n \vec{x}_n$$

O:

$$\vec{X} = \mathbf{X}(t) \cdot \vec{a}$$

Donde \vec{a} es un vector constante con componentes a_1, a_2, \dots, a_n . Para un valor inicial $\vec{X}(0) = \vec{X}_0$, tenemos:

$$\mathbf{X}(0) \cdot \vec{a} = \vec{X}_0 \quad \vec{a} = \mathbf{X}^{-1}(0) \vec{X}_0$$

Esta es la única solución al problema con condición inicial. Pero la solución puede ser también expresada únicamente como la matriz exponencial $\vec{X} = e^{At} \vec{X}_0$, así que:

$$e^{At} \vec{X}_0 = \mathbf{X}(t) \mathbf{X}^{-1}(0) \vec{X}_0$$

Luego:

$$e^{At} = \mathbf{X}(t) \cdot \mathbf{X}^{-1}(0)$$

Y la matriz exponencial e^{At} es la matriz fundamental para el problema con valor inicial $\vec{\mathbf{X}}' = \mathbf{A} \cdot \vec{\mathbf{X}}$, y $\vec{\mathbf{X}}(0) = \vec{\mathbf{X}}_0$.

Ejemplo 45. Puerta trasera a la matriz exponencial:

Resolver el sistema $\vec{\mathbf{X}}' = \mathbf{A} \cdot \vec{\mathbf{X}}$, para:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Utilizando el teorema anterior.

Solución:

Los valores propios para la matriz A son: $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1$ y este sistema tiene matriz fundamental:

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ 2e^{3t} & -2e^{-t} \end{bmatrix}, \text{ luego } \mathbf{X}^{-1}(0) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Usando el teorema, la expresión (69), podemos calcular que:

$$\begin{aligned} e^{At} = \mathbf{X}(t) \cdot \mathbf{X}^{-1}(0) &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ 2e^{3t} & -2e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2e^{3t} + 2e^{-t} & e^{3t} - e^{-t} \\ 4e^{3t} - 4e^{-t} & 2e^{3t} + 2e^{-t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Otra interpretación útil de e^{At} es cómo una matriz $n \times n$ cuya i -ésima columna es la única solución del problema con valor inicial:

$$\vec{\mathbf{X}}' = \mathbf{A} \vec{\mathbf{X}}, \vec{\mathbf{X}}_i(0) = \vec{\mathbf{e}}_i$$

Donde $\vec{\mathbf{e}}_i$ es el vector $n \times 1$ con 1 en la posición i y ceros en todos los otros lugares.

Sistemas lineales de ecuaciones diferenciales no homogéneos

Vimos cómo podemos calcular el valor de la matriz exponencial e^{At} si queremos resolver el sistema $\vec{X}' = A\vec{X}$ encontrando los valores propios y vectores propios de la matriz A. Una forma similar nos permite resolver el problema cuando el sistema lineal es no homogéneo, es decir si se tiene el sistema:

$$\vec{X}' = A\vec{X} + \vec{f}(t)$$

además, recordando la notación usada cuando se tiene la ecuación diferencial lineal no homogénea.

Escalar:

$$x' + p(t)x = f(t)$$

La cual resolvimos de manera general en el capítulo 4.

Escribimos nuestro sistema lineal no homogéneo como:

$$\vec{X}' - A\vec{X} = \vec{f}(t)$$

Donde A es una matriz constante y $\vec{f}(t)$ es un $n \times 1$ vector de funciones. Si multiplicamos cada lado por la matriz exponencial e^{-At} , la matriz equivalente al factor escalar de integración $e^{\int p(t)dt}$, se tiene:

$$e^{-At}(\vec{X}' - A\vec{X}) = e^{-At}\vec{f}(t) \quad (70)$$

Por la derivación de una matriz, tenemos:

$$\frac{d}{dx}(e^{-At}\vec{X}) = e^{-At}(-A)\vec{X}(t) + e^{-At}\vec{X}'(t) = e^{-At}(\vec{X}' - A\vec{X}) \quad (71)$$

Entonces (70) se puede escribir como:

$$\frac{d}{dx}(e^{-At}\vec{X}) = e^{-At}\vec{f}(t)$$

Integrando, encontramos:

$$e^{-At}\vec{X} = \int_0^t e^{-As}\vec{f}(s)ds + \vec{C}$$

Usando la propiedad en la cual: $e^{At}e^{-At} = \mathbf{I}$, obtenemos la solución general:

$$\vec{X}(t) = e^{At}\vec{C} + e^{At} \int_0^t e^{-As}\vec{f}(s)ds$$

Todo el proceso anterior nos prueba el siguiente teorema.

Teorema. Matriz exponencial solución de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales no homogéneo

Si A es una matriz constante $n \times n$ y $\vec{f}(t)$ es un vector $n \times 1$ de funciones, entonces la solución del sistema lineal no homogéneo:

$$\vec{X}' = A\vec{X} + \vec{f}(t)$$

Dada en términos de la matriz exponencial, es:

$$\vec{X}(t) = e^{At}\vec{C} + e^{At} \int_0^t e^{-As}\vec{f}(s)ds \quad (72)$$

Si la condición inicial $\vec{X}(0) = \vec{X}_0$ es dada, entonces la única solución está dada por:

$$\vec{X}(t) = e^{At}\vec{X}_0 + e^{At} \int_0^t e^{-As}\vec{f}(s)ds \quad (73)$$

Ejemplo 46. Sistema lineal de ecuaciones diferenciales no homogéneo:

Resolver el sistema:

$$\vec{X}' = A\vec{X} + \vec{f}(t)$$

$$\text{Donde } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } \vec{f}(t) = \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Solución:

Por el ejemplo 43, sabemos que:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}, \text{ luego } e^{-At} = (e^{At})^{-1} = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

Para hallar la solución debemos calcular:

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{-As} \vec{f}(s) ds &= \int_0^1 \begin{bmatrix} \cos s & -\sin s \\ \sin s & \cos s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ 0 \end{bmatrix} ds \\ &= \int_0^t \begin{bmatrix} s \cos s \\ s \sin s \end{bmatrix} ds = \int_0^t \begin{bmatrix} t \sin t + \cos t \\ -t \cos t + \sin t \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Luego por el teorema anterior, se tiene que la solución es:

$$\begin{aligned} \vec{X}' &= A\vec{X} + \vec{f}(t) \\ &= e^{At} \vec{C} + e^{At} \int_0^t e^{-As} \vec{f}(s) ds \\ &= \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} t \sin t + \cos t \\ -t \cos t + \sin t \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 - \cos t \\ \sin t - t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Conectando la matriz exponencial y las funciones propias

Hemos visto que un método de solución de $\vec{X}' = A\vec{X}$ conduce a la matriz exponencial $\vec{X}(t) = e^{At} \vec{C}$, mientras que en las secciones 10.3 y 10.4 encontramos las soluciones en términos de los valores y las funciones propias. Para obtener una conexión entre estas aproximaciones, volvamos a revisar la sección 10.5.

Recordemos que si A es una matriz $n \times n$ diagonalizable, entonces:

$$A = PDP^{-1}$$

Donde D es la matriz diagonal de todos los n valores propios de A , linealmente independientes y P es la matriz que tiene como columnas los n vectores propios como columnas.

También, recordemos que para el problema con valor inicial:

$$\vec{X}' = \mathbf{A} \cdot \vec{X}, \text{ y } \vec{X}(0) = \vec{X}_0$$

El cambio de variable $\vec{X}' = \mathbf{P} \cdot \vec{W}$, nos permite transformar el sistema a un sistema desacoplado:

$$\vec{W}' = \mathbf{D} \cdot \vec{W} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \vec{W}$$

que conduce a la solución:

$$\vec{W}(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \vec{W}_0,$$

De donde se tiene:

$$\vec{X}(t) = \mathbf{P} \cdot \vec{W} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1} \vec{X}_0. \quad (74)$$

Con la matriz exponencial dada en (68) resolvimos este mismo problema con valor inicial para obtener:

$$\vec{X} = e^{\mathbf{A}t} \vec{X}_0$$

Reconocemos la matriz en (74) como $e^{\mathbf{D}t}$, entonces (74) se convierte en:

$$\vec{X}(t) = \mathbf{P} e^{\mathbf{D}t} \mathbf{P}^{-1} \vec{X}_0$$

La comparación de estas dos últimas ecuaciones da otra forma de calcular la matriz exponencial, simplemente en términos de sus valores propios y vectores propios.

Matriz exponencial para funciones propias

Para una matriz diagonalizable A :

$$e^{At} = \mathbf{P}e^{Dt}\mathbf{P}^{-1},$$

Donde \mathbf{D} es la matriz diagonal de todos los valores propios de \mathbf{A} y \mathbf{P} es la matriz que tiene como columnas los vectores propios.

10.17 Ejercicios

Función matriz exponencial. Encuentre la matriz exponencial e^{At} de las matrices dadas en los ejercicios 1 al 6.

$$1. A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$2. A = \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$$

$$3. A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$4. A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$5. A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$6. A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales usando la matriz exponencial

Usando la matriz exponencial, encuentre la solución general del sistema de ecuaciones dados en los ejercicios 7 al 14.

$$7. \begin{cases} x' = x \\ y' = y, \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} x' = y \\ y' = x, \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} x' = x + y \\ y' = x \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} x' = x + z \\ y' = z \\ z' = 0 \end{cases}$$

$$11. \vec{X}' = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$12. \vec{X}' = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$13. \vec{X}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$14. \vec{X}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

15. Productos de matrices exponenciales. Supongamos que:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ y } B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Encuentre e^{At} , y e^{Bt}
 - Encuentre $e^{(A+B)t}$.
 - ¿Es $e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt}$?
-

Propiedades de las matrices exponenciales

Verifique las propiedades de la matriz exponencial en los problemas 16 y 17.

16. Si e^A es la matriz exponencial para una matriz cuadrada constante A , entonces su inversa está dada por $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.

17. Si $AB = BA$, entonces $e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt}$

18. **Ejemplo nilpotente.** Suponga que:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

- Muestre que A es nilpotente; esto es, que existe un entero n tal que $A^n = 0$.
 - Resuelva el sistema lineal $\vec{X}' = A\vec{X}$
-

19. **Un patrón exponencial.** Suponga:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Muestre que $A^{2n} = I$, y $A^{2n+1} = A$.
- Use el resultado de la parte a, para mostrar que:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{bmatrix}$$

- Encuentre la solución general de $\vec{X}' = A\vec{X}$.
-

20. **Criterio de nilpotencia.** Muestre que una matriz es nilpotente sí y solo sí sus valores propios son cero.

- **Matrices fundamentales.** Verifique que $e^{At} = \mathbf{X}(t)\mathbf{X}^{-1}(0)$ y $e^{At} = \mathbf{P}e^{Dt}\mathbf{P}^{-1}$ da el mismo resultado para la matriz exponencial de las matrices en los problemas 21 al 23.
-

21. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

22. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

23. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

Laboratorio de computación. Use un programa de computación como:

- Maple.
- Matemática.
- Matlab.

O cualquier otro, para encontrar la matriz exponencial de las matrices dadas en los problemas 24 y 25.

24. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

25. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

10.18 Sistemas lineales no homogéneos

Figura 67. Edward Lorenz (1917-2008).



Fuente. Enciclopedia Británica (Biblioteca virtual Universidad EAN).

E. N. Lorenz nació el 23 de mayo de 1917 en West Hartford, Connecticut, y murió el 16 de abril del 2008 en Cambridge, Massachusetts. Comenzó su carrera como estudiante graduado de matemáticas en Harvard, pero durante la Segunda Guerra Mundial dirigió su atención a la meteorología, usando una computadora primitiva respecto a los estándares actuales. Lorenz intentó resolver un modelo muy simplificado para la predicción del clima, en el cual simulaba patrones reales del tiempo bastante bien, pero también ilustró algo mucho más importante: cuando Lorenz cambió las condiciones iniciales del modelo ligeramente, los patrones resultantes del clima cambiaron completamente después de un corto tiempo. Lorenz había descubierto que las ecuaciones diferenciales simples pueden comportarse «caóticamente». Fue profesor emérito de meteorología en el Massachusetts Institute of Technology (MIT).

Vamos a ver cómo las técnicas de coeficientes indeterminados y de variación de parámetros, se pueden extender para encontrar solución de sistemas lineales no homogéneos de la forma:

$$\vec{X}' = A\vec{X} + \vec{f}(t)$$

Con término forzado $\vec{f}(t)$.

La mayor parte de este capítulo se ha centrado en la resolución de sistemas de ecuaciones homogéneos lineales, aunque las técnicas de desacoplamiento y la matriz exponencial se extendieron a sistemas no homogéneos. En esta sección, volvemos a las ideas básicas de las ecuaciones lineales no homogéneas en general.

Nosotros sabemos que en general la solución de una ecuación diferencial lineal no homogénea puede ser expresada como la suma de su solución homogénea más una solución particular, es decir:

$$x = x_h + x_p$$

El mismo principio se cumple para un sistema lineal de ecuaciones diferenciales, esto es:

$$\vec{X} = \vec{X}_h + \vec{X}_p$$

Mostraremos cómo los dos métodos dados cuando resolvimos un sistema lineal no homogéneo, el de coeficientes indeterminados y el de variación de parámetros, pueden ser usados para encontrar la solución particular para sistemas no homogéneos.

a. Coeficientes indeterminados

Si A es una matriz constante, el método de coeficientes indeterminados, visto cuando estudiamos las ecuaciones diferenciales lineales pueden ser extendidos para encontrar una solución de un sistema lineal no homogéneo:

$$\vec{X}' = \mathbf{A}\vec{X} + \vec{f}(t) \quad (75)$$

El caso más simple es si la función forzada es constante. Para encontrar una solución particular del sistema no homogéneo:

$$\vec{X}' = \mathbf{A}\vec{X} + \vec{b} \quad (76)$$

Donde \vec{b} es un vector constante, probamos una constante \vec{X}_p que da $\vec{X}'_p = \vec{0}$. Sustituyendo en (76) por \vec{X}_p y $\vec{X}'_p = \vec{0}$ se tiene:

$$\mathbf{A}\vec{X}_p + \vec{b} = \vec{0} \quad \text{o,} \quad \vec{X}_p = -\mathbf{A}^{-1}\vec{b}$$

Luego la solución general para el sistema (76), con función forzada constante toma la forma:

$$\vec{X} = \vec{X}_h + \vec{X}_p = \vec{X}_h - \mathbf{A}^{-1}\vec{b}$$

Ejemplo 47. Función constante forzada:

Encontrar la solución general de la ecuación diferencial lineal no homogénea:

$$\vec{X}' = \mathbf{A}\vec{X} + \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Solución:

En el ejemplo 17 de la sección 10.3 determinamos la solución del correspondiente sistema lineal homogéneo $\vec{X}' = \mathbf{A}\vec{X}$, encontrando que:

$$\vec{X}_h = c_1 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Para encontrar una solución particular, encontramos la matriz inversa de A:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

y calculamos:

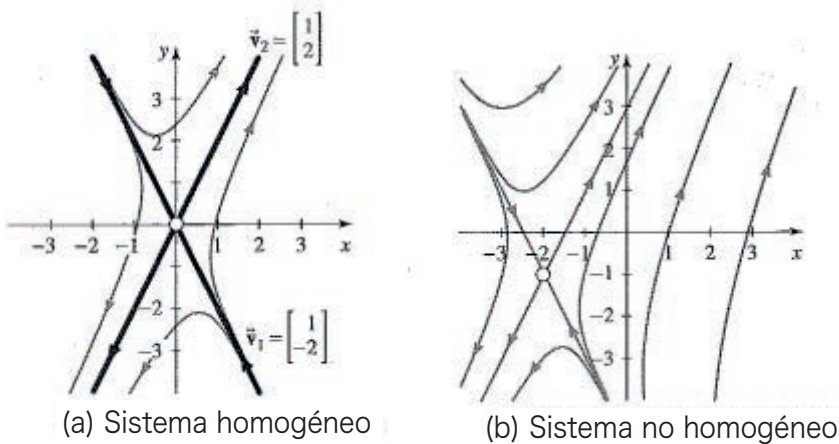
$$\vec{X}_p = -\mathbf{A}^{-1}\vec{b} = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Luego la solución general del sistema dado es:

$$\vec{X}(t) = \underbrace{c_1 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}}_{\vec{X}_h} + \underbrace{\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}}_{\vec{X}_p}$$

La figura 68 muestra el retrato de fase para este ejemplo 46, en él se observa que la gráfica del sistema no homogéneo es una simple translación del sistema homogéneo.

Figura 68. Retrato de fase para un sistema no homogéneo con su correspondiente homogéneo.



Fuente. Farlow, Hall, Mcdill y West. (2007).

Más general, el método de coeficientes indeterminados aplicado para el ejemplo 43, donde la matriz de coeficientes \mathbf{A} es una matriz de coeficientes constantes y el vector forzado $\vec{f}(t)$ está restringido a la misma familia de funciones descrita en el capítulo 7 sección 7:

- Polinomios en t , es decir, expresiones de la forma $P(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0$.
- e^{at} , ke^{at} , k una constante.
- $\cos(k t)$, $\sin(k t)$, tomamos $A \cos(k t) + B \sin(k t)$.
- Sumas y productos finitos de las funciones dadas en los encisos a , b y c .

La idea es escoger una forma particular para la solución particular dependiendo de $\vec{f}(t)$, sustituyéndola en la ecuación diferencial, y determinar los coeficientes que satisfacen la ecuación. Esta solución particular es adicionada a la solución homogénea para dar la solución general.

Ejemplo 48. Coeficientes indeterminados para un sistema no homogéneo:

Resolver el sistema:

$$\vec{X}' = \mathbf{A}\vec{X} + \vec{f}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t - 2 \\ 4t - 1 \end{bmatrix}$$

Solución:

Necesitamos solamente una solución particular \vec{X}_p para resolver el sistema 2×2 no homogéneo. Como los elementos de $\vec{f}(t)$ son polinomios en t , entonces podemos predecir que:

$$\vec{X}_p = \begin{bmatrix} at + b \\ ct + d \end{bmatrix}, \text{ y } \vec{X}_p' = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$$

Podemos sustituir \vec{X}_p en la ecuación dada:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} at + b \\ ct + d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t - 2 \\ 4t - 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} at + b + ct + d \\ 4at + 4b + ct + d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t - 2 \\ 4t - 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} at + b + ct + d + t - 2 \\ 4at + 4b + ct + d + 4t - 1 \end{bmatrix} \\ &= t \begin{bmatrix} a + c + 1 \\ 4a + c + 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b + d - 2 \\ 4b + d - 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Igualando los coeficientes correspondientes conduce a un sistema de cuatro ecuaciones en a , b , c y d :

$$\begin{aligned} a &= b + d - 2 & a + c + 1 &= 0 \\ c &= 4b + d - 1 & 4a + c + 4 &= 0 \end{aligned}$$

Cuya matriz ampliada del sistema es:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 1 & -1 & -1 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & -4 \end{array} \right]$$

Llevándola a una escalonada reducida obtenemos:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

Por lo tanto, $a = -1$, $b = 0$, $c = 0$, y $d = 1$. A partir de estos valores se sigue que:

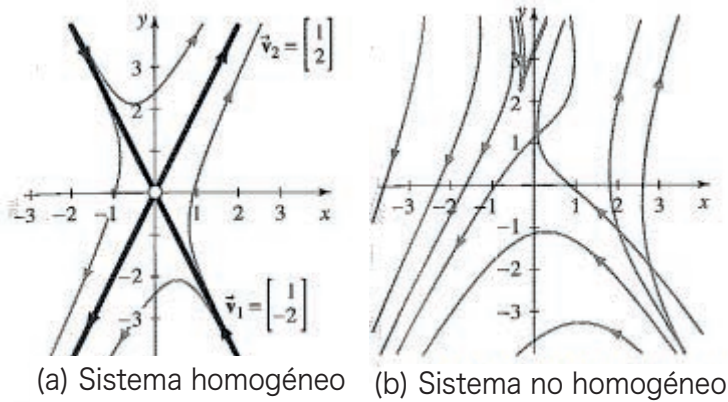
$$\vec{\mathbf{x}}_p = \begin{bmatrix} -t \\ 1 \end{bmatrix}$$

Adicionándole $\vec{\mathbf{x}}_p$ a la solución homogénea $\vec{\mathbf{x}}_h(t)$ encontrada anteriormente, en el ejemplo 17 de la sección 10.3 obtenemos la solución general:

$$\vec{\mathbf{x}}(t) = c_1 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -t \\ 1 \end{bmatrix}$$

La figura 69 muestra cómo el término de forzamiento no constante distorsiona el sistema homogéneo y produce trayectorias que se cruzan, porque el campo vectorial ya no es constante.

Figura 69. Distorsión del sistema homogéneo debido al forzamiento del sistema.



Fuente. Farlow, Hall, Mcdill y West. (2007).

Ejemplo 49. Coeficientes indeterminados para sistemas no homogéneos:

Resolver el sistema:

$$\vec{X}' = \mathbf{A}\vec{X} + \vec{f}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{sen}2t \\ 3\text{cos}2t \end{bmatrix}$$

Solución:

Necesitamos solamente una solución particular \vec{X}_p para resolver el sistema 2×2 no homogéneo. Como los elementos de $\vec{f}(t)$ son polinomios en t , entonces podemos predecir que:

$$\vec{X}_p = \begin{bmatrix} A \cos(2t) + B \text{sen}(2t) \\ C \cos(2t) + D \text{sen}(2t) \end{bmatrix}, \text{ y } \vec{X}_p' = \begin{bmatrix} -2B \cos(2t) - 2A \text{sen}(2t) \\ 2D \cos(2t) - 2C \text{sen}(2t) \end{bmatrix}$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial dada y agrupando términos tenemos:

$$\cos t \begin{bmatrix} 2B \\ 2D \end{bmatrix} + \text{sen} t \begin{bmatrix} -2A \\ -2C \end{bmatrix} = \cos t \begin{bmatrix} -2A + C \\ A - 2C + 3 \end{bmatrix} + \text{sen} t \begin{bmatrix} -2B + D + 1 \\ B - D \end{bmatrix}$$

Y obtenemos un sistema de cuatro ecuaciones algebraicas en las incógnitas A, B, C y D:

$$\begin{aligned} 2B &= -2A + C & -2A &= -2B + D + 1 \\ 2D &= A - 2C + 3 & -2C &= B - 2D. \end{aligned}$$

Cuya matriz ampliada del sistema es:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & -2 & -3 \\ 2 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \end{array} \right]$$

Llevándola a una escalonada reducida obtenemos:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -21/65 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 38/65 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 34/65 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 53/65 \end{array} \right]$$

De donde la solución particular es:

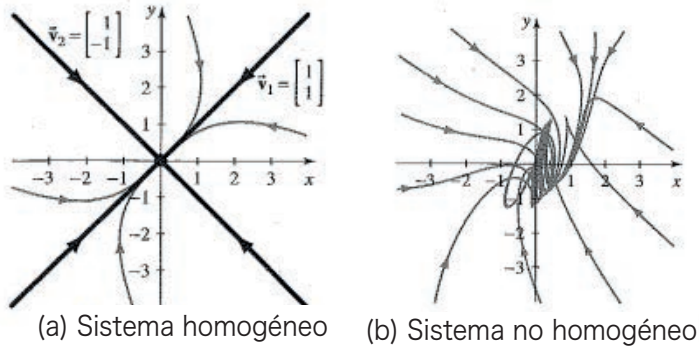
$$\vec{X}_p = \frac{1}{65} \begin{bmatrix} -21\cos 2t + 38\text{sen}(2t) \\ 34\cos(2t) + 53\text{sen}(2t) \end{bmatrix}$$

Nosotros ya calculamos $\vec{X}_h(t)$ en el ejemplo 19 de la sección 10.3, luego podemos escribir la solución general del sistema como:

$$\begin{aligned} \vec{X}(t) &= 2e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + e^{-3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &\quad + \frac{1}{65} \begin{bmatrix} -21\cos 2t + 38\text{sen}(2t) \\ 34\cos(2t) + 53\text{sen}(2t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La figura 70, muestra la distorsión complicada producida por la función forzada sinusoidal.

Figura 70. Distorsionamiento complicado debido a una función forzada sinusoidal.



Fuente. Farlow, Hall, Mcdill y West. (2007).

b. Variación de parámetros

El método de variación de parámetros descrito en la solución de ecuaciones diferenciales lineales, no homogéneas, puede ser adaptado de manera general para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales lineales no homogéneo:

$$\vec{X}' = \mathbf{A}\vec{X} + \vec{f}(t) \quad (77)$$

Donde los elementos de la matriz $\mathbf{A}(t)$ pueden ser funciones de t .

Si \mathbf{A} es una matriz $n \times n$ con n vectores propios linealmente independientes, entonces sabemos es álgebra lineal que la matriz fundamental para el sistema homogéneo asociado:

$$\vec{X}' = \mathbf{A}\vec{X} \quad (78)$$

Es una matriz $\vec{X}(t)$ cuyas columnas son soluciones linealmente independientes de (78). Sabemos también que:

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t) \quad (79)$$

Y la solución general de (78) está dada por:

$$\vec{X}_h = \mathbf{X}(t) \vec{C} \quad (80)$$

Donde \vec{C} es un vector constante arbitrario. La idea es reemplazar \vec{C} en (79) por una función vectorial $\vec{v}(t)$ y luego determinar \vec{v} tal que:

$$\vec{X}_p = \mathbf{X}(t) \vec{v}(t) \quad (81)$$

Sea una solución de (77). Eso significa que:

$$(X \vec{v})' = AX \vec{v} + \vec{f}$$

$$X' \vec{v} + X \vec{v}' = AX \vec{v} + \vec{f}$$

$$AX \vec{v} + X \vec{v}' = AX \vec{v} + \vec{f} \quad (\text{Usando 79})$$

$$X \vec{v}' = \vec{f}$$

$$\vec{v}' = X^{-1} \vec{f}$$

Luego:

$$\vec{v} = \int X^{-1}(t) \vec{f}(t) dt + \vec{K}$$

y para una solución particular podemos escoger $\vec{K} = \vec{0}$.
Sustituyendo (81), tenemos:

$$\vec{X}_p = X(t) \vec{v} = X(t) \int X^{-1}(t) \vec{f}(t) dt \quad (82)$$

Por lo tanto, la solución general de (77) es:

$$\vec{X}(t) = \underbrace{X(t) \vec{C}}_{\vec{X}_h} + \underbrace{X(t) \int X^{-1}(t) \vec{f}(t) dt}_{\vec{X}_p}$$

y podemos determinar que $\vec{C} = X^{-1}(0) \vec{X}_0$ para la condición inicial $\vec{X}(0) = \vec{X}_0$. Estos hechos nos llevan al siguiente teorema.

Solución general de $\vec{X}' = \mathbf{A}\vec{X} + \vec{f}(t)$

Si $\mathbf{A}(t)$ es una matriz cuyos elementos son funciones continuas sobre el intervalo en consideración, y si $\vec{f}(t)$ es un $n \times 1$ vector con elementos continuos. Si $\mathbf{X}(t)$ es una matriz fundamental para $\mathbf{X}' = \mathbf{A}(t)\vec{X}$, entonces la solución general del sistema lineal no homogéneo:

$$\vec{X}' = \mathbf{A}\vec{X} + \vec{f}(t), \vec{X}(0) = \vec{X}_0$$

es:

$$\vec{X}(t) = \underbrace{\mathbf{X}(t)\mathbf{X}^{-1}(0)}_{\vec{X}_h} \vec{X}_0 + \underbrace{\mathbf{X}(t) \int_0^t \mathbf{X}^{-1}(s)\vec{f}(s)ds}_{\vec{X}_p} \quad (83)$$

Ejemplo 50. Variación de parámetros:

Use el método de variación de parámetros para encontrar una solución particular para el sistema:

$$\vec{X}' = \mathbf{A}\vec{X} + \vec{f}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t - 2 \\ 4t - 1 \end{bmatrix}$$

Solución:

Sabemos que:

$$\vec{X}_h = c_1 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Luego una matriz fundamental y su inversa está dada por:

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ 2e^{3t} & -2e^{-t} \end{bmatrix} \text{ y } \mathbf{X}^{-1}(t) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2e^{-3t} & e^{-3t} \\ 2e^t & -e^t \end{bmatrix}$$

Luego:

$$\vec{v}' = \mathbf{X}^{-1}(t)\vec{f}(t) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2e^{-3t} & e^{-3t} \\ 2e^t & -e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t - 2 \\ 4t - 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} e^{-3t}(6t - 5) \\ -e^t(2t + 3) \end{bmatrix}$$

Integrando por partes cada una de las componentes del vector, se tiene:

$$\vec{v} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} e^{-3t}(1-2t) \\ -e^t(2t+1) \end{bmatrix}$$

Entonces por (83), una solución particular de nuestra ecuación está dada por:

$$\vec{X}_p = X(t) \vec{v}(t) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ 2e^{3t} & -2e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-3t}(1-2t) \\ -e^t(2t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t \\ 1 \end{bmatrix}$$

que es exactamente el mismo resultado que obtuvimos en el ejemplo 47, por el método de coeficientes indeterminados.

Ejemplo 51. Variación de parámetros:

Use el método de variación de parámetros para resolver el PVI con la misma matriz A del ejemplo 49, pero con función forzada diferente, es decir, resolver:

$$\vec{X}' = A\vec{X} + \vec{f}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + e^t \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{X}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Solución:

Por el ejemplo 49, tenemos que la matriz fundamental es:

$$X(t) = \begin{bmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ 2e^{3t} & -2e^{-t} \end{bmatrix} \text{ con } X^{-1}(t) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2e^{-3t} & e^{-3t} \\ 2e^t & -e^t \end{bmatrix}$$

Usando la fórmula (83) para encontrar una solución particular, se tiene:

$$\begin{aligned} \vec{X}_p &= X(t) \int_0^t X^{-1}(s) \vec{f}(s) ds \\ &= \begin{bmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ 2e^{3t} & -2e^{-t} \end{bmatrix} \int_0^t \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2e^{-3s} & e^{-3s} \\ 2e^s & -e^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2e^s \\ 0 \end{bmatrix} ds \\ &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ 2e^{3t} & -2e^{-t} \end{bmatrix} \int_0^t \begin{bmatrix} 4 \\ 4e^{4s} \end{bmatrix} ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ 2e^{3t} & -e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4t \\ e^{4t} - 1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -e^{-t} + (4t + 1)e^{3t} \\ 2e^{-t} + (8t - 2)e^{3t} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Luego la solución general de nuestra ecuación está dada por:

$$\begin{aligned}
\vec{X}(t) &= \underbrace{\mathbf{X}(t)\mathbf{X}^{-1}(0)}_{\vec{X}_h} \vec{X}_0 + \underbrace{\mathbf{X}(t) \int_0^t \mathbf{X}^{-1}(s)\vec{f}(s)ds}_{\vec{X}_p} \\
&= \begin{bmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ 2e^{3t} & -2e^{-t} \end{bmatrix} \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2e^{-3t} & e^{-3t} \\ 2e^t & -e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -e^{-t} + (4t + 1)e^{3t} \\ 2e^{-t} + (8t - 2)e^{3t} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -e^{-t} + (4t + 3)e^{3t} \\ -2e^{-t} + (8t + 2)e^{3t} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

10.19 Ejercicios

1. **Superposición para sistemas.** Dado que:

$$L(\vec{X}) = (\vec{X}) - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{X}$$

y:

$$\vec{X}_1 = \begin{bmatrix} e^t \\ e^t \end{bmatrix} \text{ es una solución para } L(\vec{X}_1) = \begin{bmatrix} -2e^t \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{f}_1$$

y:

$$\vec{X}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ es una solución para } L(\vec{X}_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \vec{f}_2$$

Encuentre una solución particular para:

$$L(\vec{X}) = \begin{bmatrix} e^t + 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

2. **Superposición para sistemas.**

Dado que $L(\vec{X}) = \vec{f}$ es un sistema lineal de ecuaciones 2×2 , y que:

$$\vec{X}_1 = \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} \text{ es solución para } L(\vec{X}) = \begin{bmatrix} 1+t \\ -1-3t \end{bmatrix} = \vec{f}_1$$

$$\text{Y } \vec{X}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ es solución para } L(\vec{X}) = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix} = \vec{f}_2$$

Encuentre una solución particular para:

$$L(\vec{X}) = \begin{bmatrix} 2t + 5 \\ -6t - 17 \end{bmatrix}$$

3. **Ilustración no homogénea**

Ilustre el principio de superposición para el sistema lineal no homogéneo:

$$\vec{X}' = A\vec{X} + \vec{f}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t - 2 + e^t \\ 4t - 1 - 4e^t \end{bmatrix}$$

Y su solución particular:

$$\vec{X}_p = \begin{bmatrix} e^t - t \\ 1 - e^t \end{bmatrix}$$

Para encontrar la solución general.

Use el método de coeficientes indeterminados para resolver los sistemas lineales no homogéneos en cada uno de los problemas del 4 al 7.

4. $\vec{X}' = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \vec{X} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$

5. $\vec{X}' = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \vec{X} + \begin{bmatrix} 0 \\ 9t \end{bmatrix}$

6. $\vec{X}' = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \vec{X} + \begin{bmatrix} 0 \\ e^t \end{bmatrix}$

7. $\vec{X}' = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \vec{X} + \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \operatorname{sen} t \end{bmatrix}$

Variación de parámetros. Para los problemas 8 al 15, use el método de variación de parámetros para obtener una solución para el sistema no homogéneo y luego encuentre la solución general.

8. $\vec{X}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \vec{X} + \begin{bmatrix} -3 \\ -9 \end{bmatrix}$

9. $\vec{X}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \vec{X} + \begin{bmatrix} e^t \\ -4e^t \end{bmatrix}$

10. $\vec{X}' = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \vec{X} + \begin{bmatrix} 3t \\ 9 \end{bmatrix}$

11. $\vec{X}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \vec{X} + \begin{bmatrix} 2e^{3t} \\ 0 \end{bmatrix}$

12. $\vec{x}' = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ -t \end{bmatrix}$

$$13. \vec{X}' = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \vec{X} + \begin{bmatrix} t^{-1} \\ 2t^{-1} \end{bmatrix}, t > 0$$

$$14. \vec{x}' = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} t^{-3} \\ -t^2 \end{bmatrix}, t > 0$$

$$15. \vec{x}' = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \tan t \end{bmatrix}$$

En los ejercicios 16 al 25, use el método de variación de parámetros para encontrar la solución general para $\vec{X}' = A\vec{X} + \vec{f}(t)$:

$$16. A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \text{ y } \vec{f} = \begin{bmatrix} e^t \\ e^t \end{bmatrix}$$

$$17. A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \text{ y } \vec{f} = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ e^t \end{bmatrix}$$

$$18. A = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \text{ y } \vec{f} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$19. A = \begin{bmatrix} -3 & 10 \\ -3 & 8 \end{bmatrix} \text{ y } \vec{f} = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$20. A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } \vec{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$21. A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ y } \vec{f} = \begin{bmatrix} t \\ e^{3t} \end{bmatrix}$$

$$22. A = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 6 \\ 6 & 3 & -6 \\ -2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \text{ y } \vec{f} = \begin{bmatrix} -\sin t \\ 2\sin t \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$23. A = \begin{bmatrix} 1 & -18 & 8 \\ 0 & 14 & -6 \\ 0 & 35 & -15 \end{bmatrix} \text{ y } \vec{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$24. A = \begin{bmatrix} -6 & -6 & 18 \\ 10 & 13 & -42 \\ 2 & 3 & -10 \end{bmatrix} \text{ y } \vec{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$25. A = \begin{bmatrix} 11 & -7 & -4 \\ -6 & 4 & 2 \\ 42 & -27 & -15 \end{bmatrix} \text{ y } \vec{f} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Use la técnica de los coeficientes indeterminados, para encontrar soluciones particulares para los sistemas 26 al 28.

$$26. A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \text{ y } \vec{f} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$27. A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \text{ y } \vec{f} = \begin{bmatrix} e^t \\ e^t \end{bmatrix}$$

$$28. A = \begin{bmatrix} -6 & 8 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} \text{ y } \vec{f} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

29. Use el método de coeficientes indeterminados y la escogencia natural $\vec{x}_p = \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$, para encontrar una solución particular del sistema $\vec{x}' = \mathbf{A}\vec{x} + \vec{f}(t)$ donde:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \text{ y } \vec{f} = \begin{bmatrix} -2e^t \\ -e^t \end{bmatrix}$$

30. Considere el sistema $\vec{x}' = \mathbf{A}\vec{x} + \vec{f}(t)$ donde:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ y } \vec{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ \text{sen } t \end{bmatrix}$$

Como la primera derivada de la función seno es la función coseno, podríamos arriesgar una conjetura que implica tanto senos como cosenos. Use el método de coeficientes indeterminados y la conjetura $\vec{x}_p = \mathbf{A} \cos t + \mathbf{B} \text{sen } t$, donde $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$, para encontrar una solución particular del sistema.

10.20 Sistemas no lineales de ecuaciones diferenciales⁴

En esta sección analizamos los sistemas no lineales autónomos, donde raramente habrá una solución analítica con fórmulas. El análisis cualitativo, con su enfoque en los equilibrios (de los cuales puede haber más de uno) y la estabilidad es mucho más importante.

Antes de que los gráficos por ordenador estuvieran disponibles a principios de los años ochenta, el acceso a sistemas no lineales no era fácilmente accesible. Pero desde entonces se ha vuelto casi trivial crear retrato de fase de sistemas 2×2 , incluyendo los no lineales, tan fácilmente como para una ecuación diferencial de primer orden en una variable. Con un poco de experiencia, estudiantes de primer año y no matemáticos pueden fácilmente analizar un sistema 2×2 no lineal, en lugar de tener que esperar por cursos de posgrado especializados. En esta sección se pretende dar algo de esa experiencia.

Se recordarán muchos temas familiares en este nuevo escenario no lineal, como son:

- Equilibrio y estabilidad.
- Nuclinares.
- Existencia y unicidad para sistemas autónomos.
- Sistemas lineales que proporcionan las bases para el análisis.
- La vinculación de los gráficos t - x y t - y con las trayectorias del plano de fases.

También hay una nueva característica: **ciclos límite**. Vamos a utilizar el análisis cualitativo para dibujar las imágenes, y a continua-

⁴ Un texto que complementa bien esta sección es el de los autores: Kaplan Daniel and Glass Leon, *Understanding Nonlinear Dynamics* (1995).

ción, centramos en la interpretación de las imágenes en términos de modelos del mundo real. Consideremos el sistema no lineal autónomo de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y) \quad (84)$$

$$\frac{dy}{dt} = g(x, y) \quad (85)$$

En la introducción de este capítulo se han dado ejemplos de este tipo de sistemas.

10.20.1 Equilibrio y estabilidad

Si $x(t)$ y $y(t)$ son equilibrios o soluciones constantes de (84) y (85), entonces $\dot{x}(t) = 0$ y $\dot{y}(t) = 0$ para constantes r y s . Sustituyendo estos valores en (84) y (85), encontramos que las soluciones de equilibrio r y s deben satisfacer:

$$0 = f(r, s) \quad (86)$$

$$0 = g(r, s) \quad (87)$$

Estas ecuaciones no lineales algebraicas pueden ser usadas para determinar el equilibrio para un sistema de ecuaciones diferenciales. Para los sistemas lineales, $x = 0$, $y = 0$ es un equilibrio, por lo que no es mucho problema hallar los equilibrios del sistema.

Ejemplo 52:

Encontrar todos los equilibrios del sistema no lineal:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -x + xy \\ \frac{dy}{dt} &= -4y + 8xy \end{aligned} \quad (88)$$

Solución:

Sea $x(t) = r$ y $x(t) = s$, donde r y s son constantes. Entonces de (88) tenemos:

$$0 = -r + rs = r(-1 + s)$$

$$0 = -4s + 8rs = 4s(-1 + 2r)$$

De la primera ecuación se tiene que: $r = 0$, y $s = 1$. Entonces:

$$\text{Si } r = 0, \text{ implica que } s = 0$$

$$\text{Si } s = 1. \text{ Implica } -1 + 2r = 0, \text{ es decir que } r = \frac{1}{2}$$

Luego hay dos puntos de equilibrio para el sistema:

$$X = 0, y = 0 \text{ y } x = \frac{1}{2}, y = 1$$

Observemos que este es un sistema que tiene dos puntos de equilibrio. En el ejemplo 1, mostramos entonces un sistema no lineal autónomo de la forma:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{dx}{dt} = f(x, y) \\ y' &= \frac{dy}{dt} = g(x, y) \end{aligned} \quad (89)$$

que consiste en dos ecuaciones diferenciales en dos variables dependientes, con las funciones f y g que ya no se limitan a ser lineales. En la notación vectorial podemos escribir de la siguiente forma:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ y } \vec{x}' = \frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{bmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{bmatrix} \quad (90)$$

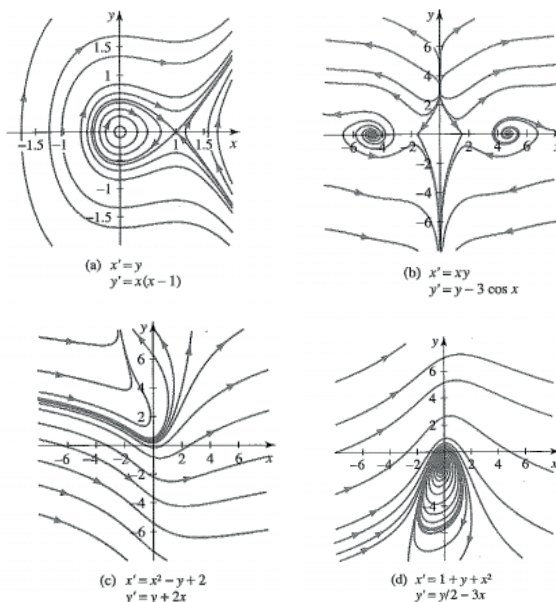
Esta ecuación (90) no involucra matrices cuando el sistema no es lineal.

Cuando los componentes $x(t)$ y $y(t)$ de una solución de (89) se trazan paramétricamente en el plano $x - y$, **las curvas solución** o **trayectorias**, representan su interacción. Veremos una mayor variedad de retratos de fase que los de sistemas lineales.

Comparar el retrato de fase no lineal en la figura 63 con el retrato de fase lineal en sección 10.5, figura 35. ¿Qué aspectos nuevos observa usted?

- Los sistemas no lineales pueden tener más de un punto de equilibrio o ninguno.
- El retrato de fase para sistemas no lineales incluye algunos patrones locales que se parecen sospechosamente a los patrones que estudió para sistemas lineales en el apartado 10.5.
- La forma en que los retratos de fase localmente son lineales encajan decididamente en los no lineales.
- El retrato de fase en la figura 63(d) muestra un nuevo hecho, que es el ciclo límite, que es un lazo oscuro, atrayendo trayectorias espirales de ambos lados y de afuera.

Figura 71. Gráfico de un ciclo límite en el retrato de fase.



Fuente. Farlow, Hall, Mcdill y West. (2007).

Cada uno de los hechos anteriores se debe examinar en algún detalle.

10.20.2 Análisis cualitativo

¿Cómo se mueven las trayectorias del sistema autónomo general 2×2 (89) sobre el plano de fase? ¿Hay principios que prescriben lo que pueden y lo que no pueden hacer? Dos reglas de este tipo se refieren a la singularidad y la continuidad: trataremos principalmente con sistemas 2×2 que satisfagan criterios de unicidad. Algunos sistemas que no lo hacen, junto con un teorema, se discuten en los problemas 39-40 y en la sección 10.11.

Propiedades de las trayectorias en el plano de fase para un sistema 2×2 no lineal

1. Cuando se satisface la unicidad, las trayectorias en el plano de fase no se pueden cruzar.
2. Cuando las funciones f y g en (89) son continuas, las trayectorias también son continuas (no se rompen) y son suaves (no tienen esquinas ni cúspides).

Si se experimenta con dibujos de curvas que satisfacen estas reglas, encontrará que, a menos que sean curvas cerradas, siempre vienen de algún lugar y siempre se dirigen a algún lugar también. Lo que es más, «en alguna parte» puede ser punto, curva cerrada o «infinito». Las curvas en tres o más dimensiones pueden comportarse de forma más salvaje, pero nos atenemos a los retratos de fase para dos dimensiones en esta sección.

Recordemos que la pregunta crítica acerca de una solución de equilibrio es si esta es estable: ¿Las soluciones cercanas permanecen cerca o se alejan? Las definiciones de **equilibrios estables**, **asintóticamente estables**, **neutralmente estables** e **inestables** deben ser revisadas en este punto (ver sección 10.5). Usted debe ser capaz de identificar la estabilidad de los equilibrios en la figura 71.

10.20.3 Volviendo al equilibrio

Para sistemas no lineales, es común que los portadores de fase contengan puntos de equilibrio donde el sistema está en reposo. A diferencia de los sistemas lineales estudiados en la sección 10.5, los sistemas no lineales pueden tener más de una solución de equilibrio (que puede ocurrir en otros puntos distintos al origen), o ninguno en absoluto. Los puntos de equilibrio se pueden encontrar determinando donde $x' = 0$ y $y' = 0$. Es decir, para el sistema (89), al resolver simultáneamente las ecuaciones algebraicas:

$$\begin{aligned}x' &= \frac{dx}{dt} = f(x, y) = 0 \\y' &= \frac{dy}{dt} = g(x, y) = 0\end{aligned}$$

ya sea exactamente o por aproximación numérica. Pruebe esto con los retratos de fase de los sistemas en la figura 50.

Otro método para localizar equilibrios es usando las nuclinares, vistas en el capítulo 2 y 3, y ahora para ser revisado, gráficamente, el equilibrio ocurre en la intersección de las nuclinares de pendiente horizontal con las nuclinares de pendiente vertical.

Nuclinares

Vimos en la sección 2 y 3 cómo las nuclinares, curvas donde $x = 0$, o $y = 0$, son una valiosa herramienta en el análisis cualitativo de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales. Ahora veremos cómo las nuclinares se pueden utilizar para ayudar a analizar soluciones de sistemas no lineales. La diferencia aquí es que los nuclinares no son líneas rectas necesariamente, como lo fueron para sistemas lineales,

pueden ser curvas en el plano de fase. El siguiente ejemplo ilustra cómo se pueden utilizar las nuclinares para analizar un sistema no lineal difícil.

Ejemplo 53. La no linealidad retuerce el retrato de fase⁵:

Analizar el sistema no lineal:

$$\begin{aligned}x' &= x + e^{-y} \\ y' &= -y\end{aligned}$$

Solución:

Aunque el sistema no lineal no tiene una solución de forma cerrada, el sistema puede analizarse utilizando herramientas cualitativas. Encontramos las nuclinares resolviendo:

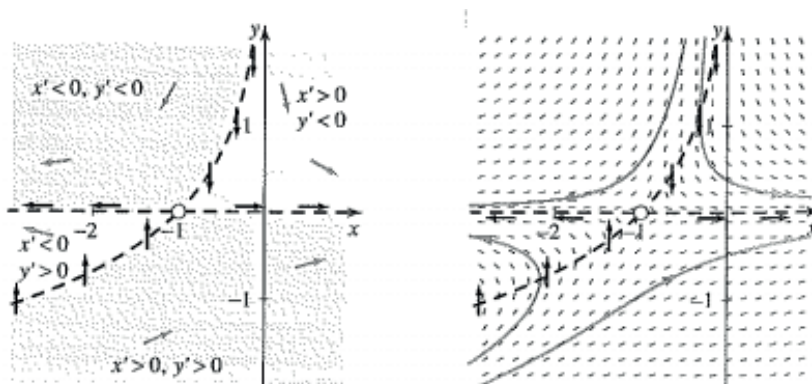
$$\begin{aligned}x' = x + e^{-y} &= 0, \quad (v\text{-nuclinar}) \\ y' = -y &= 0 \quad (h\text{-nuclinar})\end{aligned}$$

Donde la v - nuclinar $x + e^{-y} = 0$ y la h - nuclinar $y = 0$ se intersecan en el punto $(-1, 0)$, y tenemos un punto de equilibrio en este punto (figura 72).

- Las trayectorias serán horizontales en el eje x (y - nuclinar), con movimiento hacia la derecha para, $x' = x + 1 > 0$ y para la izquierda cuando $x' = x + 1 < 0$.
- En la curva v - nuclinar, $x + e^{-y} = 0$, el movimiento está hacia abajo cuando $y > 0$ y, hacia arriba cuando $y < 0$, porque $y' = -y$.

⁵ Este ejemplo es adaptado de Steven H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos*. Reading NMA: Addison - Wilesley (1994).

Figura 72. Punto de equilibrio intersección de dos nuclinares horizontal y vertical.



Fuente. Farlow, Hall, Mcdill y West. (2007).

Las nuclinares dividen el plano x - y en cuatro «cuadrantes» distintos, donde x , y , y t tienen diferentes signos. La figura 64 de la izquierda muestra las direcciones generales de las trayectorias en cada cuadrante. Con el sentido de la flecha puede obtener un buen sentido de la forma en que fluyen las soluciones, especialmente si se amplía el equilibrio. Podemos llevar a cabo este análisis más lejos dibujando un campo de dirección del sistema superpuesto con varias soluciones (ver figura 64 la de la derecha). Podemos concluir a partir de la figura 72, que el punto equilibrio $(-1, 0)$ es inestable y se parece a una deformación en silla.

Ejemplo 54. Extraterrestre:

Analizar el sistema:

$$\begin{aligned}x' &= xy \\y' &= 9 - x^2 - y^2\end{aligned}$$

Solución:

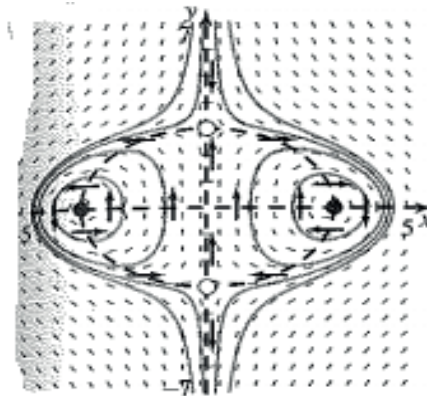
El sistema no lineal tiene cuatro puntos de equilibrio, que se obtienen haciendo:

$$\begin{aligned}x' = xy &= 0 \\y' = 9 - x^2 - y^2 &= 0\end{aligned}$$

Dichos puntos son $(\pm 3, 0)$ y $(0, \pm 3)$, los cuales se encuentran resolviendo las dos ecuaciones simultáneas $x' = 0$ y $y' = 0$. Las v – nuclinares (resolviendo $x' = 0$) son los ejes x y y , y la h – nuclinares (resolviendo $y' = 0$) es el círculo $x^2 + y^2 = 9$. Dibujamos estas curvas, superponiendo las nuclinares con flechas horizontales y verticales, en la figura 67, de manera que se tiene lo siguiente:

- Las flechas verticales apuntan hacia arriba dentro del círculo $x^2 + y^2 = 9$, donde $y = 9 - x^2 - y^2 > 0$, y hacia abajo fuera del círculo.
- Las flechas horizontales apuntan a la derecha en el tercer cuadrante, porque $x' = x y > 0$ allí, y a la izquierda en el segundo y cuarto cuadrantes, porque $x' = x y < 0$ allí.

Figura 73. Gráfica de las intersecciones de las h - nuclinares y las v - nuclinares



Fuente. Farlow, Hall, Mcdill y West. (2007).

Si hacemos zoom sobre los equilibrios, las flechas sobre y entre las nuclinares, nos permiten deducir que $(0, \pm 3)$ son equilibrios inestables, y que las soluciones fluyen alrededor del otro equilibrio $(\pm 3, 0)$. La adición de unas pocas trayectorias alrededor $(\pm 3, 0)$ muestra que los equilibrios en el eje x son neutralmente estables,

porque las trayectorias cercanas no son atraídas ni repelidas. Localmente, los puntos $(\pm 3, 0)$ se parecen a puntos centrales con soluciones periódicas que giran alrededor de ellos.

Ciclos límites

Un nuevo hecho no encontrado en el estudio de los sistemas lineales es el de *ciclo límite*.

Ciclo límite

Es una curva cerrada (representando una solución periódica) para la cual otras soluciones tienden por enrollamiento alrededor más y más estrechamente desde el interior o el exterior (en tiempo hacia delante o hacia atrás).

En la sección 10.5, vimos orbitas cerradas solo en familias alrededor de un centro. Por contraste, un ciclo límite es aislado: aquí hay una tira que lo rodea que no contiene otra órbita cerrada, como el ciclo oscuro de la figura 50(d) (obsérvese que las órbitas cerradas en 50(a) no están aisladas).

Los ciclos límite no son fácil de encontrar como equilibrio (los cuales se pueden localizar algebraicamente)⁶, pero ellos aparecerán en retratos de la fase realizados por computadora como sistemas 2X2 no lineales, así que es importante aprender a entender lo que ellos representan.

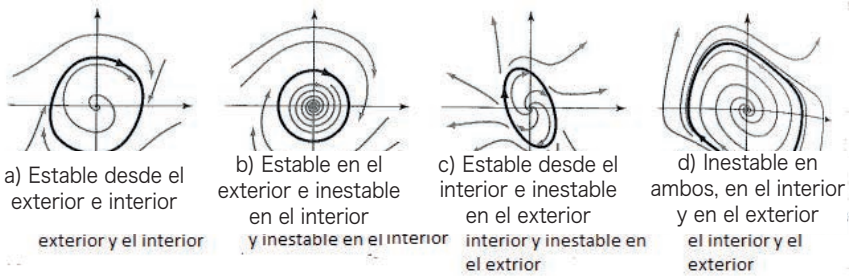
En la figura 74 vemos diferentes formas en que las soluciones cercanas pueden relacionarse con un ciclo límite. El comportamiento

⁶ Ver el teorema de Poincaré – Bendixon en J. H. Hubbard and B. H. West, *Differential Equations: A Dynamical Systems Approach, Part 2: Higher – Dimensional Systems*. Editorial Springer – Verlag (1995).

estable se produce cuando el envoltorio de solución está más cerca del ciclo límite cuando $t \rightarrow \infty$. En un sistema físico un ciclo límite estable es con frecuencia un comportamiento deseado, representando el movimiento en curso que no viene a descansar en un equilibrio ni vuela al infinito.

Por otro lado, se produce un ciclo límite inestable cuando la solución hacia atrás ($t \rightarrow -\infty$) tiende al ciclo límite, y la solución hacia adelante se aleja de un punto de equilibrio u otro ciclo límite dentro o hacia otro destino fuera (punto de equilibrio, ciclo límite, o «infinito»).

Figura 74. Comportamiento de las soluciones cerca al ciclo límite.



Fuente. Farlow, Hall, Mcdill y West. (2007).

Ejemplo 55. Ecuación de Van Der Pol⁷:

Hacer un análisis de la ecuación diferencial de segundo orden:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \epsilon(1 - x^2)\frac{dx}{dt} + x = 0$$

Llevándola a un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales.

⁷ Balthazar Van der Pol (1889-1959), fue un físico e ingeniero holandés, quien en los años 20 desarrolló modelos matemáticos para el voltaje interno y la corriente en los radios.

Solución:

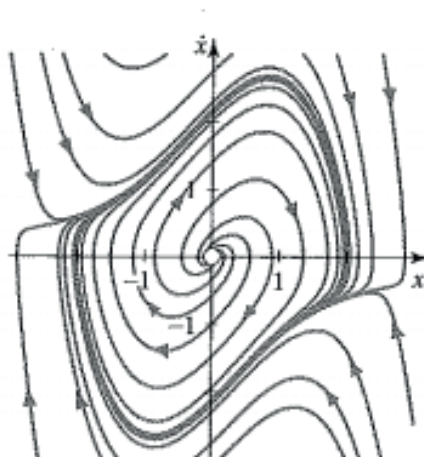
Esta ecuación es llamada la ecuación de Van Der Pol y se puede convertir en un sistema de ecuaciones de primer orden haciendo el cambio de variable:

$$\dot{x} = y$$

$$\dot{y} = \epsilon(1 - x^2)y - x$$

Para ciertos valores de ϵ , el retrato de fase genera un ciclo límite que atrae todas las trayectorias cuando $t \rightarrow \infty$. Ver la siguiente figura.

Figura 75. Gráfica de la ecuación de Van der Pol.



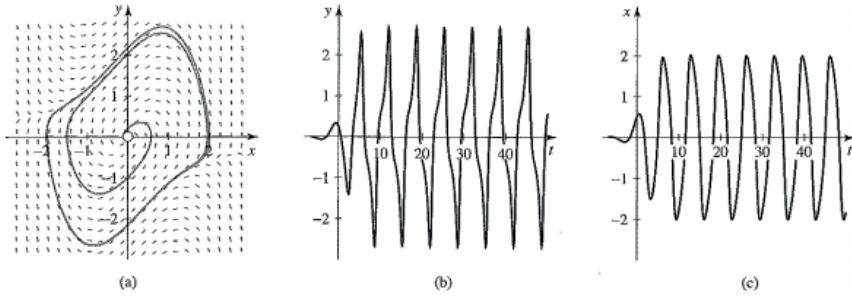
Fuente. Farlow, Hall, Mcdill y West. (2007).

Solución de componentes gráficos

Podemos trazar por separado en el plano t - x o t - y , el comportamiento individual de cada componente en función del tiempo: estas gráficas se denominan series temporales. Con frecuencia utilizaremos la computadora para crear retratos de fase, lo que se puede hacer numéricamente con una precisión notable, como estudiaremos en la sección 10.10. La tarea importante es ver

cómo estos gráficos están vinculados. La figura 76 muestra la serie de tiempo para una única trayectoria en el plano fase.

Figura 76. Series de tiempo para una trayectoria.



Fuente. Farlow, Hall, Mcdill y West. (2007).

Soluciones integrales

Como hemos observado anteriormente, la solución cuantitativa se puede obtener y trazar para sistemas lineales del tipo estudiado en la sección 10.5, pero esto es menos frecuente en el caso de problemas no lineales. Una excepción es la situación en la que la identidad de cálculo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{g(x,y)}{f(x,y)} \quad (91)$$

por las ecuaciones (9) y (90), que transforma la ecuación (91) en una ecuación de primer orden en x, y y, que se puede resolver, explícita o implícitamente, para dar una familia de curvas solución en el plano x – y (por supuesto, este mecanismo puede funcionar tanto para sistemas lineales como no lineales).

Ejemplo 56. Parábolas semi-cúbicas:

Para el sistema lineal:

$$x' = y^2$$

$$y' = -x$$

Utilice la identidad (91) para transformarla en una ecuación de primer orden.

Solución:

Para el sistema no lineal:

$$x' = y^2$$

$$y' = -x$$

Utilizando la identidad (91) se tiene:

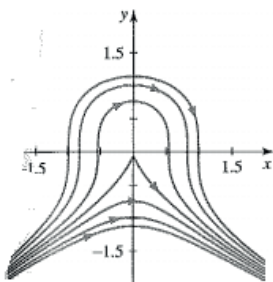
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{y'}{x'} = -\frac{x}{y^2}$$

Esta ecuación se puede resolver mediante variables separables, y encontramos la familia de soluciones implícitas:

$$3x^2 + 2y^3 = C$$

Algunas de sus gráficas se muestran en la figura 77:

Figura 77. Algunas soluciones de la parábola semi-cúbica.



Fuente. Elaborada por el autor con el programa Derive.

Ejemplo 57. Alrededor del círculo:

Para el sistema lineal:

$$x' = y$$

$$y' = -x$$

Utilice la identidad (91) para transformarla en una ecuación de primer orden.

Solución:

Para el sistema no lineal:

$$x' = y$$

$$y' = -x$$

Utilizando la identidad (91) se tiene:

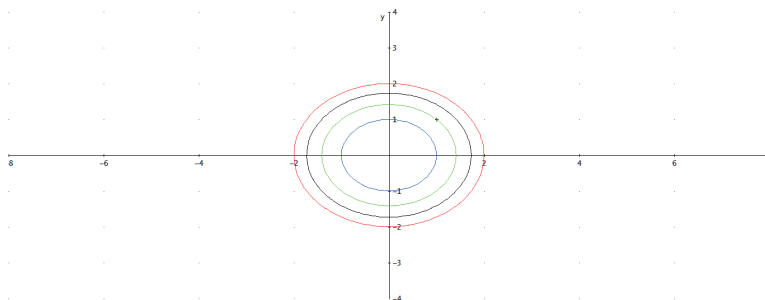
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{y'}{x'} = -\frac{x}{y}$$

Esta ecuación se puede resolver mediante variables separables, y encontramos la familia de soluciones implícitas:

$$x^2 + y^2 = C$$

Algunas de sus gráficas se muestran en la figura 78, que es una familia de círculos.

Figura 78. Algunas soluciones para el sistema dado.



Fuente. Elaborada por el autor con el programa Derive.

10.21 Ejercicios

Para cada uno de los problemas 1 al 5 determine las variables dependientes, dado que t es la variable independiente, y los parámetros; determine cuáles de los sistemas son autónomos y no autónomos.

- lineal y no lineal, y si es lineal, cuáles son homogéneo o no homogéneo.

1.
$$\begin{aligned} u' &= 3u + 4v \\ v' &= -2u + \text{sent} \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} x' &= y + tx \\ y' &= 2x + y + y \text{ sen } t \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} x' &= kx_2 \\ x_2' &= - \text{sen}x_1 \end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned} p' &= q \\ q' &= pq - \text{sent} \end{aligned}$$

5.
$$\begin{aligned} S' &= rSI \\ I' &= rSI - \gamma I \\ R' &= \gamma I \end{aligned}$$

En cada uno de los problemas 6 al 9, muestre que el sistema se satisface por el conjunto de funciones dadas.

$$6. x' = x \quad (x = e^t, y = e^t)$$

$$y' = y.$$

$$7. x' = y \quad (x = \sin t, y = \cos t)$$

$$y' = -x.$$

$$8. x' = y + t \quad (x = -\frac{3}{2}t + \frac{3}{4}, y = -t - \frac{3}{2})$$

$$y' = -2x + 3y + 5$$

$$x' = x$$

$$9. y' = 2z \quad (x=0, y = \sin 2t, z = \cos 2t)$$

$$z' = -2y$$

Para cada uno de los sistemas no lineales del 10 al 13, haga una gráfica de las nuclinares con flechas, sobre y entre ellas, mostrando la dirección de las soluciones y marcándolas como estable o inestable. Interpretar estos bocetos en términos de los retratos de fase de sistemas, mostrados en la figura 10.46(a) y (d) para aclarar los comportamientos de las trayectorias. Luego, para cada gráfico, escriba un párrafo para describir los comportamientos:

$$10. \begin{aligned} x' &= y \\ y' &= x(x-1) \end{aligned}$$

$$11. \begin{aligned} x' &= xy \\ y' &= y-3\cos x \end{aligned}$$

$$12. \begin{aligned} x' &= x^2-y+2 \\ y' &= y+2x \end{aligned}$$

$$13. \begin{aligned} x' &= 1+y+x^2 \\ y' &= \frac{y}{2}-3x \end{aligned}$$

Para cada sistema no lineal en los problemas 14 al 19, determine las soluciones de equilibrio, si hay alguna, y chequee luego las h- nuclinar y la v- nuclinar. Trace luego las flechas apropiadas sobre y entre ellas, para indicar las direcciones de las curvas solución. Adicione algunas soluciones típicas y escriba una descripción de su comportamiento. Identifique todos los ciclos límite.

$$14. \begin{cases} x' = xy \\ y' = y-x^2+1 \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} x' = y-\ln|x| \\ y' = x-\ln|y| \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} x' = y+x(1-x^2-y^2) \\ y' = -x+y(1-x^2-y^2) \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} x' = 1-x^2-y^2 \\ y' = x \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} x' = y-x^2+1 \\ y' = y+x^2-1 \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} x' = |x|-y-1 \\ y' = |x|+y-1 \end{cases}$$

Equilibrio para ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden

Para las ecuaciones diferenciales de segundo orden en los problemas 20 al 25, encuentre y clasifique las soluciones constantes como sigue:

- Reescriba la ecuación de segundo orden como un sistema de ecuaciones de primer orden.
- Trace las nuclinars para el sistema de primer orden, rotúlelas con flechas apropiadas y encuentre el equilibrio.
- Deduzca cuáles de los puntos de equilibrio de los sistemas no lineales son estables, determinando así la estabilidad de las soluciones constantes de la ecuación diferencial de segundo orden.
- Identifique todas las soluciones periódicas e indique si son ciclos límites.

$$20. x'' + (x^2 - 1)x' + x = 0$$

$$21. \theta'' + \left(\frac{g}{L}\right)\theta = 0$$

$$22. x'' - \frac{x}{x-1} = 0$$

$$23. x'' + (x')^2 + x^2 = 0$$

$$24. x'' + |x|x' + x = 0$$

$$25. x'' + ((x')^2 - 1)x' + x = 0$$

Desafío creativo. Crear un retrato de fase interesante eligiendo no lineales que se cruzan en puntos clave y la organización de hacerlos estables (puntos llenos) o inestable (puntos abiertos). Sugerencia: piense en cómo ET fue «diseñado» en el ejemplo 52.

Encontrando ecuaciones de trayectorias. Use la identidad:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{y'}{x'}$$

Para hacer un bosquejo y encontrar las ecuaciones en el plano de fase de los sistemas, en los problemas 27 al 39.

$$27. \begin{aligned} x' &= y \\ y' &= x \end{aligned}$$

$$28. \begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -x \end{aligned}$$

$$29. \begin{aligned} x' &= y(x^2 + 1) \\ y' &= 2xy^2 \end{aligned}$$

$$30. \begin{aligned} x' &= 1 \\ y' &= x + y \end{aligned}$$

Sistemas no lineales de aplicaciones. Para cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones en los problemas del 31 al 33, encuentre los puntos de equilibrio y trace muestra de las trayectorias en el plano de fase. Discutir el comportamiento a largo plazo de las soluciones en términos del equilibrio.

$$x' = 2xy$$

$$y' = y^2 - x^2 - 1 \text{ (campos eléctricos entre dos cargas).}$$

$$y' = y^2 - x^2$$

$$x' = 2xy \quad \text{(sistema dipolar).}$$

$$x' = y$$

$$y' = -x - \text{sign } y \text{ (amortiguación de coulombes).}$$

Donde:

$$\text{Sign } y = \begin{cases} 1 & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \\ -1 & \text{si } y < 0 \end{cases}$$

34. **Solución secuencial.** Determine la solución general (contiene dos constantes arbitrarias) para el sistema:

$$\begin{aligned} x' &= -3x, \\ y' &= -xy^2 \end{aligned}$$

Resolviendo en la primera ecuación y sustituyendo el resultado en la segunda ecuación.

Ciclo límite en polares. Para los sistemas 35 al 38, dados en coordenadas polares, determine el ciclo límite en el plano de fase $x - y$, y discuta su estabilidad, encuentre soluciones cuantitativas cuando sea posible. Ayuda: con coordenadas polares, si algún valor constante k para r hace que $r' = 0$, entonces hay un ciclo de límite circular en $r = k$. Explicación: ¿qué significa $\theta = 1$? Usted debe ser capaz de dibujar trayectorias típicas de plano de fase x - y a mano.

$$35. \begin{aligned} r' &= (1-r)^2 \\ \theta' &= 1 \end{aligned}$$

$$36. \begin{aligned} r' &= r(a-r) \\ \theta' &= 1 \end{aligned}$$

$$37. \begin{aligned} r' &= r(1-r)(2-r) \\ \theta' &= 1 \end{aligned}$$

$$38. \begin{aligned} r' &= r(1-r)(2-r)(3-r)^2 \\ \theta' &= 1 \end{aligned}$$

Test de existencia y unicidad. El teorema de existencia y unicidad de Picard dados en el capítulo 2 y 3 de este texto, se puede extender a un sistema de dimensiones superiores, como sigue. Las ecuaciones lineales vistas anteriormente satisfacen automáticamente el teorema de existencia y unicidad, pero para sistemas no lineales se puede tener problemas.

Teorema de existencia y unicidad

Para un sistema de n dimensiones de ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)\end{aligned}$$

Donde todas las f_i son continuas sobre un t – intervalo I y sobre una región R en \mathcal{R}^n , donde $a_i < x_i < b_i$, con el punto inicial $(t_0, \vec{x}_0) \in I \times R$, existe un número positivo h tal que el problema con valor inicial:

$$\vec{x}' = \vec{f}(t, \vec{x}), \vec{x}_0(t_0) = \vec{x}_0$$

Tiene una solución $\vec{x}(t)$ para t en el intervalo $(t_0 - h, t_0 + h)$.

Si además $\frac{\partial f_i}{\partial x_i}$ es también continua en R para toda i , entonces la solución es única.

Para cada uno de los sistemas 2×2 en los problemas 39 y 40:

- Diga dónde (y por qué) usted esperaría dificultades en cuanto a la existencia o unicidad.

- Esboce un retrato de fase que ilustre lo que sucede (o no) y explique.

$$39. \begin{cases} x' = 1 + x \\ y' = (1 + x)\sqrt{y} \end{cases}$$

$$40. \begin{cases} x' = x/y \\ y' = x - y/x \end{cases}$$

41. **Hamiltoniano para el oscilador armónico.** La mecánica hamiltoniana⁸ está basada sobre la función hamiltoniana $H(p, q)$, que representa el total de la energía en términos de la coordenada generalizada q y el momento generalizado p (la mecánica de Newton se centra en las fuerzas). El sistema hamiltoniano está definido por:

$$q' = \frac{\partial H}{\partial p} \text{ y } p' = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

Para el sistema masa resorte sin amortiguación con masa M , constante del resorte k , y desplazamiento x , tenemos que $q = x$ y $p = mx'$ (el momento).

- Muestre que la energía cinética para la masa es $\frac{p^2}{2m}$.
- Muestre que la energía total es $H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{q^2}{2}$.
- Obtenga el correspondiente sistema hamiltoniano.

Laboratorio de computación. Plano de fase, análisis. Para los sistemas en los problemas 42 al 47, use un apropiado software para llevar a cabo las siguientes investigaciones:

- Trace un campo vectorial.
- Trace una muestra de las curvas solución.
- Determine los puntos de equilibrio.
- Determine el comportamiento de la estabilidad de los puntos de equilibrio.
- Discuta el comportamiento a largo plazo de los sistemas.
- Identifique todas las soluciones periódicas y si son ciclo de límite.

$$42. \begin{aligned} x' &= x(x - y) \\ y' &= y(1 - y) \end{aligned}$$

$$43. \begin{aligned} y' &= -y \\ x' &= x - x^2 \end{aligned}$$

$$44. \begin{aligned} x' &= 1 - |x| \\ y' &= x - y \end{aligned}$$

$$45. \begin{aligned} x' &= x(2 - x - y) \\ y' &= -y \end{aligned}$$

$$46. \begin{aligned} x' &= x + y - x^3 \\ y' &= -x \end{aligned}$$

$$47. \begin{aligned} x' &= \text{sen}(xy) \\ y' &= \text{cos}(x + y) \end{aligned}$$

10.22 Linealización

En esta unidad se estudiará el comportamiento de la solución de un sistema autónomo 2×2 no lineal cerca de un punto de equilibrio, mediante el análisis de un sistema lineal relacionado llamado Linealización. Esta fusión de álgebra lineal y cálculo hace posible clasificar el comportamiento de estabilidad de equilibrios y ciclos límite para muchos sistemas no lineales.

Linealización de funciones

Recordemos que cuando se estudió el cálculo en una variable, vimos cómo aproximar $\sqrt{10}$ usando el método de linealización:

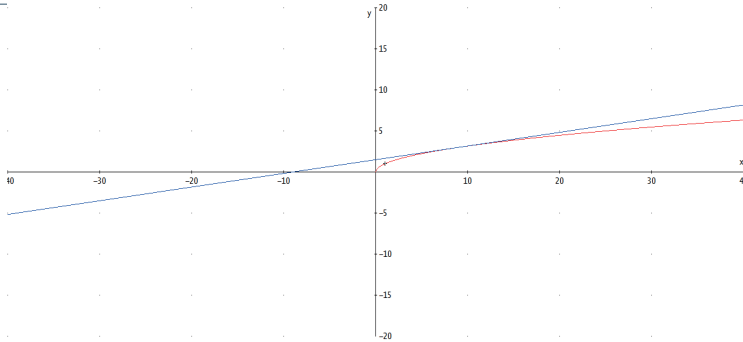
$$L(x) = 3 + \frac{1}{6}(x - 9) \text{ para la función } f(x) = \sqrt{x}$$

El resultado es:

$$\sqrt{10} = f(10) \approx L(10) = 3 + \frac{1}{6}(10 - 9) = 3\frac{1}{6}$$

La Linealización es justamente la línea tangente a la gráfica de la función raíz cuadrada en $x = 9$, calculada a partir de:

$$L(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) \text{ para } x_0 = 9 \quad (1)$$

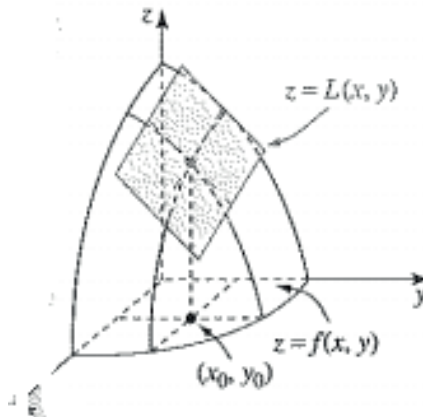
Figura 79. Gráfica de la linealización a una curva.

Fuente. Elaborada por el autor con el programa Derive.

Un cálculo similar se tiene para funciones en dos variables $z = f(x, y)$ en el dominio de f que conduce a:

$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + (x - x_0)f_x(x_0, y_0) + (y - y_0)f_y(x_0, y_0) \quad (2)$$

Donde f_x y f_y son las derivadas parciales continuas de f . En este caso, $L(x, y)$ representan el plano tangente en (x_0, y_0) para la superficie $z = f(x, y)$ (ver la siguiente figura).

Figura 80. (Gráfica del Plano Tangente a una superficie).

Fuente. Farlow, Hall, Mcdill y West. (2007).

Como una consecuencia del teorema de Taylor para una y dos variables, el error en la aproximación al aplicar la ecuación (1) y (2) para la función suave f son del mismo orden de magnitud como $(x_0, y_0)^2$ y $(y - y_0)^2$. En consecuencia, el comportamiento de la Linealización es muy similar al de la función original en un vecindario adecuado del punto en cuestión.

Enfoque informal con ecuaciones diferenciales

Retornemos a los sistemas de ecuaciones diferenciales autónomas:

$$x' = f(x, y), y' = g(x, y)$$

Donde f y g son funciones diferenciables, y estudiaremos el comportamiento de las soluciones cercanas a un punto de equilibrio (x_e, y_e) , donde conocemos que:

$$f(x_e, y_e) = 0, g(x_e, y_e) = 0$$

Cuando (x_e, y_e) no es el origen, podemos trasladar las coordenadas para lograr que (x_e, y_e) sea el nuevo origen, entonces podemos reemplazar f y g con su Linealización en el nuevo origen. El resultado es un nuevo sistema de ecuaciones lineales con un único punto de equilibrio en el origen; este es el tipo de problema que se ha estudiado en detalle al principio de este capítulo. El comportamiento de la estabilidad de los sistemas no lineales puede ser usualmente similar al del sistema linealizado.

En algunos casos las formas algebraicas de las funciones componentes f y g son lo suficientemente simples como para que la Linealización se pueda obtener por solo «inspección». En este caso, inspección significa que, para valores pequeños de las variables, podemos ignorar los términos de grado superior.

Ejemplo 58. Linealización por inspección:

Analizar y linealizar por inspección el siguiente sistema:

$$\begin{aligned}x' &= y \\ y' &= -y + x - x^3\end{aligned}\quad (3)$$

Solución:

El retrato de fase para el sistema se muestra en la figura 81.

Figura 81. Retrato de fase para el sistema (3).



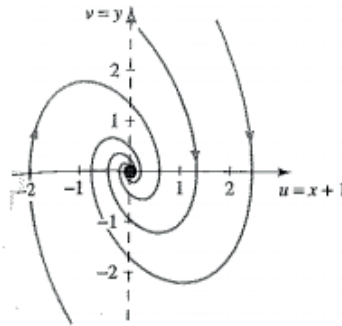
Fuente. Farlow, Hall, McMillan y West. (2007).

Las soluciones de equilibrio se encuentran resolviendo el sistema simultáneo de ecuaciones $y = 0$, $y \cdot -x + y - x^3 = 0$; ellos son $(0, 0)$; $(1, 0)$ y $(-1, 0)$. Podemos analizar su estabilidad cuando linealicemos. Para esto seguimos los siguientes pasos:

Como x^3 es mucho más pequeño que x para valores cercanos a $x = 0$, la Linealización de (3) cercana al punto $(0, 0)$ es:

$$\begin{aligned}x' &= y \\ y' &= x - y\end{aligned}\quad \text{o } \vec{x}' = A\vec{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \vec{x} \quad (4)$$

Figura 82. Linealización para el sistema dado cerca del punto $(1, 0)$.

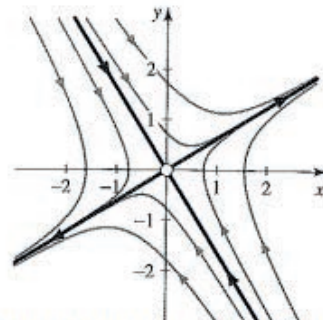


linealización cerca a $(1,0)$

Fuente. Farlow, Hall, Mcdill y West. (2007).

A tiene como valores propios $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$ de signos opuestos, además el origen es un punto de silla inestable. El origen también es una solución inestable para el sistema (3), pero el retrato de fase no lineal (figura 82, cerca del origen) es una distorsión de la figura para la Linealización (figura 82, centro).

Figura 83. Distorsión del sistema cerca del origen.



Linealización cerca de $(0,0)$

Fuente. Farlow, Hall, Mcdill y West. (2007).

Para el estudio del comportamiento del sistema (3) cerca de la solución de equilibrio (1,0). Considere (1,0) como un «origen» usando la transformación $u = x - 1$ y $v = y$; entonces $u' = x'$, $v' = y'$, y $v' = -v + (u + 1) - (u+1)^3$. Por lo tanto, tenemos:

$$u' = v$$

$$v' = -2u - v - 3u^2 - u^3$$

Suprimiendo los términos de orden superior, da el sistema lineal:

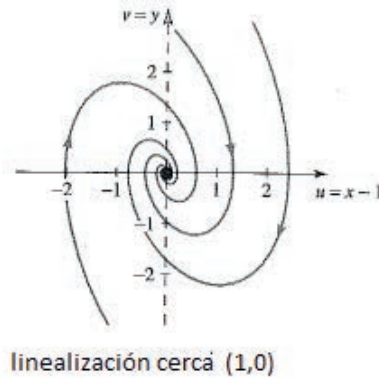
$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad (5)$$

que tiene como valores propios $-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{7}}{2}$. Como la parte real de este par de valores propios complejos conjugados es negativo, el origen trasladado es un punto Atractor espiral asintóticamente estable para el sistema linealizado (56).

Podemos concluir que (1,0) es una solución asintóticamente estable para el sistema no lineal (3) (ver figura 83).

Un análisis similar muestra que el punto de equilibrio (-1,0) es también una solución asintóticamente estable: en efecto, la linealización en (-1,0), resulta ser el mismo sistema que en (1,0), como se muestra en la figura 4 a la izquierda. Usted puede ver que esto se espera de examinar los dos equilibrios exteriores para el sistema no lineal original en la siguiente figura.

Figura 84. Linealización del sistema cerca de (1, 0).



Fuente. Farlow, Hall, Mcdill y West. (2007).

Linealización formal

Cuando se linealiza el sistema autónomo:

$$x' = f(x, y), y' = g(x, y) \quad (6)$$

No es solo una cuestión de abandonar términos de orden superior a partir de una expresión polinomial, explotamos la Linealización (2) basada en el **teorema de Taylor**. Comenzamos por trasladar una solución de equilibrio al origen con la transformación:

$$(u, v) = (x - x_e, y - y_e).$$

Como x_e, y_e son constantes, $u' = x', v' = y'$, y (6) se convierte en:

$$\begin{aligned} u' &= f(u + x_e, v + y_e), \\ v' &= g(u + x_e, v + y_e) \end{aligned} \quad (7)$$

Cuando $u = v = 0$, el lado derecho de la ecuación (7) se convierte en $f(x_e, y_e)$ y $g(x_e, y_e)$, y estos son cero porque (x_e, y_e) es una solución

de equilibrio de (6). La expansión de Taylor de f y g alrededor de (x_e, y_e) son:

$$f(x, y) = f(x_e, y_e) + (x - x_e) f_x(x_e, y_e) + (y - y_e) f_y(x_e, y_e) + R_1(x, y)$$

$$g(x, y) = g(x_e, y_e) + (x - x_e) g_x(x_e, y_e) + (y - y_e) g_y(x_e, y_e) + R_2(x, y)$$

Donde asumimos que los términos de los residuos R_1 y R_2 son de segundo orden pequeños para (x, y) cercanos a (x_e, y_e) en el sentido que:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_e, y_e)} \frac{R_1(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_e, y_e)} \frac{R_2(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 \quad (8)$$

Además, debido a que (x_e, y_e) es una solución de equilibrio de (6), $f(x_e, y_e) = 0$ y $g(x_e, y_e) = 0$. Así que cuando descartamos R_1 y R_2 de las expansiones de la serie de Taylor tenemos:

$$u' = u f_x(x_e, y_e) + v f_y(x_e, y_e),$$

$$v' = u g_x(x_e, y_e) + v g_y(x_e, y_e), \quad (9)$$

En (9) los coeficientes de las variables de la traslación u y v forman una matriz de derivadas parciales, evaluadas en el punto (x_e, y_e) , llamada la matriz jacobiana.

Linealización de un sistema autónomo de ecuaciones diferenciales

Para $x' = f(x, y)$, y $y' = g(x, y)$, f y g diferenciables dos veces, la Linealización del sistema a través del punto de equilibrio (x_e, y_e) , trasladado por $u = x - x_e$ y $v = y - y_e$,

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \mathbf{J}(x_e, y_e), \text{ donde } \mathbf{J}(x_e, y_e) = \begin{bmatrix} f_x(x_e, y_e) & f_y(x_e, y_e) \\ g_x(x_e, y_e) & g_y(x_e, y_e) \end{bmatrix}$$

Es la **matriz jacobiana**. Si \mathbf{J} es no singular, la Linealización del sistema tiene un único punto de equilibrio en $(u, v) = (0, 0)$, y la

técnica dada en la sección 10.5 puede ser usada sobre J para clasificar su comportamiento.

Al final, la matriz jacobiana para la Linealización (9) se calcula directamente a partir de los sistemas originales (6). Y no es necesario hacer una transformación explícita de (86) en términos de u y v . Podemos decir que el sistema (6) **es casi lineal** en (x_e, y_e) .

- Cuando todos los valores propios de la matriz jacobiana son negativos o tienen la parte real negativa, las soluciones de equilibrio del sistema original es asintóticamente estable.
- Si alguno de los valores propios de la matriz jacobiana son positivos o tienen la parte real positiva, la solución de equilibrio es inestable.
- Si la matriz jacobiana tiene valores propios de signos opuestos, el punto de equilibrio no lineal puede tener un equilibrio que se comportará como una silla de montar, aunque las soluciones que se aproximan al punto de equilibrio no lo harán en líneas rectas (como se puede ver en el siguiente ejemplo 59).
- En el caso en el que la Linealización no puede predecir el comportamiento no lineal es cuando la matriz jacobiana tiene valores propios puramente imaginarios. La Linealización tendrá un equilibrio de centro, pero la perturbación generalmente causa una espiral que puede ser estable o inestable.

Observación: la Linealización y el jacobiano solo es concerniente al equilibrio; ellos no permiten encontrar ciclos límites, que son únicamente un fenómeno no lineal.

Ejemplo 59. Análisis:

Analizar los equilibrios del sistema no lineal:

$$\begin{aligned}x' &= y \\ y' &= x(x - 4)\end{aligned}\quad (10)$$

Solución:

Los puntos de equilibrio son $(0, 0)$ y $(4, 0)$, la matriz jacobiana en general es:

$$\mathbf{J}(x_e, y_e) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2x_e & 0 \end{bmatrix}$$

En el punto de equilibrio $(0, 0)$, la matriz jacobiana para el sistema linealizado es:

$$\mathbf{J}(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \text{ con vectores propios } \lambda_1, \lambda_2 = \pm 2i$$

El punto de equilibrio es entonces un centro, el cual es neutralmente estable.

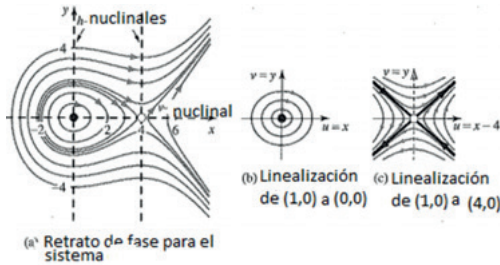
En $(4, 0)$, se tiene:

$$\mathbf{J}(4, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \text{ con vectores propios } \lambda_1, \lambda_2 = \pm 2$$

Este punto de equilibrio es una silla, el cual es inestable.

La figura 85 muestra el retrato de fase para el sistema no lineal 10 y el sistema linealizado en $(0, 0)$ y $(4, 0)$. Como se muestra en los ejemplos 1 y 2, el retrato de fase no lineal incorpora el retrato de las linealizaciones, con distorsiones para mantener la singularidad de las soluciones.

Figura 85. Retrato de fase del sistema dado y Linealización.



Fuente. Farlow, Hall, Mcdill y West. (2007).

Ejemplo 60. Péndulo amortiguado:

Analizar la estabilidad y los puntos de equilibrio de la ecuación del péndulo con amortiguamiento dada

$$\theta'' + \theta' + \text{sen } \theta = 0 \quad (11)$$

Solución:

Primero convertimos la ecuación dada en un sistema autónomo, haciendo $x = \theta$, $y = \theta'$ de donde:

$$x' = f(x, y) = y. \quad (12)$$

$$y' = g(x, y) = -y - \text{sen } x$$

Las soluciones de equilibrio de (11) son $(n\pi, 0)$ para $n = 0, \pm 1, \pm 2$.

Evaluando la matriz jacobiana, tenemos:

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\cos x & -1 \end{bmatrix}$$

En $(0, 0)$ nos da:

$$J(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \text{ con valores propios } \lambda_1, \lambda_2 = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

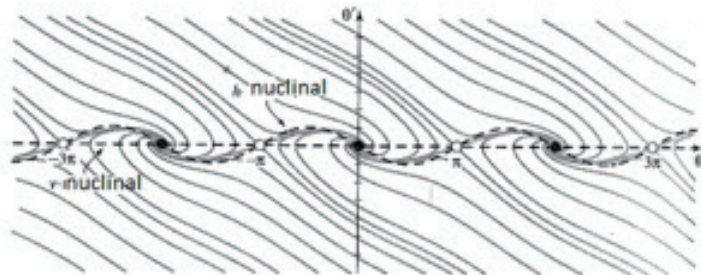
El origen es un punto de atracción espiral para el sistema linealizado y un equilibrio asintóticamente estable para (12). De este hecho, podemos deducir que cada trayectoria en la parte superior o inferior del retrato de fase se dirige hacia el eje horizontal.

Para examinar el punto de equilibrio en $(\pi, 0)$, evaluemos la matriz jacobiana para obtener:

$$J(\pi, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ con valores propios } \lambda_1, \lambda_2 = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Debido a que los valores propios son reales y de signos opuestos, la Linealización en $(\pi, 0)$ tiene un punto de silla. Por lo tanto, el péndulo tiene una conducta inestable «parecido a una silla de montar» en $(\pi, 0)$. El lector persistente será capaz de mostrar además que las soluciones de equilibrio $(k\pi, 0)$ para k impar son inestables, mientras que para k son asintóticamente estables.

Figura 86. Flujo del sistema y sus nuclinales.



Fuente. Farlow, Hall, Mcdill y West. (2007). Cuando falla la Linealización.

Cuando falla la Linealización

En la sección 10.5, resumimos las propiedades de geometría y estabilidad del equilibrio en el origen de los sistemas lineales 2×2 , de la forma $\vec{x}' = A\vec{x}$, caracterizados por la naturaleza de los valores propios de A . Mucho de este análisis se traslada a sistemas no lineales, cerca del equilibrio. La excepción es la del equilibrio del centro, que es estable. Las pequeñas perturbaciones pueden inclinar estas soluciones de cualquier manera, y no es posible una predicción general.

La siguiente tabla resume las relaciones entre los resultados de los lineales y los no lineales. Las únicas diferencias se destacan en negrita.

Estabilidad versus valores propios

Tabla 4. Raíces reales distintas.

Valores propios	Sistema linealizado		Sistema no lineal	
	Geometría	Estabilidad		
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	Nodo atractor	Asintóticamente estable	Nodo atractor	Asintóticamente estable
$0 < \lambda_2 < \lambda_1$	Nodo repeledor	Inestable	Nodo repeledor	Inestable
$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$	Silla	Inestable	Silla	Inestable

Fuente. Elaborada por el autor.

Tabla 5. Raíces reales repetidas.

$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	Atractor estrella o nodo degenerado	Asintóticamente estable	Nodo atractor o Espiral	Asintóticamente estable
$0 < \lambda_2 = \lambda_1$	Repeledor estrella o nodo degenerado	Inestable	Nodo repeledor o Espiral	Inestable

Fuente. Elaborada por el autor.

Tabla 6. Raíces complejas conjugadas.

$\alpha > 0$	Repeledor Espiral	Inestable	Repeledor Espiral	Inestable
$\alpha < 0$	Atractor Espiral	Asintóticamente estable	Atractor Espiral	Asintóticamente estable
$\alpha = 0$	Centro	Inestable	Centro o Espiral	Incierto

Fuente. Elaborada por el autor.

En resumen, se tiene el siguiente teorema⁹.

Estabilidad de sistemas no lineales

Para el sistema no lineal:

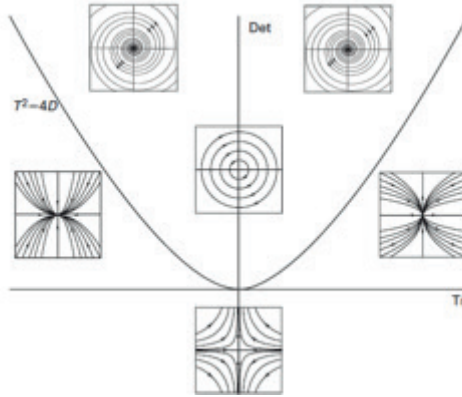
$$\begin{aligned} x' &= f(x, y) \\ y' &= g(x, y) \end{aligned} \quad \text{Con jacobiano } \mathbf{J} = \begin{bmatrix} f_x(x_e, y_e) & f_y(x_e, y_e) \\ g_x(x_e, y_e) & g_y(x_e, y_e) \end{bmatrix}$$

Los valores propios de \mathbf{J} en la solución de equilibrio (x_e, y_e) sean λ_1 y λ_2 (caso real) o $\alpha + \beta i$ (caso no real). Las características de geometría y estabilidad sobre ese equilibrio están relacionadas como se muestra en la tabla anterior.

Los sistemas lineales y no lineales difieren en un equilibrio solo cuando el sistema lineal está en un borde que implica valores propios no reales (la parábola que separa los nodos de las espirales o el semieje vertical que separa las espirales que atraen de las espirales repelentes). La siguiente figura que ya vimos en la unidad 10.5 nos muestra el comportamiento de estos sistemas sobre los bordes, para los cuales los sistemas no lineales presentan comportamientos similares.

⁹ Detalles de la prueba de esta clasificación puede ser encontrada en J. H. Hubbard y B. H. (1991). West. Systems of Ordinary Differential Equations. Springer – Verlag.

Figura 87. Comportamientos de sistemas no lineales sobre los bordes del plano traza determinantes.



Fuente. Blanchard, Devaney y Hall (1999).

Ejemplo 61. Un caso incierto:

Analizar la estabilidad de las soluciones de equilibrios en el origen para el sistema no lineal:

$$x' = f(x, y) = y - x\sqrt{x^2 + y^2}, \quad (13)$$

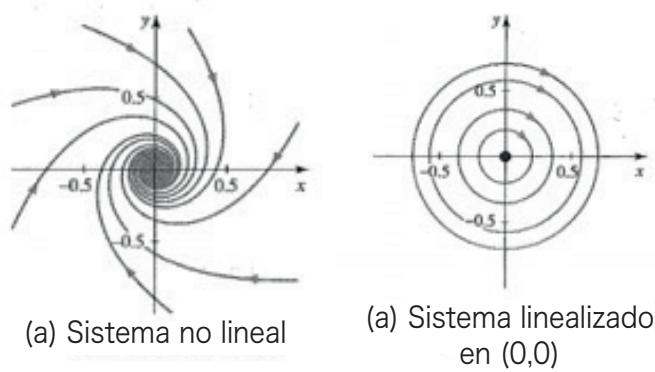
$$y' = g(x, y) = -x - y\sqrt{x^2 + y^2}$$

Solución:

Calculando la matriz jacobiana en $(0, 0)$, tenemos:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ con valores propios } \lambda_1, \lambda_2 = \pm i$$

La solución no cero para la Linealización es periódica; las órbitas son círculos alrededor del origen, por lo cual son punto centro, como se muestra en la figura 88(b).

Figura 88. Gráfica de las órbitas alrededor del origen.

Fuente. Farlow, Hall, Mcdill y West. (2007).

Sin embargo, como se puede ver en la figura 88(a), el origen no es un punto centro para el sistema no lineal (13), y las soluciones para el sistema no lineal no son periódicas.

Para entender la diferencia entre el retrato de fase para el sistema no lineal y el sistema linealizado, interpretamos a (13) como la suma del campo vectorial:

$$\begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix}$$

Siempre tangente al círculo alrededor del origen, y:

$$\begin{bmatrix} -x\sqrt{x^2 + y^2} \\ -y\sqrt{x^2 + y^2} \end{bmatrix}$$

El cual apunta hacia adentro y hacia el origen. La suma de estos dos campos tiende hacia el interior, y las soluciones es una espiral hacia adentro. El origen es asintóticamente estable. Ver figura 81 (a).

Es ilustrativo detenerse y ampliar esta discusión para mirar los sistemas estrechamente relacionados:

$$x' = f(x, y) = y + x\sqrt{x^2 + y^2}, x\sqrt{x^2 + y^2} \quad (14)$$

$$y' = g(x, y) = -x + y\sqrt{x^2 + y^2}, y\sqrt{x^2 + y^2}$$

El sistema 14 tiene la misma Linealización que el sistema 13; por razonamiento similar que precede, podemos predecir que las soluciones para el sistema 14 son espirales hacia fuera, haciendo su punto de equilibrio el origen inestable.

Ejemplo 62:

Considere el sistema no lineal:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -2x + 2x^2 \\ \frac{dy}{dt} &= -3x + y + 3x^2\end{aligned}$$

Analizar la estabilidad de las soluciones de equilibrios para el sistema.

Solución:

Los puntos de equilibrio para el sistema son (0,0) y (1,0). Para poder analizar las soluciones cerca de estos puntos se requiere hallar el Jacobiano en estos puntos de equilibrio, esto es:

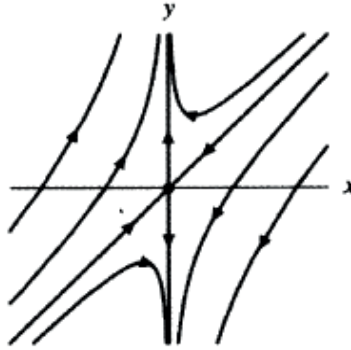
$$\begin{aligned}J &= \begin{bmatrix} f_x(x,y) & f_y(x,y) \\ g_x(x,y) & g_y(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 + 4x & 0 \\ -3 + 6x & 1 \end{bmatrix} \\ J(0,0) &= \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \\ J(1,0) &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Cerca de (0,0), el plano de fase para el sistema:

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \vec{X}$$

Los valores propios para este sistema lineal son: -2 y 1, por lo que el origen es un punto de silla.

Se puede ver que (0,1) es el vector propio para 1 y que (1, 1) es un vector propio para -2. Usando esta información podemos esbozar el plano de fase para el sistema lineal:

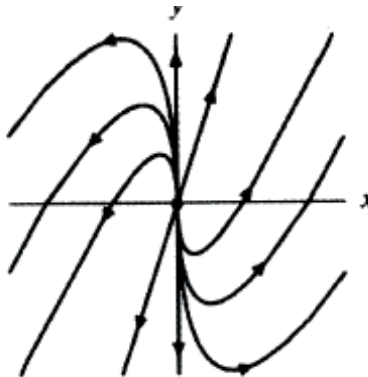
Figura 89. Plano de fase para el sistema dado.

Fuente. Blanchard, Devaney y Hall (1999).

En $(1,0)$ el otro punto de equilibrio el sistema linealizado es:

$$\frac{d\bar{\mathbf{X}}}{dt} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{X}}$$

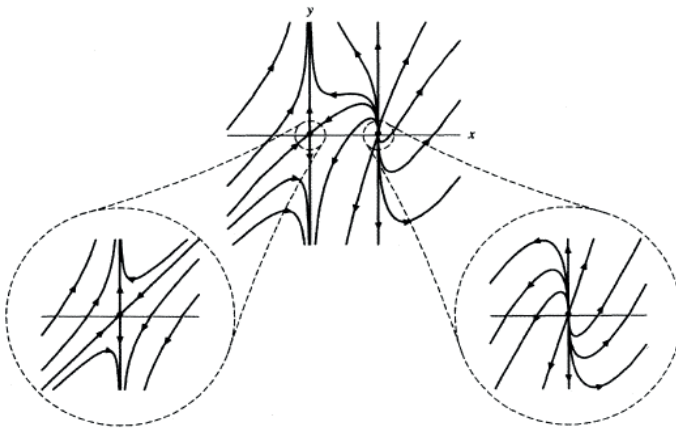
Los valores propios aquí son 2 y 1, por lo que para este sistema el origen según nuestra tabla es un nodo Repelidor o una fuente. Usando el hecho de que $(0, 1)$ es el vector propio para el valor propio 1 y que $(1, 3)$ lo es para el valor propio 2, podemos esbozar el plano de fase en la figura 90.

Figura 90. Figura del plano de fase para el sistema dado.

Fuente. Blanchard, Devaney y Hall (1999).

Cerca de los puntos de equilibrio, el plano de fase para el sistema no lineal se parece al de los sistemas linealizados. Las curvas solución (numéricamente aproximadas por una computadora) se muestran en la figura 90. Si amplificamos el plano de fase, cerca de $(0, 0)$ y $(1, 0)$ vemos que las curvas solución efectivamente se parecen a los sistemas linealizados correspondientes.

Figura 91. Linealización numérica de las curvas solución.



Fuente. Blanchard, Devaney y Hall (1999).

Es importante observar que la clasificación dada en la tabla anterior de los puntos de equilibrio para los sistemas no lineales no dice nada acerca del comportamiento de las soluciones con posiciones iniciales lejanas del punto (x_0, y_0) .

Separatrices

Las cuatro soluciones especiales que tienden hacia un punto de silla cuando $t \rightarrow \infty$, o $t \rightarrow -\infty$ se denominan **Separatrices** (una de esas curvas por sí sola se llama una separatriz).

Elas tienen una especial importancia porque separan las soluciones con diferentes comportamientos. Las **Separatrices estables** son aquellas donde soluciones tienden hacia el punto de

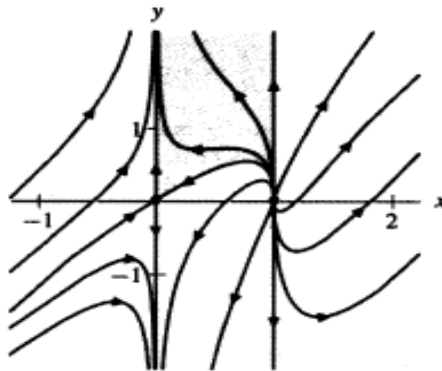
silla cuando $t \rightarrow \infty$, mientras que en las **Separatrices inestables** las soluciones tienden hacia el punto de silla cuando $t \rightarrow -\infty$.

Así por ejemplo, en el ejercicio 60, donde estudiamos el sistema no lineal:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -2x + 2x^2 \\ \frac{dy}{dt} &= -3x + y + 3x^2\end{aligned}$$

el origen es un punto de silla. La separatriz estable próxima al origen separa en dos franjas al plano de fase limitada por las líneas $t = 0$ y $t = 1$. En esta región las condiciones iniciales que están arriba de la separatriz dan soluciones $x(t) \rightarrow \infty$ cuando t se incrementa, mientras que las condiciones iniciales que están abajo de la separatriz, dan soluciones en que $x(t) \rightarrow -\infty$ cuando t crece (figura 91).

Figura 92. Gráfica del comportamiento del sistema cerca del origen para el sistema dado.



Fuente. Blanchard, Devaney y Hall (1999).

10.23 Ejercicios

En los ejercicios 1 al 12

- Determine todos los equilibrios y clasifíquelos (nodos, sillas, espirales, centros, estable o inestable).
- Si un valor propio es real, encuentre los vectores propios.
- Grafique el plano de fase usando el plano de fase del sistema linealizado.
- Grafique el plano de fase usando el campo de pendientes con la ayuda de un software.
- Grafique el plano de fase usando el método de las nuclinares y la parte c.

1. $\frac{dx}{dt} = x + xy, \frac{dy}{dt} = 2y - 4xy$

2. $\frac{dx}{dt} = -x + xy, \frac{dy}{dt} = -2y + 8xy$

3. $\frac{dx}{dt} = 2x - 2xy, \frac{dy}{dt} = y - xy$

4. $\frac{dx}{dt} = 1 - x^2, \frac{dy}{dt} = y + 1$

5. $\frac{dx}{dt} = x - y, \frac{dy}{dt} = -2x + 2xy$

6. $\frac{dx}{dt} = y^3 + 1, \frac{dy}{dt} = x^2 + y$

7. $\frac{dx}{dt} = 1 - y^2, \frac{dy}{dt} = 1 - x^2$

8. $\frac{dx}{dt} = x(1 - y^2), \frac{dy}{dt} = x + y$

9. $\frac{dx}{dt} = x - y + x^2, \frac{dy}{dt} = x + y$

10. $\frac{dx}{dt} = 2x - y - xy, \frac{dy}{dt} = x + 2y$

$$11. \frac{dx}{dt} = -x-2y, \frac{dy}{dt} = 2x-y + xy^2$$

$$12. \frac{dx}{dt} = 2x + y, \frac{dy}{dt} = -x-2y + y^3$$

Equilibrio en el origen. En los problemas 13 al 18, muestre que cada sistema tiene un punto de equilibrio en el origen. Calcule el jacobiano y luego discuta el tipo y estabilidad del punto de equilibrio. Encuentre y describa otro equilibrio si existe.

$$13. x' = f(x, y) = -2x + 3y + xy \quad y' = g(x, y) = -x + y - 2xy^2$$

$$14. x' = f(x, y) = -y - x^3 \quad y' = g(x, y) = -x - y^3$$

$$15. x' = f(x, y) = x + y + 2xy \quad y' = g(x, y) = -2x + y + y^3$$

$$16. x' = f(x, y) = y. \quad y' = g(x, y) = -\sin x - y$$

$$17. x' = f(x, y) = x + y^2 \quad y' = g(x, y) = x^2 + y^2$$

$$18. x' = f(x, y) = \sin y \quad y' = g(x, y) = -\sin x + y$$

Equilibrio inusual. Para cada problema del 19 al 21, determine el tipo y estabilidad de cada punto de equilibrio real por el cálculo de la matriz jacobiana en cada punto de equilibrio.

$$19. x' = 1 - xy \quad y' = x - y^3.$$

$$20. x' = x - 3y + 2xy \quad y' = 4x - 6y - xy$$

$$21. x' = 4x - x^3 - xy^2 \quad y' = 4y - x^2y - y^3$$

22. **Finalización de la Linealización.** Complete el análisis comenzado en el ejemplo 56, mostrando los detalles de la Linealización acerca de los puntos $(-1, 0)$ para $x' = y$, $y' = -y + x - x^3$.
-

Incertidumbre. Debido a que el equilibrio del centro es estable, pero no asintóticamente estable, la perturbación no lineal puede tener diferentes resultados, mostrados en el problema 23 y 24.

23. Determine la estabilidad de las soluciones del equilibrio del resorte fuerte:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + x + x^3 = 0$$

24. Determine la estabilidad de las soluciones de equilibrio del resorte débil:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + x - x^3 = 0$$

25. Ecuación de Liénard¹⁰. Una generalización de la ecuación masa resorte amortiguada, es la ecuación de Liénard:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p(x) \frac{dx}{dt} + q(x) = 0$$

26. Si $q(0) = 0$, $\frac{dq}{dt} > 0$ y $p(0) > 0$, muestre que el origen es un punto de equilibrio estable.
-

27. Ecuación conservativa.

Una ecuación diferencial de segundo orden de la forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} + F(x) = 0$$

Es llamada **ecuación diferencial conservativa**. Encontrar los puntos de equilibrio de la ecuación conservativa:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} - x^2 - 2x^3 = 0$$

Y determine el tipo y estabilidad.

Sistema masa resorte amortiguado. La ecuación diferencial lineal de segundo orden:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

Modela las vibraciones de una masa m atada a un resorte, el cual tiene una constante k y una constante de amortiguación b . Para los problemas de vibración no lineal 26 al 29, use su intuición para decidir si la solución cero ($x = \frac{dx}{dt} \equiv 0$) es estable o inestable. Chequee su intuición transformándola a un sistema de ecuaciones lineales de primer orden y linealizándola.

28. $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} - \left(\frac{dx}{dt}\right)^3 + x = 0$

29. $\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{dx}{dt}\right)^3 + x = 0$

30. $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + \left(\frac{dx}{dt}\right)^3 + x = 0$

31. $\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} + x = 0$

10.24 Problemas de aplicación de sistemas lineales homogéneos y no homogéneos y sistemas no lineales

Para los siguientes dos problemas podemos usar un sistema de ecuaciones diferenciales, basados en el hecho de que:

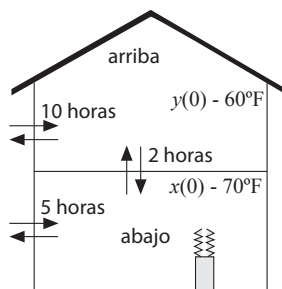
$$\text{Razón de cambio} = \text{Razón de entrada} - \text{Razón de salida} \quad (1)$$

Ejemplo 63. Problema de calefacción:

El profesor Pérez vive en una casa de dos pisos, como se muestra en la figura 93. Una noche de invierno, con la temperatura exterior a 0°F , su horno falla.

Supongamos que las constantes de tiempo en la casa del profesor Pérez, que especifican la tasa de flujo de calor entre las habitaciones, son 5 horas entre el piso de abajo y el exterior, 10 horas entre el piso de arriba y el exterior y 2 horas entre los dos pisos. Si la temperatura cuando el horno falla es de 70°F abajo y 60°F arriba, ¿cuál es la temperatura futura en cada nivel de la casa?

Figura 93. Gráficas de las curvas solución para el problema de la temperatura.



Fuente. Elaborada por el autor con el programa Derive.

Solución:

Si $x(t)$ y $y(t)$ denota la temperatura en el piso de arriba y en el piso de abajo, respectivamente, la ley de Newton de enfriamiento establece que la tasa de cambio en la temperatura de la habitación es proporcional a la diferencia entre la temperatura de la habitación y la temperatura del medio circundante. En el problema, la razón a la cual la temperatura de abajo cambia depende de la adición del calor (ahora cero) del horno, junto con el aumento de calor (o pérdida) desde arriba y el exterior. Además, la tasa de cambio de temperatura en la planta superior depende de la ganancia de calor (o pérdida) desde abajo y el exterior. Por lo tanto, las dos incógnitas $x(t)$ y $y(t)$ satisfacen el problema con valor inicial:

$$\begin{aligned}x'(t) &= -\frac{1}{5}[x(t)-0] - \frac{1}{2}[x(t)-y(t)] = -\frac{7}{10}x(t) + \frac{1}{2}y(t) \\y'(t) &= -\frac{1}{2}[y(t)-x(t)] - \frac{1}{10}[y(t)-0] = -\frac{1}{2}x(t) - \frac{3}{5}y(t)\end{aligned}$$

Donde $x(0) = 70$ y $y(0) = 60$. Escribiendo el sistema en forma matricial, tenemos:

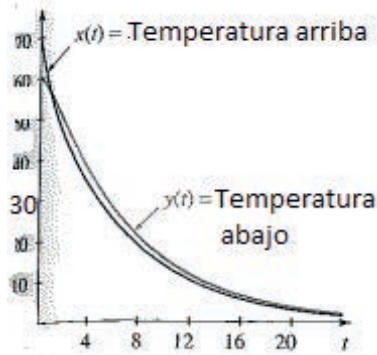
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} -7 & 5 \\ 5 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70 \\ 60 \end{bmatrix}$$

Encontrando los valores propios de la matriz de coeficiente, encontramos que la solución general es:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \approx c_1 e^{-0.15t} \begin{bmatrix} 0.9 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-1.15t} \begin{bmatrix} -1.1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo las condiciones iniciales $x(0) = 70$ y $y(0) = 60$ tenemos que $c_1 = 68$ y $c_2 = -8$. El resultado es graficado en la figura 94. Después de un par de horas, la temperatura arriba es levemente más alta, aunque por 24 horas ambas temperaturas se acercan a cero grados.

Figura 94. Gráficas de las curvas solución para el problema de la temperatura.



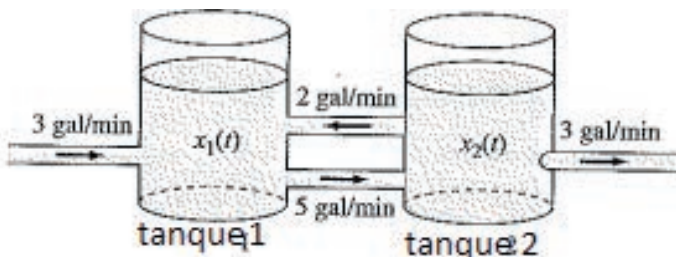
Fuente. Elaborada por el autor con el programa Derive.

Ejemplo 64. Problema de mezcla de dos tanques:

Consideremos dos tanques, tal como se muestran en la figura 95. Cada tanque inicialmente contiene 100 galones de agua, en las cuales 10 libras de sal se han disuelto. Agua fresca fluye en el tanque 1 a una velocidad de 3 gal/min, y la mezcla bien agitada fluye al tanque 2 a una velocidad de 5 gal/min. La mezcla bien agitada en el tanque 2 es simultáneamente recogida en el tanque 1 a una velocidad de 2 gal/min y fuera del tanque 2 de 3 gal/min. Determinar el problema de valor inicial que describe este sistema.

Solución:

Figura 95. Gráfica de los tanques interconectados.



Fuente. Elaborada por el autor.

Sea $x_1(t)$ y $x_2(t)$ la cantidad de sal (en libras) en el tanque 1 y tanque 2 respectivamente. Podemos establecer el problema con valor inicial en lb/min, utilizando la ecuación (1), es decir:

$$x_1' = \underbrace{\left(0 \frac{\text{lib}}{\text{gal}}\right) \left(3 \frac{\text{gal}}{\text{min}}\right) + \left(\frac{x_2 \text{lib}}{100 \text{gal}}\right) \left(2 \frac{\text{gal}}{\text{min}}\right)}_{\text{Razón de entrada, razón de salida}} - \underbrace{\left(\frac{x_1 \text{lib}}{100 \text{gal}}\right) \left(5 \frac{\text{gal}}{\text{min}}\right)}_{\text{Razón de salida}}$$

Razón de entrada, razón de salida.

$$x_2' = \underbrace{\left(\frac{x_1 \text{lib}}{100 \text{gal}}\right) \left(5 \frac{\text{gal}}{\text{min}}\right)}_{\text{Razón de entrada, razón de salida}} - \underbrace{\left[\left(\frac{x_2 \text{lib}}{100 \text{gal}}\right) \left(2 \frac{\text{gal}}{\text{min}}\right) + \left(\frac{x_1 \text{lib}}{100 \text{gal}}\right) \left(3 \frac{\text{gal}}{\text{min}}\right)\right]}_{\text{Razón de salida}}$$

Agregando las condiciones iniciales se tiene el problema con valor inicial:

$$x_1(0) = x_2(0) = 10$$

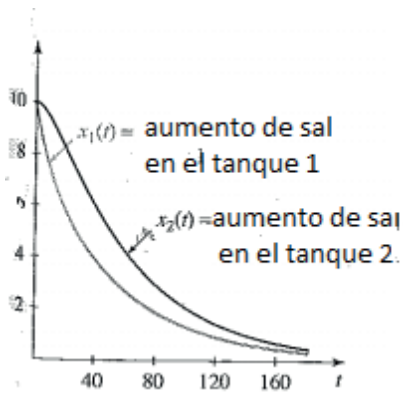
Este es un sistema de ecuaciones diferenciales lineales, que llevándolo al sistema matricial se tiene:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -0.05 & 0.02 \\ 0.05 & -0.05 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix}$$

La entrada de agua pura hace que estos sistemas sean homogéneos. En ambos tanques, «galones entrando» es igual a «galones saliendo», lo que significa que el volumen permanece constante a 100 galones y la matriz de coeficientes tiene entradas constantes.

Encontrando los valores propios del sistema podemos resolverlo, la figura 96 nos muestra la gráfica de las soluciones.

Figura 96. Gráficas comparativas de dos curvas solución para el problema de mezclas.



Fuente. Elaborada por el autor con el programa Derive.

Problema 3. Problema de una red eléctrica:

Una red multilazo eléctrica, tal como se muestra en la figura 97, puede ser modelada por un sistema de ecuaciones diferenciales usando las leyes de Kirchhoff de las corrientes y los voltajes. Encontrar el modelo general.

Solución:

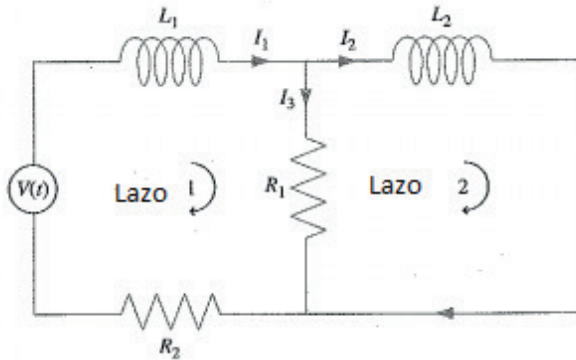
Por la primera ley de Kirchhoff (para las corrientes en los cruces), se tiene que:

$$I_1 = I_2 + I_3$$

Por la segunda ley de Kirchhoff (voltaje alrededor de un circuito):

$$L_1 \frac{dI_1}{dt} + R_2 I_1 + R_1 I_3 = V(t).$$

$$L_2 \frac{dI_2}{dt} - R_1 I_3 = 0$$

Figura 97. Circuito eléctrico para el problema anterior.

Fuente. Elaborada por el autor.

Sustituyendo $I_3 = I_2 - I_1$, obtenemos el sistema lineal no homogéneo de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -\frac{R_1 + R_2}{L_1} & \frac{R_1}{L_1} \\ \frac{R_1}{L_2} & -\frac{R_1}{L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{V(t)}{L_1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Podemos sacar las siguientes conclusiones de este modelo:

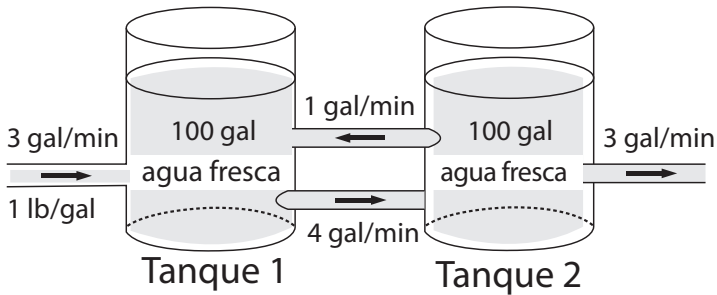
- Si no hay un voltaje de entrada (es decir $V(t) = 0$, para $t \geq 0$), entonces el sistema es homogéneo.
- Si los valores propios son reales, la corriente crece o decrece de forma exponencial.
- Si los valores propios son complejos, la corriente es oscilante.

Ejemplo 66. Problema de mezcla de dos tanques, sistema no homogéneo:

Consideremos dos tanques como se muestran en la figura 98, donde inicialmente cada tanque contiene 100 galones de agua pura. Una solución de sal con concentración de 1 lb/gal es bombeada dentro del tanque 1 a la razón de 3 gal/min, y la solución del tanque 1 es

bombeada al tanque 2 a la razón de 4 gal/min. La solución del tanque 2 es bombeada al tanque 1 a razón de 1 gal/min y también para afuera, a una razón de 3 gal/min. ¿cuánta sal hay en cada tanque en cualquier instante de tiempo? ¿cuál es el estado estacionario de la solución?

Figura 98. Problema de mezcla sistema no homogéneo.



Fuente. Elaborada por el autor.

Solución:

Llamamos $x_1(t)$ y $x_2(t)$ al aumento de sal (en libras) en el tanque 1 y tanque 2 respectivamente, la razón de cambio (en libras/minuto) de sal en cada tanque está dada por:

$$x_1' = \underbrace{\left(1 \frac{lb}{gal}\right) \left(3 \frac{gal}{min}\right)}_{\text{Razón de entrada}} + \underbrace{\left(\frac{x_2 lb}{100 gal}\right) \left(1 \frac{gal}{min}\right)}_{\text{menos}} - \underbrace{\left(\frac{x_1 lb}{100 gal}\right) \left(4 \frac{gal}{min}\right)}_{\text{razón de salida}}$$

Razón de entrada, menos razón de salida:

$$x_2' = \underbrace{\left(\frac{x_1 lb}{100 gal}\right) \left(4 \frac{gal}{min}\right)}_{\text{Razón de entrada}} - \underbrace{\left(\frac{x_2 lb}{100 gal}\right) \left(4 \frac{gal}{min}\right)}_{\text{razón de salida}}$$

El cual se reduce a:

$$x_1' = -0.04x_1 + 0.01x_2 + 3$$

$$x_2' = 0.04x_1 - 0.04x_2$$

El problema con el valor inicial puede ser escrito en forma matricial como un sistema no homogéneo de ecuaciones diferenciales lineales, así:

$$\vec{x}' = \mathbf{A}\vec{x} + \vec{f}(t) = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.04 & 0.01 \\ 0.04 & -0.04 \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ya que en $t = 0$ no existe sal en ninguno de los tanques. Los valores y vectores propios de \mathbf{A} se pueden encontrar fácilmente para obtener:

$$\lambda_1 = -0.02, \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \lambda_2 = -0.06, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Lo que produce la solución homogénea:

$$\vec{x}_h = c_1 e^{-0.02t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 e^{-0.06t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Debido a que el término forzado es un vector constante, la solución particular es:

$$\begin{aligned} \vec{x}_p = -\mathbf{A}^{-1}\vec{b} &= -\begin{bmatrix} -0.04 & 0.01 \\ 0.04 & -0.04 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{25}{3} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Entonces la solución general es:

$$\vec{x} = c_1 e^{-0.02t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 e^{-0.06t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo las condiciones iniciales $x_1(0) = x_2(0) = 0$ en la ecuación anterior, encontramos que $c_1 = -75$ y $c_2 = 25 - 25$, luego tenemos la solución:

$$\begin{aligned} x_1 &= -75e^{-0.02t} - 25e^{-0.06t} + 100 \\ x_2 &= -150e^{-0.02t} + 50e^{-0.06t} + 100 \end{aligned}$$

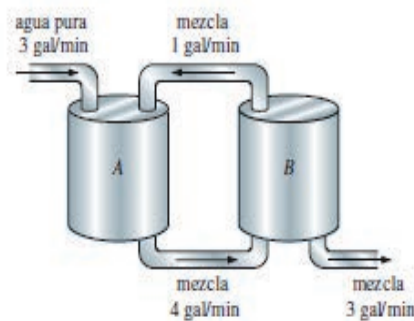
Se tarda alrededor de 2,5 horas antes de que ambos tanques puedan obtener su estado estacionario que es el 10 % de la constante. Valor de estado de 100 lb en cada tanque.

Retomemos el ejemplo 3 de la unidad 10.1

Ejemplo 67. Otro problema de mezcla:

Consideremos dos tanques como se muestran en la figura 99. Suponga que el tanque A contiene 50 galones de agua en los que hay disueltas 25 libras de sal. Suponga que el tanque B contiene 50 galones de agua. A los tanques entra y sale líquido como se indica en la figura: se supone que tanto la mezcla intercambiada entre los dos tanques como el líquido bombeado hacia afuera del tanque B están bien mezclados. Construir un modelo matemático que describa la cantidad de libras $y_1(t)$ y $y_2(t)$ de sal en los tanques A y B respectivamente en el tiempo t .

Figura 99. Otro problema de mezcla.



Fuente. Elaborada por el autor.

Solución:

Vimos que el sistema lineal correspondiente es el siguiente:

$$\frac{dy_1}{dt} = -\frac{2}{25}y_1 + \frac{1}{50}y_2$$

$$\frac{dy_2}{dt} = \frac{2}{25}y_1 - \frac{2}{25}y_2$$

$$\text{O: } \begin{bmatrix} \frac{dy_1}{dt} \\ \frac{dy_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{25} & \frac{1}{50} \\ \frac{2}{25} & -\frac{2}{25} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Para hallar los valores propios, tenemos que resolver el determinante:

$$\begin{vmatrix} -\frac{2}{25}-\lambda & \frac{1}{50} \\ \frac{2}{25} & -\frac{2}{25}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Luego tenemos el polinomio característico:

$$p(\lambda) = \lambda^2 + \frac{4}{25}\lambda + \frac{3}{625} = 0$$

El estudiante puede continuar analizando este problema.

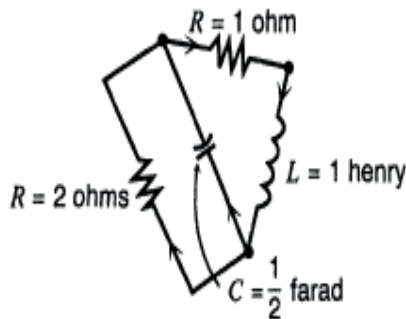
Ejemplo 68:

El circuito eléctrico que se muestra en la figura 100, se describe por el sistema de ecuaciones diferenciales siguiente:

$$\begin{bmatrix} I \\ V \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ V \end{bmatrix}$$

En donde I es la corriente que pasa por la inductancia y V es la caída del voltaje a través de la capacitancia. Supóngase que en el instante $t = 0$ la corriente es de dos amperios y la caída del voltaje es de 2 amperios. Encontrar $I(t)$ y $V(t)$ en cualquier instante.

Figura 100. Problema de un circuito eléctrico.



Fuente. Elaborada por el autor.

Solución:

Si se supone que en el instante t , la corriente y el voltaje están dados por $\begin{bmatrix} I(t) \\ V(t) \end{bmatrix}$, entonces obtenemos las ecuaciones algebraicas:

$$\begin{bmatrix} -1-r & -1 \\ 2 & -1-r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I(t) \\ V(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Los valores propios se determinan a partir de la condición:

$$\begin{vmatrix} -1-r & -1 \\ 2 & -1-r \end{vmatrix} = r^2 + 2r + 3 = 0$$

De donde $r_1 = -1 + \sqrt{2}i$ y $r_2 = -1 - \sqrt{2}i$. Entonces los vectores propios correspondientes se encuentran a partir (2), luego:

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2}i \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2}i \end{bmatrix}$$

La solución compleja correspondiente a r_1 y \vec{v}_1 es:

$$\begin{aligned} r_1 \vec{v}_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2}i \end{bmatrix} e^{(-1+\sqrt{2}i)t} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2}i \end{bmatrix} e^{-t} (\cos\sqrt{2}t + i\operatorname{sen}\sqrt{2}t) \\ &= e^{-t} \begin{bmatrix} \cos\sqrt{2}t \\ \sqrt{2} \operatorname{sen}\sqrt{2}t \end{bmatrix} + i e^{-t} \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\sqrt{2}t \\ -\sqrt{2} \cos\sqrt{2}t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Las partes reales e imaginarias forman una pareja de soluciones linealmente independientes de valores reales de nuestra ecuación inicial dada, esto es el conjunto fundamental es:

$$\left\{ e^{-t} \begin{bmatrix} \cos\sqrt{2}t \\ \sqrt{2} \operatorname{sen}\sqrt{2}t \end{bmatrix}, e^{-t} \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\sqrt{2}t \\ -\sqrt{2} \cos\sqrt{2}t \end{bmatrix} \right\}$$

De donde la solución general está dada por:

$$\begin{bmatrix} I(t) \\ V(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{-t} \begin{bmatrix} \cos\sqrt{2}t \\ \sqrt{2} \operatorname{sen}\sqrt{2}t \end{bmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\sqrt{2}t \\ -\sqrt{2} \cos\sqrt{2}t \end{bmatrix}$$

Como se tienen las condiciones iniciales:

$$\begin{bmatrix} I(0) \\ V(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Tenemos que:

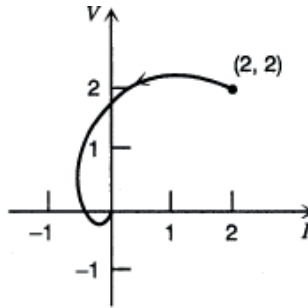
$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, $c_1 = 2$ y $c_2 = -\sqrt{2}$, entonces la solución particular a nuestro problema está dada por:

$$\begin{bmatrix} I(t) \\ V(t) \end{bmatrix} = 2e^{-t} \begin{bmatrix} \cos\sqrt{2}t \\ \sqrt{2} \operatorname{sen}\sqrt{2}t \end{bmatrix} - \sqrt{2}e^{-t} \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\sqrt{2}t \\ -\sqrt{2} \cos\sqrt{2}t \end{bmatrix}$$

En la figura 101 se muestra la trayectoria de la solución. La trayectoria forma una espiral en el sentido contrario de las manecillas del reloj y tiende a cero rápidamente debido al factor e^{-t} .

Figura 101. Gráfica de una trayectoria de una solución.

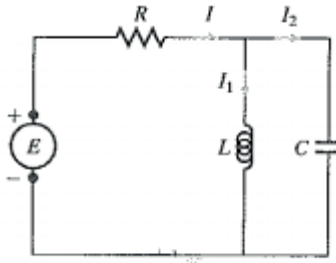


Fuente. Elaborada por el autor con el programa Derive.

Ejemplo 69. Circuito eléctrico:

Encuentre un sistema de primer orden que modele el circuito de la figura 102.

Figura 102. Un circuito eléctrico.



Fuente. Elaborada por el autor.

El circuito contiene una fuente de voltaje E , una resistencia R , un capacitor C y una inductancia L . Además, la capacitancia y el inductor están en paralelo.

Usando la primera ley de Kirchhoff para la ley de la corriente en la unión actual en el cruce a la derecha del resisto, como se indica en la figura, se tiene:

$$I = I_1 + I_2$$

A continuación, la ley de voltaje de Kirchhoff aplicada al bucle que contiene la fuente y el inductor nos dice:

$$E = RI + LI_1'$$

Despejando de esta ecuación I_1' y usando la ecuación anterior se tiene:

$$I_1' = \frac{1}{L}(E - R(I_1 + I_2)) \quad (2)$$

La ley de Kirchhoff para el voltaje aplicada al lazo que contiene la corriente, resistor y el capacitor es:

$$E = RI + \frac{1}{C} Q'$$

Donde Q es la carga sobre el capacitor. Cuando usamos esta ecuación con $Q' = I_2$ y nuestra ecuación inicial $I = I_1 + I_2$, tenemos:

$$E = R(I_1' + I_2') + \frac{1}{C} I_2$$

Resolviendo esta ecuación para I_2' y usando la sustitución $I_1' = \frac{1}{L}(E - R(I_1 + I_2))$, tenemos:

$$\begin{aligned} I_2' &= -I_1' + \frac{1}{R} \left[E' - \frac{1}{C} I_2 \right] \\ &= -\frac{1}{L} [E - R(I_1 + I_2)] + \frac{1}{R} \left[E' - \frac{1}{C} I_2 \right] \quad (3) \end{aligned}$$

Las ecuaciones (2) y (3) forman un sistema lineal no homogéneo para I_1 y I_2 . Esto es un poco más fácil de ver si reescribimos el sistema como:

$$\begin{aligned} I_1' &= -\frac{R}{L} I_1 - \frac{R}{L} I_2 + \frac{E'}{L} \\ I_2' &= \frac{R}{L} I_1 + \left(\frac{R}{L} - \frac{1}{RC} \right) I_2 + \left(\frac{E'}{R} - \frac{E}{L} \right) \quad (4) \end{aligned}$$

Para escribir el sistema (4) en notación matricial, introducimos el vector $I = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$. Entonces con:

$$A = \begin{pmatrix} -R/L & -R/L \\ R/L & R/L - 1/RC \end{pmatrix} \text{ y } F = \begin{pmatrix} E'/L \\ E'/R - E/L \end{pmatrix}$$

Luego el sistema puede ser escrito como $I' = AI + F$. (5)

Ejemplo 70.

En el ejemplo 69 suponemos que $R = 1$ ohmios, $L = 1$ Henry, y $C = 5/4$ Faraday. Asumimos que $I_1(0) = 5$ amperios y $I_2(0) = 1$ amperio, encontrará las corrientes I_1 y I_2 como función del tiempo t .

Solución:

Este es el mismo ejemplo 69 salvo que no existe el voltaje. Usando el mismo análisis del ejemplo 69, pero con $E = 0$, encontramos que $I' = AI$, (sistema homogéneo) donde $I = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$, y $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1/5 \end{bmatrix}$.

Como $T = \text{Tr}(A) = -4/5$ y $D = \det(A) = 4/5$, el polinomio característico es $\lambda^2 + \frac{4}{5}\lambda + \frac{4}{5} = 0$. Usando la fórmula cuadrática vemos que las raíces son $(-2 \pm 4i)/5$. Encontramos un vector propio asociado con el valor propio $\lambda = (-2 + 4i)$, encontrando el espacio nulo de la matriz:

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} - 4i/5 & -1 \\ 1 & \frac{3}{5} - 4i/5 \end{bmatrix}$$

Procediendo como hemos visto para encontrar dicho valor propio, se tiene que $w = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 + 4i \end{bmatrix}$ es un vector propio. El resultado para este valor complejo es $z(t) = e^{\lambda t} w$. Para encontrar la parte real y compleja de z , calculamos:

$$\begin{aligned} z(t) &= e^{\lambda t} w \\ &= e^{(-2+4i)t/5} \begin{bmatrix} -5 \\ 3 + 4i \end{bmatrix} \\ &= e^{-2t/5} \left[\cos\left(\frac{4t}{5}\right) + i \text{sen}\left(\frac{4t}{5}\right) \right] \left[\begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} \right] \\ &= e^{-\frac{2t}{5}} \left[\cos\left(\frac{4t}{5}\right) \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix} - \text{sen}\left(\frac{4t}{5}\right) \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} \right] \\ &\quad + i e^{-\frac{2t}{5}} \left[\cos\left(\frac{4t}{5}\right) \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} + \text{sen}\left(\frac{4t}{5}\right) \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix} \right] \end{aligned}$$

Luego un conjunto fundamental de soluciones es:

$$y_1(t) = e^{-\frac{2t}{5}} \begin{bmatrix} -5 \cos\left(\frac{4t}{5}\right) \\ 3 \cos\left(\frac{4t}{5}\right) - 4 \operatorname{sen}\left(\frac{4t}{5}\right) \end{bmatrix} y$$

$$y_2(t) = e^{-\frac{2t}{5}} \begin{bmatrix} -5 \operatorname{sen}\left(\frac{4t}{5}\right) \\ 4 \cos\left(\frac{4t}{5}\right) + 3 \operatorname{sen}\left(\frac{4t}{5}\right) \end{bmatrix}$$

La solución general es $I(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t)$.

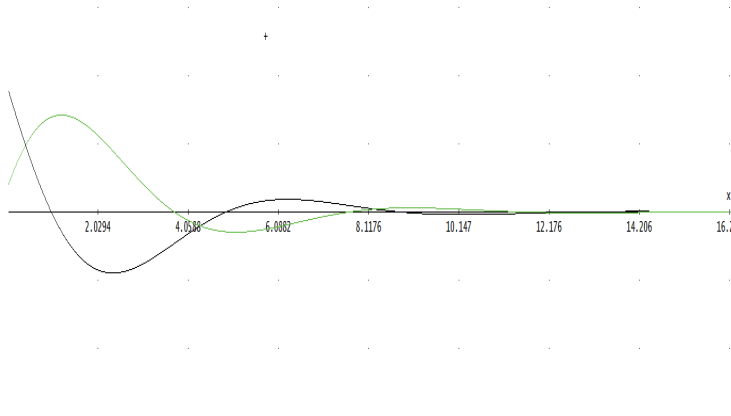
En $t = 0$, se tiene:

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} = I(0) = \begin{bmatrix} I_1(0) \\ I_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5C_1 \\ 3C_1 + 4C_2 \end{bmatrix}$$

Como $C_1 = -1$ y $C_2 = 1$, entonces la solución particular es:

$$I(t) = \begin{bmatrix} I_1(t) \\ I_2(t) \end{bmatrix} = e^{-\frac{2t}{5}} \begin{bmatrix} I_1(t) \\ I_2(t) \end{bmatrix} = e^{-\frac{2t}{5}} \begin{bmatrix} 5 \cos\left(\frac{4t}{5}\right) - 5 \operatorname{sen}\left(\frac{4t}{5}\right) \\ \cos\left(\frac{4t}{5}\right) + 7 \operatorname{sen}\left(\frac{4t}{5}\right) \end{bmatrix}$$

Figura 103. Gráfica de una solución particular.



Fuente. Elaborada por el autor con el programa Derive.

Ejemplo 71. Un sistema no homogéneo:

Para el circuito del ejercicio 7, supongamos que $R = 1$ ohmios, $L = 1$ Henry, y $C = 5/4$ Faraday, además supongamos que la fuerza electromotriz está dada por una batería y $E = 5$ voltios. Asuma que $I_1(0) = 5$ amperios y que $I_2(0) = 1$ amperio, encontrar las corrientes I_1 e I_2 como funciones de t .

Solución:

Este circuito ya fue considerado en el ejemplo 70. Usando el resultado obtenido para el sistema homogéneo, ahora vamos a considerar el sistema no homogéneo $I' = AI + F$ donde:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1/5 \end{bmatrix} \text{ y } F = \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Vimos en el el sistema homogéneo, ejemplo 70, que el conjunto fundamental de soluciones para este sistema homogéneo es:

$$y_1(t) = e^{-\frac{2t}{5}} \begin{bmatrix} -5 \cos\left(\frac{4t}{5}\right) \\ 3 \cos\left(\frac{4t}{5}\right) - 4 \operatorname{sen}\left(\frac{4t}{5}\right) \end{bmatrix} y$$

$$y_2(t) = e^{-\frac{2t}{5}} \begin{bmatrix} -5 \operatorname{sen}\left(\frac{4t}{5}\right) \\ 4 \cos\left(\frac{4t}{5}\right) + 3 \operatorname{sen}\left(\frac{4t}{5}\right) \end{bmatrix}$$

Luego:

$$A = e^{-\frac{2t}{5}} \begin{bmatrix} -5 \cos\left(\frac{4t}{5}\right) & -5 \operatorname{sen}\left(\frac{4t}{5}\right) \\ 3 \cos\left(\frac{4t}{5}\right) - 4 \operatorname{sen}\left(\frac{4t}{5}\right) & 4 \cos\left(\frac{4t}{5}\right) + 3 \operatorname{sen}\left(\frac{4t}{5}\right) \end{bmatrix} =$$

es la matriz fundamental.

La solución general de $I' = AI + F$ tiene la forma $I = Y_p + Y_h$, donde Y_p es una solución particular y $Y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2$ es la solución de la ecuación homogénea asociada. Como en el lado derecho de la ecuación $F = \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \end{bmatrix}$ es un vector de constantes, es natural pensar en una solución particular de la forma $Y_p = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$, el cual es también un vector formado por constantes. Luego Y_p debe satisfacer $0 = y_p' = AY_p + F$. De donde tenemos que $AY_p = -F$, o:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Resolviendo este sistema encontramos que $Y_p = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$ es una solución particular.

Las constantes C_1 y C_2 se escogen para que se satisfaga $I = Y_p + Y_h$ con la condición inicial dada, esto es:

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} = I(0) = Y_p + Y_h(0) = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} + Y_h(0)$$

Esto requiere $Y_h(0) = Y(0) - Y_p = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Entonces resolviendo:

$$\begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

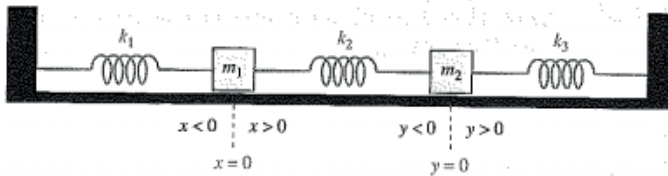
De donde concluimos que $C_1 = 0$ y $C_2 = 1/4$, por lo tanto, $Y_h(t) = y_2/4$. Entonces la solución es:

$$I(t) = Y_p + Y_h(t) = \begin{bmatrix} 5 - 5e^{-2t/5} \operatorname{sen}\left(\frac{4t}{5}\right)/4 \\ e^{-2t/5} \left[\cos\left(\frac{4t}{5}\right) + 3\operatorname{sen}\left(\frac{4t}{5}\right)/4 \right] \end{bmatrix}$$

Ejemplo 72. El sistema masa resorte acoplado:

Considere el sistema masa resorte acoplado constituido por dos masas unidas por tres resortes, como se muestran en la figura 105. Supongamos que no hay amortiguación y no hay fuerzas externas. Primero encuentre un sistema de segundo orden de ecuaciones diferenciales que gobiernan las posiciones de las masas m_1 y m_2 . Luego encuentre un sistema equivalente de ecuaciones diferenciales lineales.

Figura 104. Sistema masa resorte acoplado.



Fuente. Elaborada por el autor.

Solución:

Cada una de las masas tiene su propia posición de equilibrio donde todo el sistema está inmóvil. Si $x(t)$ y $y(t)$ denotan los desplazamientos de la masa m_1 y masa m_2 respectivamente, desde estas posiciones de equilibrio.

Primero examinemos las fuerzas sobre la masa m_1 . Hay dos resortes conectados a m_1 y el efecto de ambos puede ser tomado por separado. El primer resorte ejerce una fuerza de $F_1 = -k_1x$ sobre la masa m_1 donde k_1 es la constante del primer resorte. El segundo resorte ejerce una fuerza de $F_2 = k_2(y-x)$. Observe el signo. Si y es mayor que x (luego $y - x > 0$), entonces el segundo resorte es estirado y la fuerza es ejercida sobre la primera masa hacia la derecha. La segunda ley de Newton nos dice que:

$$m_1 \ddot{x} = F_1 + F_2 = -k_1x + k_2(y-x).$$

Hay también la acción de dos resortes sobre la segunda masa. El segundo resorte ejerce la fuerza $-F_2 = -k_2(y - x)$ (el opuesto de lo que el segundo resorte ejerce sobre la primera masa). El tercer resorte ejerce la fuerza $F_3 = -k_3y$. La ecuación diferencial resultante para y es:

$$m_2 y'' = -F_2 + F_3 = -k_2(y - x) - k_3y.$$

Podemos reescribir estas dos últimas ecuaciones como:

$$\begin{aligned} x'' &= \frac{-(k_2 + k_2)}{m_1} x + \frac{k_2}{m_1} y \\ y'' &= \frac{k_2}{m_2} x - \frac{(k_2 + k_3)}{m_2} y \end{aligned}$$

Este es un sistema de segundo orden con dos incógnitas. Para encontrar un sistema lineal equivalente, procedemos de la siguiente manera. Hacemos

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} \text{ con: } u_1(t) = x(t), u_2(t) = x'(t), u_3(t) = y(t), u_4(t) = y'(t)$$

Observe entonces que:

$$u_2' = x'' = \frac{-(k_1 + k_2)}{m_1} x + \frac{k_2}{m_1} y = \frac{-(k_1 + k_2)}{m_1} u_1 + \frac{k_2}{m_1} u_3$$

De manera similar, se tiene:

$$u_4' = y'' = \frac{k_2}{m_2} x - \frac{(k_2 + k_3)}{m_2} y = \frac{k_2}{m_2} u_1 - \frac{(k_2 + k_3)}{m_2} u_3$$

Juntamente con las ecuaciones, $u_1' = x' = u_2$ y $u_3' = y' = u_4$, obtenemos el siguiente sistema:

$$u_1' = u_2$$

$$\begin{aligned}
 u_2' &= \frac{-(k_1 + k_2)}{m_1} u_1 + \frac{k_2}{m_1} u_3 \\
 u_3' &= u_4 \\
 u_4' &= \frac{k_2}{m_2} u_1 - \frac{(k_2 + k_3)}{m_2} u_3
 \end{aligned}$$

Este es un sistema lineal autónomo de dimensión 4. El lado derecho lo podemos expresar como el producto de dos matrices, y entonces tenemos:

$$\begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \\ u_3' \\ u_4' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-(k_1 + k_2)}{m_1} & 0 & \frac{k_2}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2}{m_2} & 0 & -\frac{(k_2 + k_3)}{m_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}$$

Las condiciones iniciales para este sistema involucran la posición inicial y velocidad de ambas masas:

$$X(0) = a_1, x'(0) = b_1, y(0) = a_2, y'(0) = b_2$$

La condición inicial para el sistema de primer orden puede ser dado como la ecuación de un vector:

$$u(0) = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

Una de las aplicaciones más interesantes de los sistemas tiene que ver con el modelo de desenvolvimiento de especies que interactúan. Las especies pueden ser químicas, económicas, biológicas u otras. Vamos a considerar dos especies y hablaremos de ellas como especies biológicas. Vamos a dar dos ejemplos bien importantes de este tipo de comportamientos. Problemas de especies en competencias y problema depredador-presa.

Problema 73. Problema especies en competencias, un sistema no lineal:

Consideremos dos especies que están en competencia por el mismo alimento y refugio, los cuales son limitados. En esta situación, la suposición más simple sobre las tasas de crecimiento es:

$$u(x, y) = a - b y - c x$$

$$v(x, y) = q - r x - s y$$

Donde a, b, c, q, r, s , son constantes positivas, y a y q representan la razón del crecimiento, si no hay competencia. Aquí asumimos que las tasas de crecimiento de ambas especies disminuyen a medida que se hacen más grandes debido a recursos finitos para ambos.

Estas suposiciones conducen al sistema no lineal:

$$\frac{dx}{dt} = x(a - by - cx) = ax - bxy - cx^2$$

$$\frac{dy}{dt} = y(q - rx - sy) = qy - rxy - sy^2 \quad (6)$$

Analizar el sistema anterior.

Solución:

Observemos que, si la población de una de las especies es cero, digamos $y(t) = 0$, entonces la especie x satisface la ecuación logística ya analizada:

$$\frac{dx}{dt} = x(a - cx) = ax - cx^2$$

De forma similar si $x(t) = 0$, entonces la especie y , satisface la ecuación diferencial logística:

$$\frac{dy}{dt} = y(q - sy) = qy - sy^2$$

Entonces el x – eje y el y – eje contienen trayectorias. Las ecuaciones anteriores son ecuaciones diferenciales de primer orden no lineales a las cuales se le analizaron sus líneas de fase. Así la ecuación logística en x , tiene la propiedad de presentar una capacidad de carga para el medio ambiente $x = a/c$. Las poblaciones menores que a/c aumentan y acercan a/c , poblaciones mayores que a/c decrecen y se aproximan a a/c . Cuando hacemos el análisis del plano de fase para el sistema bidimensional, podemos obtener resultados similares.

Equilibrio. Los equilibrios para nuestras ecuaciones son dadas por:

$$x = 0, o a-by-cx = 0$$

Y:

$$y = 0, o q-sy-rx = 0$$

Resolviendo este sistema obtenemos los cuatro puntos de equilibrio que son:

$$(0, 0), (0, q/s), (a/c, 0), (\alpha, \beta)(\alpha, \beta)$$

Donde $(\alpha, \beta)(\alpha, \beta)$ son las soluciones del sistema:

$$cx + by = a$$

$$rx + sy = q$$

Si asumimos que $cs-br \neq 0$ $cs-br \neq 0$, tenemos que el punto (α, β) existe y es único. Entonces:

$$\alpha = \frac{as-bq}{cs-br}, \beta = \frac{cq-ar}{cs-br}$$

Observemos que el punto $(0, 0)$ corresponde a la población cero de ambas especies y $(0, q/s)$, $(a/c, 0)$ son la capacidad de carga

del medio ambiente para cada especie. Los otros cuatro puntos corresponden a poblaciones no negativas si ambos $\alpha \geq 0, y \beta \geq 0$.

Veamos una aplicación particular de este ejemplo 11.

Ejemplo 74:

Suponga que $b = q = r = s = 1, c = 3, y a = 2$ y, lleve a cabo el análisis.

Solución:

Entonces reemplazando en nuestro sistema (6), obtenemos el sistema no lineal para la competencia de especies:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y) = x(2-y-3x) = 2x-xy-3x^2$$

$$\frac{dy}{dt} = g(x, y) = y(1-x-y) = y-xy-y^2$$

Primero determinamos el equilibrio, para esto tenemos que:

$$x(2-y-3x) = 0$$

$$y(1-x-y) = 0$$

De la primera ecuación se tiene una posibilidad que es $x = 0$, en este caso se tiene en la segunda ecuación que $y = 0, y y = 1$, esto corresponde a los puntos de equilibrio $(0, 0)$ y $(0, 1)$. Si $2 - y - 3x = 0$, entonces por nuestra segunda ecuación se tiene que el equilibrio es $(2/3, 0)$, además para un cuarto punto de equilibrio se tiene que:

$$(2-y-3x) = 0$$

$$(1-x-y) = 0$$

y resolviéndolo nos da el punto de equilibrio $((1/2, 1/2))$. En resumen, los cuatro puntos de equilibrio son:

$$(0, 0), (0, 1), (2/3, 0), (1/2, 1/2)$$

Linealización: recordamos que cerca de cada equilibrio, la solución (y las trayectorias en el plano de la fase) puede ser aproximada por el sistema linealizado correspondiente con la siguiente matriz:

$$\frac{dz}{dt} = \mathbf{A}z$$

Calculamos la matriz general para este ejemplo:

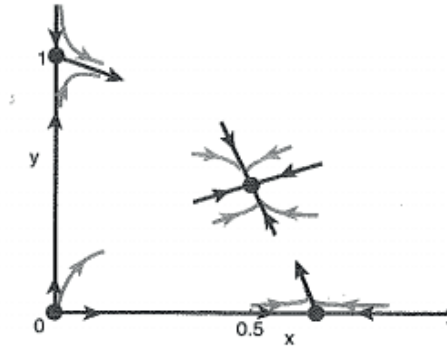
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-y-6x & -x \\ -y & 1-x-2y \end{bmatrix} \quad (7)$$

Recordamos que $z = \begin{bmatrix} x-r \\ y-s \end{bmatrix}$ representa el desplazamiento desde el equilibrio. La matriz por (7) se debe evaluar en cada punto de equilibrio. Cada uno de los cuatro puntos debe ser analizado se paralelamente.

Equilibrio en (0, 0). La matriz evaluada en (0, 0) es:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En este caso, el equilibrio es el origen (0,0), de modo que la serie de Taylor o Linealización corresponde simplemente a ignorar los términos no lineales $\frac{dx}{dt} = 2x, \frac{dy}{dt} = y$. Como la matriz es una matriz diagonal, los valores propios son justamente $\lambda = 2, 1$, entonces el origen es un nodo inestable. Para $\lambda = 1$, el vector propio correspondiente es $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, para $\lambda = 2$ es $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Observe que las trayectorias son tangentes al eje y cuando $t \rightarrow \infty$ y las trayectorias se alejan del origen a medida que aumenta el tiempo. En las especies en competencia la figura 105, nos muestra el diagrama del plano de fase en el primer cuadrante y cerca del origen.

Figura 105. Diagrama de fase en el primer cuadrante.

Fuente. Campbell y Haberman (2008).

Equilibrio en $(0, 1)$. La matriz (7) evaluada en $(0, 1)$ es:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Los valores propios λ y vectores propios (u,v) satisfacen la ecuación matricial:

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 \\ -1 & -1-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Los valores característicos son $\lambda = 1, -1$ determinados a partir de la condición del determinante $(\lambda + 1)(\lambda - 1) = 0$, entonces el punto de equilibrio es un punto de silla inestable de la ecuación (8). Para $\lambda = -1$, el vector propio es $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, para $\lambda = 1$ el vector propio es cualquier múltiplo de $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, ya que $-u - 2v = 0$, el cual está localizado en la figura 106.

Equilibrio en $(2/3, 0)$. La matriz evaluada en $(2/3, 0)$ es:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -2/3 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

Los valores propios λ y los vectores propios (u, v) satisfacen la ecuación matricial:

$$\begin{bmatrix} -2-\lambda & -2/3 \\ 0 & 1/3-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Los valores propios son $\lambda = -2, 1/3$ determinados a partir de la condición del determinante $(\lambda-1/3)(\lambda+2) = 0$. Entonces el punto $(2/3, 0)$ es también un punto de silla inestable. Para $\lambda = -2$ el vector propio es $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, para $\lambda = 1/3$, el vector propio es cualquier vector múltiplo de $\begin{bmatrix} -2 \\ 7 \end{bmatrix}$ ya que $-7/3 u - 2/3 v = 0$, este punto también se puede ver en la figura 106.

Equilibrio en $(1/1, 1/2)$. La matriz evaluada en $(1/2, 1/2)$ es:

$$A = \begin{bmatrix} -3/2 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

Los valores propios λ y los vectores propios (u, v) satisfacen la ecuación matricial:

$$\begin{bmatrix} -1/2-\lambda & -1/2 \\ -1/2 & 1/2-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Los valores propios pueden ser calculados a partir del determinante $\lambda^2 + 2\lambda + \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \lambda^2 + 2\lambda + \frac{1}{2} = 0$ obtener los valores $\lambda = -1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$, entonces el equilibrio $(1/2, 1/2)$ es un nodo estable. De (10) Para $\lambda = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ como $(-1 - \sqrt{2})u - v = 0$, el vector propio es cualquier vector múltiplo de $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 + \sqrt{2} \end{bmatrix}$, para $\lambda = -1 - \sqrt{2}$, el vector propio es cualquier vector múltiplo de $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 - \sqrt{2} \end{bmatrix}$ ya que $(-1 + \sqrt{2})u - v = 0$. Cuando $t \rightarrow +\infty$, esto es lo más importante, las trayectorias se aproximan al equilibrio, tangentes al vector $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 + \sqrt{2} \end{bmatrix}$ asociado con el valor propio $-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ tal como se muestra en la figura 104.

Plano de fase. En la figura 106 se muestra el plano de fase como la combinación de los comportamientos en los puntos de equilibrio.

Método de las nuclinares y Linealización

Para entender mejor el plano de fase, especialmente el comportamiento cerca de los puntos de equilibrio, aplicamos el método de las nuclinares para este ejemplo. Entonces también podemos considerar la Linealización. El método de nuclinares debe dar un gráfico muy rápidamente. Hay una gran cantidad de información en el método de nuclinares. Una imagen vale más que mil palabras. Consideramos el sistema específico de ecuaciones diferenciales, correspondiente al modelo especial de competencia de especies.

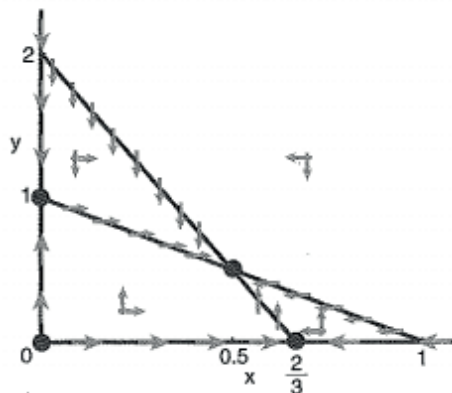
$$\frac{dx}{dt} = f(x, y) = x(2-y-3x) = 2x-xy-3x^2$$

$$\frac{dy}{dt} = g(x, y) = y(1-x-y) = y-xy-y^2$$

Como este es un modelo poblacional, solo consideramos el primer cuadrante y se incluye el eje x y el eje y . Muchos de los resultados que nos dan estas ecuaciones, se pueden ayudar teniendo en cuenta que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(1-x-y)}{x(2-y-3x)}$$

Figura 106. Gráfica de las nuclinares.



Fuente. Campbell y Haberman (2008).

Las nuclinares son curvas a lo largo de las cuales $\frac{dy}{dx} = 0$ o, $\frac{dy}{dx} = \infty$. Primero trazamos las nuclinares, las cuales en este caso incluyen los ejes. En el eje x $y = 0$ es una nuclinar y una solución de línea horizontal en el plano de fase a lo largo de la cual la pendiente es cero; y el eje y , $x = 0$, es una nuclinar y una solución vertical en la cual la pendiente es infinita. Ahora determinamos y graficamos. A lo largo de $x + y = 1$, la pendiente es cero, y reemplazamos por horizontales cortas a lo largo de la nuclinar. A lo largo de $3x + y = 2$, la pendiente es infinita, y reemplazamos por líneas verticales cortas a lo largo de toda la nuclinar, ver figura 105.

También determinamos los equilibrios intersectando las diferentes familias de nuclinares. En este ejemplo, observe cuidadosamente que hay cuatro equilibrios. Marcados en la figura con un punto $((0, 0), (0, 1), (2/3, 0), (1/2, 1/2))$.

En este ejemplo, estas nuclinares dividen el primer cuadrante en cuatro regiones. Debemos estar preparados para calcular si x e y están aumentando o disminuyendo en función del tiempo t en cada región. Primero analizamos a x . De nuestra primera ecuación en el sistema inicial, vemos que si $y > 2 - 3x$, entonces $dx/dt < 0$, y entonces x decrece como función del tiempo t , y podemos poner una flecha hacia la izquierda (\leftarrow) en las dos regiones. Además, ponemos flechas a la izquierda (\leftarrow) a lo largo de la parte apropiada de $y = 0$ ($y > 2/3$) y, $x + y = 1$. Ponemos flechas derechas (\rightarrow) en las otras regiones, y también a lo largo de las otras porciones de las nuclinares con $\frac{dy}{dx} = 0$.

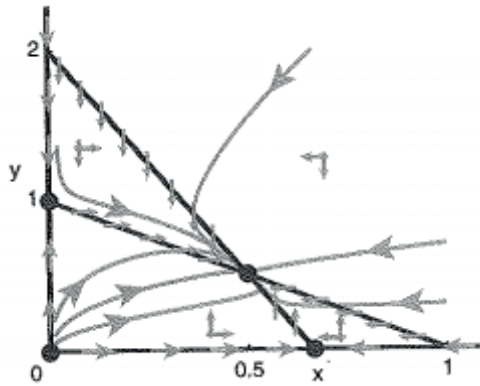
Para la dependencia temporal de y , usamos la segunda ecuación de nuestro sistema. En este caso, si $y > 1 - x$, entonces $\frac{dy}{dt} < 0$, y decrece como una función del tiempo t y podemos introducir flechas hacia abajo (\downarrow) en las regiones apropiadas. Además, las flechas descendentes (\downarrow) se colocan a lo largo de $x = 0$ para $y < 1$, y a lo largo de la parte apropiada de la nuclinar $2 = y + 3x$. Las flechas hacia arriba (\uparrow) están en cualquier parte.

El siguiente paso es mejorar las soluciones obtenidas usando el comportamiento del plano de fase cerca de cada equilibrio, usando lo que conocemos de la teoría de los sistemas lineales (nodos, sillas y espirales) y usando los vectores propios, los cuales tienen que ser calculados. Brevemente, por ejemplo, el equilibrio $(2/3, 0)$ es un punto de silla, la dirección estable es bastante claro que es eje $-x$. Pero la dirección inestable debe ser consistente con el flujo del noreste en la región cercana al equilibrio, determinado por el método de nuclinares, lo cual es confirmado por el vector propio específico previamente calculado $\begin{bmatrix} -2 \\ 7 \end{bmatrix}$. Para el otro punto de silla $(0, 1)$, la dirección del vector propio inestable fue $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, y también incluimos esa información. El equilibrio $(1/2, 1/2)$ es un nodo estable, y las direcciones de los dos vectores propios son consistentes con la dirección de las soluciones en cada cuadrante, cerca del equilibrio determinado por el método de las nuclinares. Uno debe notar que incluso con algunas calculadoras de mano pueden encontrarse los valores propios y los vectores propios de matrices 2×2 .

Las soluciones de los vectores propios que parecen ser rectas cerca del equilibrio se curvan (como se muestra en la figura 105) para ser coherente con la información aprendida sobre el campo de dirección a partir del método de las nuclinares. Incluimos trayectorias que son la continuación de los vectores propios en cada equilibrio.

Finalmente, dibujamos algunas soluciones representativas en el plano de fase, asegurándose de que son consistentes con el plano de fase lineal y con el campo de dirección determinado por el método de las nuclinares. El resultado se muestra en la figura 107.

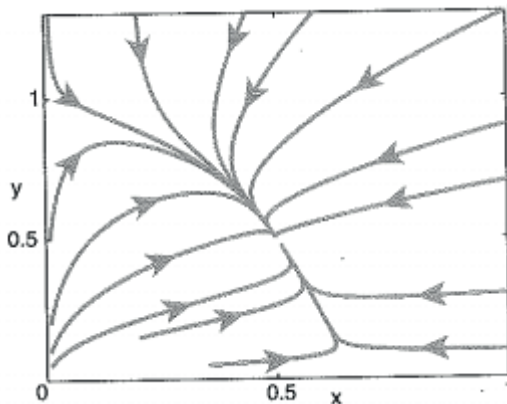
Figura 107. Plano de fase con las nuclinales.



Fuente. Camphell y Haberman (2008).

El plano de fase. Podemos obtener trayectorias (utilizando software) para el modelo de especies competidoras, que representamos en la figura 107. En dicha figura hemos combinado los planos de fase en el vecindario de cada uno de los cuatro equilibrios y bosquejado el diagrama de plano de fase en el primer cuadrante para el sistema dado.

Figura 108. Algunas trayectorias en el plano de fase.



Fuente. Camphell y Haberman (2008).

Este modelo específico de competencias de especies tiene la propiedad de que la población cero, así como las dos capacidades de carga de una sola especie $(0, 1)$ y $(2/3, 0)$ son estables. Solo la población de equilibrio en competencia $(1/2, 1/2)$ es estable. Además, desde el plano de fase vemos que casi todas las condiciones iniciales se aproximan a esta población de equilibrio competitiva estable $(1/2, 1/2)$. Este modelo va en contra de la teoría del nicho, que dice que, dadas dos especies esencialmente similares, una eventualmente sustituirá a la otra. Otros modelos de especies competidoras se consideran en los ejercicios.

Modelo de población depredador-presa

Supongamos que tenemos unas especies denominadas **presas** x (por ejemplo, conejos) y que existe otra especie denominada **depredador** y (zorros). Si no existen depredadores, asumimos que las presas tienen suficiente fuente de alimentos. Por otro lado, si no hay presa, suponemos que los depredadores morirían. En esta situación, la hipótesis más fácil para la tasa de crecimiento de las especies estaría dada por:

$$u(x, y) = a - by - cx$$

$$v(x, y) = -q + rx - sy$$

Donde a, b, c, q, r, s son constantes positivas y, a y q representan la razón de crecimiento si no existiera competición. Aquí asumimos que las tasas de crecimiento de ambas especies disminuyen a medida que las dos especies se hacen más grandes debido a recursos finitos para ambos.

Estos supuestos conducen al sistema no lineal:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x(a-by-cx) = ax-bxy-cx^2 \\ \frac{dy}{dt} &= y(q-rx-sy) = qy-rxy-sy^2\end{aligned}\quad (11)$$

Observe que si la población de una especie es cero, digamos $y(t) = 0$, entonces la especie $x(t)$ satisface:

$$\frac{dx}{dt} = x(a-cx) = ax-cx^2 = ax\left(1-\frac{c}{a}x\right)$$

que no es otra cosa que la **ecuación logística**.

De forma similar si $x(t) = 0$ entonces la especie $y(t)$ satisface la ecuación logística:

$$\frac{dy}{dt} = y(-q-sy) = -qy-sy^2 = -qy\left(1+\frac{s}{q}y\right)$$

Estas líneas de fase unidimensionales corresponderán a trayectorias en el plano de fase a lo largo de los ejes x y y .

Equilibrio: el equilibrio de nuestro sistema está dado por:

$$x = 0, \text{ o } a - by - cx = 0$$

Y:

$$y = 0, \text{ o } -q + rx - sy = 0$$

De modo que hay cuatro equilibrios:

$$(0, 0), (0, -q/s), (a/c, 0), (\alpha, \beta).$$

Donde (α, β) es la solución de:

$$\begin{aligned} cx + by &= a \\ rx - sy &= q \end{aligned}$$

Luego:

$$\alpha = \frac{as+bq}{cs+br}, \beta = \frac{-cq+ar}{cs+br}$$

Observamos que el valor $-q/s$ es no físicamente posible debido a que es negativo y el valor de y no puede ser negativo. Los valores que son ciertamente significativas son $(0,0)$, la población cero de ambas especies, y $(a/c, 0)$ la capacidad de carga de la presa. El otro equilibrio corresponde a poblaciones no negativas si $\beta \geq 0$ $\beta \geq 0$, ya que se garantiza que $\alpha \geq 0$ $\alpha \geq 0$.

Ejemplo 75. Modelo depredador-presa:

Suponga que $b = q = r = s = 1$, $c = 2$ y $a = 3$, en el sistema dado por (11) que es un sistema no lineal depredador-presa, es decir:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, y) = x(3-y-2x) = 3x-xy-2x^2 \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y) = y(-1+x-y) = -y+xy-y^2 \end{aligned} \quad (12)$$

Analizar el sistema (12).

Solución:

Primero calculamos los puntos de equilibrio del sistema:

$$x(3-y-2x) = 0$$

$$y(-1+x-y) = 0$$

De la primera ecuación, se tiene una posibilidad $x = 0$, y en este caso en la segunda ecuación nos da $y = 0$ y $y = -1$. Si $3 - y - 2x = 0$,

entonces con la segunda ecuación nos da el punto de equilibrio $(3/2, 0)$, así como un cuarto equilibrio que satisface:

$$(3-y-2x) = 0$$

$$(-1 + x-y) = 0$$

El cual al ser resuelto nos da el punto $(4/3, 1/3)$. En resumen, los puntos de equilibrio son:

$$(0, 0), (0, -1), (3/2, 0), (4/3, 1/3)$$

El punto $(0, -1)$ no es físicamente posible y no lo usaremos.

Linealización: la solución y el plano de fase, cerca de cada punto de equilibrio pueden ser aproximados por el sistema linealizado de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dZ}{dt} = AZ$$

Para nuestro ejemplo, la matriz es:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-y-4x & -x \\ y & -1 \pm 2y \end{bmatrix}$$

Recordemos que $Z = \begin{bmatrix} x-r \\ y-s \end{bmatrix}$ es el desplazamiento de los equilibrios. La matriz puede ser evaluada en cada punto de equilibrio. Cada punto de equilibrio puede ser analizado separadamente.

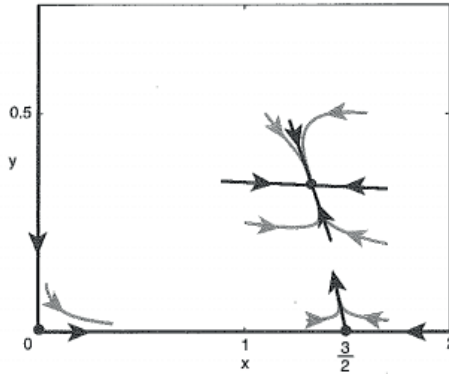
Equilibrio: en $(0, 0)$. La matriz evaluada en $(0, 0)$ es:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Como la matriz es diagonal, los valores propios son justamente $\lambda = 3, -1$. Entonces, el origen es un punto de silla inestable. Un punto de

silla tiene direcciones de estabilidad e inestabilidad, de acuerdo con los vectores propios. De los problemas en una dimensión, se sabe qué y decrece en el tiempo (\downarrow), y x crece (\uparrow) cerca del origen, ver figura 109.

Figura 109. Plano de fase en los puntos de equilibrio.



Fuente. Campbell y Haberman (2008).

Equilibrio: en $(3/2, 0)$. La matriz evaluada en $(3/2, 0)$ es:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -3/2 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix}$$

Los valores propios λ y los vectores propios (u, v) satisfacen el sistema lineal:

$$\begin{bmatrix} -3-\lambda & -3/2 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Los valores propios son $\lambda = -3, 1/2$, del valor del determinante $(\lambda - \frac{1}{2})(\lambda + 3) = 0$. Como los valores propios tienen diferente signo, el equilibrio $(2/3, 0)$ es también un punto de silla inestable. A partir de la línea de fase en una dimensión, la dirección estable para $\lambda = -3$ es x . El vector que da la dirección para la dirección inestable correspondiente a $\lambda = \frac{1}{2}$ es $\begin{bmatrix} -3 \\ 7 \end{bmatrix}$ que surge de la ecuación $-7u - 3v = 0$.

Equilibrio: en $(4/3, 1/3)$. La matriz evaluada en $(4/3, 1/3)$ es:

$$A = \begin{bmatrix} -8/3 & -4/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{bmatrix}$$

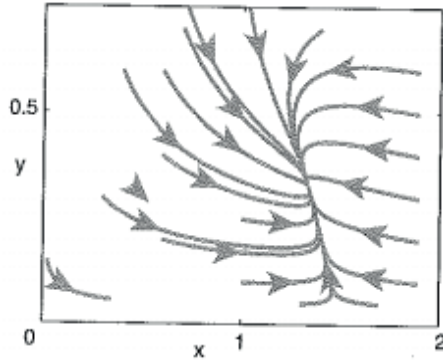
Los valores propios λ y vectores propios (u, v) satisfacen el sistema lineal:

$$\begin{bmatrix} -8/3-\lambda & -4/3 \\ 1/3 & -\frac{1}{3}-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De la condición del determinante, los valores propios satisfacen $\lambda^2 + 3\lambda + \frac{8}{9} + \frac{4}{9} = \lambda^2 + 3\lambda + \frac{4}{3} = 0$. Los valores propios son $\lambda = -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{11}{3}}$, luego $\lambda_1 \approx 0.54, \lambda_2 \approx -2.45$. Luego el punto de equilibrio $(4/3, 1/3)$ es un nodo estable. Para $\lambda_1 \approx 0.54$, el correspondiente vector propio es $\begin{bmatrix} -0.62 \\ 1 \end{bmatrix}$, de forma similar para $\lambda_2 \approx -2.45$ el vector propio es $\begin{bmatrix} -6.35 \\ 1 \end{bmatrix}$. Cuando $t \rightarrow +\infty$, las soluciones tienden al nodo estable en la dirección $\begin{bmatrix} -6.35 \\ 1 \end{bmatrix}$. Esto también se puede ver en la gráfica 103.

El plano de fase. En la figura 110, se tiene graficado el plano de fase con base en la Linealización y el campo de direcciones. Notemos que el equilibrio $(2/3, 0)$ es un punto de silla, y hemos incluido la trayectoria que comienza en la dirección de la dirección inestable (vector propio) de ese punto de silla. Vemos desde el plano de fases que la mayoría de las condiciones iniciales se aproximan al equilibrio, que es un nodo estable. Nuestra comprensión del plano de fase y el campo de dirección se puede mejorar usando el método de nuclinares (como hicimos con el ejemplo de las especies en competencias). En la figura 109 se muestra un plano de fase para este modelo dibujado, utilizando una computadora.

Figura 110. Plano de fase para el modelo dado.



Fuente. Campbell y Haberman (2008).

10.25 Ejercicios

Problemas de sistemas lineales homogéneos

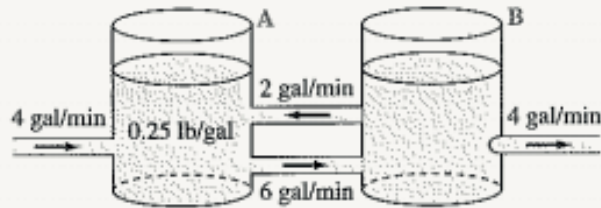
1. Cadena de desintegración radioactivo. El isótopo radioactivo del yodo, I-135, se desintegra en el isótopo radioactivo Xe-135 del xenón; esto a su vez se descompone en otro producto (estable). Las semividas de yodo y xenón son de 6,7 horas y 9,2 horas, respectivamente.

a. Escriba un sistema de ecuaciones diferenciales que describa el aumento de I - 135 y Xe - 135 presente en un tiempo t .

b. Obtener la solución general del sistema lineal encontrado en la parte a.

2. Mezcla de comportamiento múltiple I. Considere dos tanques grandes, como se muestran en la figura 111. El tanque A está inicialmente lleno con 100 galones de agua los cuales tienen disueltos 25 libras de sal. El tanque B está inicialmente lleno con 100 galones de agua pura. Agua pura está entrando al tanque A, a una razón constantes de 4 gal/min. La solución bien mezclada del tanque A pasa al tanque B a una razón de 6 gal/min, y la solución del tanque B bien mezclada pasa al tanque A, a una razón de 2 gal/min. La solución en el tanque también sale del tanque a una razón de 4 gal/min.

Figura 111. Problemas de mezcla múltiple.



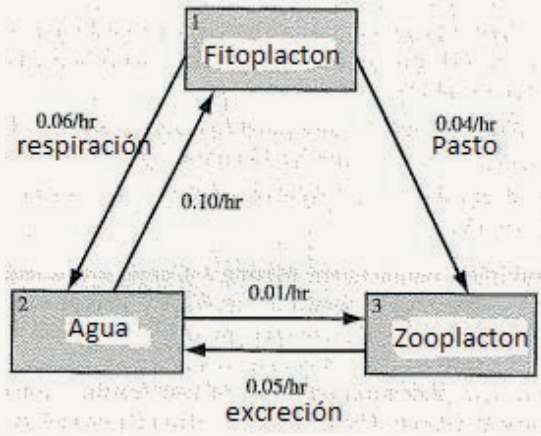
Fuente. Elaborada por el autor.

- Encuentre el aumento de la sal en cada tanque en el tiempo t .
- Trace las gráficas para mostrar cómo el nivel de sal en cada tanque está cambiando en el tiempo t .
- ¿La cantidad de sal en el tanque B siempre excede a la del tanque A?
- ¿Cómo es el comportamiento a largo tiempo en cada tanque?

3. Mezcla de comportamiento múltiple II. Repita el problema 1, pero cambie el volumen inicial en el tanque A a 150 galones.

4. Modelo del compartimiento acuático: Un modelo simple de tres compartimientos que contienen alimentos en una cadena alimenticia es estudiada por M. R. Cullen. Por ejemplo, la constante $a_{31} = 0.04$ junto con el compartimiento de conexión de flechas 1 (fitoplancton) al compartimiento 3 (zooplancton), significa que en cualquier momento los nutrientes pasan del compartimiento del fitoplancton al compartimiento del zooplancton a $0,04 \times 1$ por hora. Hallar el sistema lineal $\vec{X}' = A\vec{X}$ que describe la cantidad de nutrientes en cada compartimiento (figura 112).

Figura 112. Modelo de compartimento acuático.

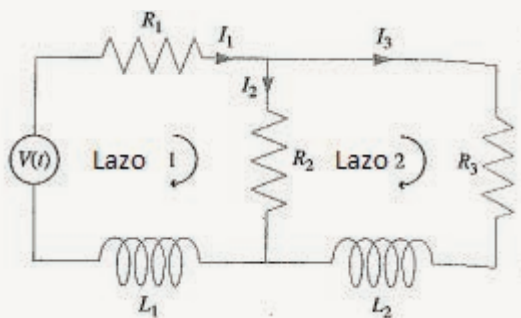


Fuente. Elaborada por el autor.

Circuitos eléctricos. Use las leyes de Kirchoff para determinar un sistema lineal homogéneo 2×2 que modele el circuito en los problemas 5 y 6 (figura 113).

Determine la solución general para las corrientes I_1 , I_2 y I_3 si $R_1 = R_2 = R_3 = 4$ ohmios y $L_1 = L_2 = L_3 = 2$ henrios.

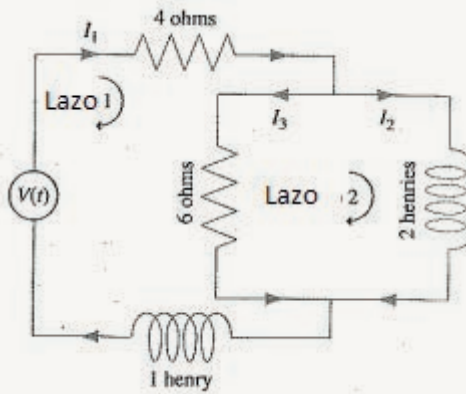
Figura 113. Circuito eléctrico.



Fuente. Elaborada por el autor.

- Encuentre la solución general para las corrientes I_1 , I_2 y I_3 si $R_1 = 4$ ohms, $R_3 = 6$ ohms, $L_1 = 1$ Henry, $L_2 = 2$ Henrys.

Figura 114. Gráfica del Circuito eléctrico



Fuente. Elaborada por el autor.

6. **(Sistema masa resorte acoplado).** Suponga que dos masas iguales $m_1 = m_2 = m$ están unidas a tres resortes, cada uno tiene la misma constante $k_1 = k_2 = k$, en donde los dos resortes de afuera están atados a la pared. Las masas se deslizan en línea recta sobre la superficie del piso sin fricción. El sistema se pone en movimiento sujetando la masa de la izquierda en su posición de equilibrio mientras al mismo tiempo se tira de la derecha de su equilibrio a una distancia d (tal como se muestra en la figura 115).

Notamos por $x(t)$ y $y(t)$ las posiciones respectivamente de las masas m_1 y m_2 de sus respectivos puntos de equilibrio. Entonces $(y - x)$ es el estiramiento o compresión del resorte de la mitad. Dado que las únicas fuerzas que actúan sobre las masas son las fuerzas debidas a los resortes de conexión, la ley de Hooke dice que:

- La fuerza sobre m_1 debido al resorte izquierdo es $= -k_1 x$.
- La fuerza sobre m_1 debido al resorte de la mitad es $= -k_2 (y - x)$.

- La fuerza sobre m_2 debida al resorte de la mitad es $= -k_2(y - x)$.
- La fuerza sobre m_2 debido al resorte de la derecha es $= -k_3y$.

Por lo tanto, tenemos el problema de valor inicial:

$$m_1 x'' = -k_1 x - k_2(y - x), x(0) = 0, x'(0) = 0;$$

$$m_2 y'' = -k_2(y - x) - k_3 y, y(0) = 2, y'(0) = 0.$$

Si hacemos $x_1 = x$, $x_2 = x'$, $x_3 = y$, y $x_4 = y'$, entonces podemos escribir las dos ecuaciones anteriores como un sistema 4×4 de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-k_1 + k_2}{m_1} & 0 & \frac{-k_2}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2}{m_2} & 0 & \frac{-(k_2 + k_3)}{m_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

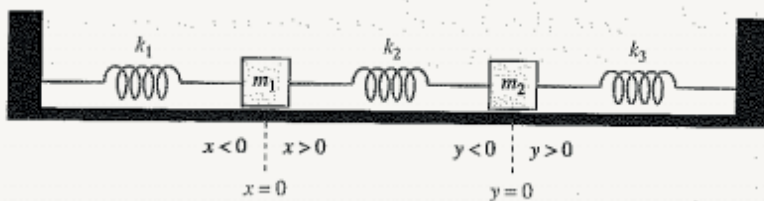
Sea $k_i = m_i = 1$, muestre cómo estas ecuaciones se pueden resolver usando valores y vectores propios para encontrar:

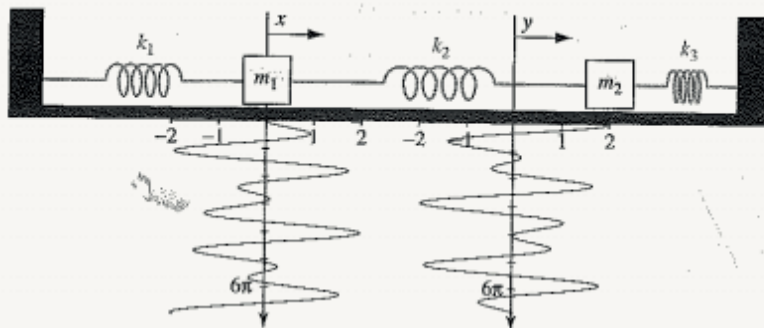
$$x(t) = \cos t - \cos \sqrt{3} t$$

$$y(t) = \cos t + \cos \sqrt{3} t$$

como se ilustra en la siguiente figura.

Figura 115. Gráfica del sistema masa resorte.





Fuente. Elaborada por el autor.

Para los problemas 8 y 9 use un computador para graficar el retrato de fase para el problema de valor inicial. Luego grafique los componentes $x_1(t)$ y $x_2(t)$ para cada problema con valor inicial como funciones de t . ¿Cómo se relacionan estos gráficos con la trayectoria correspondiente en el plano de fase?

$$8. \vec{x}' = A \vec{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} \vec{x} \quad \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$9. \vec{x}' = A \vec{x} = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} \vec{x} \quad \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

10. Las gráficas en la figura 116 son curvas solución de tres diferentes sistemas lineales de ecuaciones diferenciales.

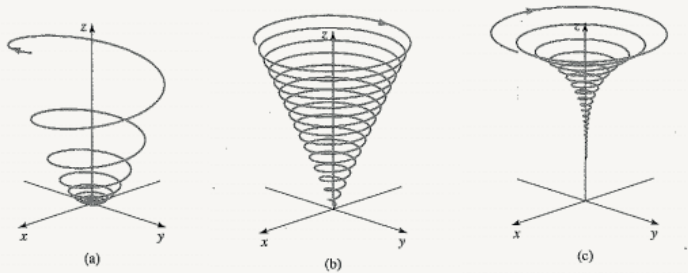
$$\vec{x}' = A\vec{x}$$

Donde:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

¿Qué se puede deducir de los valores propios (y vectores propios) que se aplicarán a las tres ecuaciones diferenciales?
 ¿qué se puede deducir de las diferencias en z' entre los tres casos?

Figura 116. Gráficas para el problema 10.



Fuente. Elaborada por el autor con el programa Derive.

10. Considere el modelo del ejemplo 12, de dos especies en competencias con $a = 2$, $b = c = 1$, $q = r = 6$, $s = 0$.

- Determine y clasifique todos los equilibrios (nodos, sillas, centro espiral, estable o inestable).
- Trace el retrato de fase usando el sistema lineal (no calcule los vectores propios).
- Trace el retrato de fase usando el método de las nuclinares.
- Mejore el retrato de fase usando los valores y vectores propios.
- Cheque el plano de fase usando un software.

11. Considere el modelo del ejemplo 12, de dos especies en competencias con $a = 3$, $b = 2$, $c = 1$, $q = 2$, $r = s = 1$.

- Determine y clasifique todos los equilibrios (nodos, sillas, centro espiral, estable e inestable).
- Trace el retrato de fase usando el sistema lineal (no calcule los vectores propios).
- Trace el retrato de fase usando el método de las nuclinares.

- d. Mejore el retrato de fase usando los valores y vectores propios.
 - e. Revise el plano de fase usando un software.
-

12. En el ejemplo 12, reduzca la tasa de crecimiento inherente de x cambiando el valor de a , a $3/2$. Aumente el efecto de la competencia en x cambiando b a 2 , e incremente las limitaciones de recursos sobre x cambiando c a 4 , de modo que $b = 2$, $c = 4$, $q = r = s = 1$, $a = 3/2$.

- a. Determine y clasifique todos los equilibrios (nodos, sillas, centros espirales, estables o inestables).
 - b. Trace el retrato de fase usando el sistema lineal. (no calcule los vectores propios).
 - c. Trace el retrato de fase usando las nuclinares. Explique en términos biológicos qué representa el método de las nuclinares.
 - d. Mejore el plano de fase los vectores propios si los valores propios son reales.
 - e. Revise el plano de fase usando un software.
-

13. En el ejemplo 12, si hay alimento y refugio suficientes, entonces se puede establecer $c = 0$, $S = 0$. Por ejemplo, considere $B = a/2$ y $Q = r = 1$.

- a. Determine y clasifique todos los equilibrios (nodos, sillas, centros espirales, estables o inestables).
- b. Trace el retrato de fase usando el sistema lineal (no calcule los vectores propios).
- c. Trace el retrato de fase usando las nuclinares. Explique en términos biológicos qué representa el método de las nuclinares.

- d. Mejore el plano de fase los vectores propios si los valores propios son reales.
 - e. Revise el plano de fase usando un software.
-

14. Considere el modelo depredador-presa (ejemplo 13) con $a = 3$, $b = c = 1$, $q = r = 1$, $s = 0$.

- a. Determine y clasifique todos los equilibrios (nodos, sillas, centros espirales, estables o inestables).
 - b. Trace el retrato de fase usando el sistema lineal (no calcule los vectores propios).
 - c. Trace el retrato de fase usando las nuclinares. Explique en términos biológicos qué representa el método de las nuclinares.
 - d. Mejore el plano de fase, los vectores propios si los valores propios son reales.
 - e. Revise el plano de fase usando un software.
-

15. Considere el modelo depredador-presa (ejemplo 13) con $a = 3$, $b = 1$, $c = 6$, $q = r = S = a$.

- a. Determine y clasifique todos los equilibrios (nodos, sillas, centros espirales, estables o inestables).
 - b. Trace el retrato de fase usando el sistema lineal. (No calcule los vectores propios).
 - c. Trace el retrato de fase usando las nuclinares.
 - d. Mejore el plano de fase, los vectores propios si los valores propios son reales.
 - e. Revise el plano de fase usando un software.
-

17. En el ejemplo 13, remueva la limitación para la población de presas, cambiando c a 0, también $a = 3$, $c = 0$, $q = r = s = b = 1$.

- a. Determine y clasifique todos los equilibrios (nodos, sillas, centros espirales, estables o inestables).
 - b. Trace el retrato de fase usando el sistema lineal (no calcule los vectores propios).
 - c. Trace el retrato de fase usando las nuclinares.
 - d. Mejore el plano de fase, los vectores propios si los valores propios son reales.
 - e. Revise el plano de fase usando un software.
-

17. En el ejemplo 13, remueva la limitación para la población de presas y depredadores por $c = s = 0$, también $a = 3$, y $q = r = b = 1$.

- a. Determine y clasifique todos los equilibrios (nodos, sillas, centros espirales, estables o inestables).
 - b. Trace el retrato de fase usando las nuclinares.
 - c. Muestre que las soluciones periódicas existen.
 - d. Revise el plano de fase usando un software.
-

18. En el ejemplo 13, aumente el efecto del depredador sobre las presas, aumentando b a 6 también hacer $a = 3$, $b = 6$, $c = 2$, $q = r = s = 1$.

- a. Determine y clasifique todos los equilibrios (nodos, sillas, centros espirales, estables o inestables).
 - b. Trace el retrato de fase usando el sistema lineal (incluyendo los vectores propios si los valores propios son reales).
 - c. Trace el retrato de fase usando las nuclinares.
 - d. Revise el plano de fase usando un software.
-

En los ejercicios 19 al 21, considere el modelo depredador-presa en el cual asumimos que existe alimentación ilimitada y refugio disponible, de modo que dejada a sí misma, la presa crecerá exponencialmente. Suponga que sin la presa el depredador se extinguirá lentamente (tal vez hay un suministro de alimentos alternativo, pero carece de los nutrientes adecuados). En lugar de un múltiplo constante de x y, utilice la siguiente función de captación más realista:

$$\frac{dx}{dt} = x \left(a - b \frac{y}{1+x} \right) = ax - b \frac{x}{1+x} y$$

$$\frac{dy}{dt} = y \left(-q + r \frac{x}{1+x} \right) = -qy + r \frac{x}{1+x} y$$

Obsérvese que de nuevo el eje x , y el eje y contienen trayectorias, y solo necesitamos considerar $x \geq 0, y \geq 0$.

19. Sea $a = b = 1, q = 2, r = 1$ en las fórmulas dadas.

- Determine y clasifique todos los equilibrios (nodos, sillars, centros espirales, estables o inestables).
 - Trace el retrato de fase utilizando el sistema lineal (no calcule los vectores propios).
 - Trace el retrato de fase usando las nuclinares.
 - Mejore el plano de fase usando los vectores y valores propios si son reales.
 - Trace el plano de fase usando un programa de computador.
-

20. Sea $a = b = 1, q = 0.5, r = 1$, en nuestras ecuaciones.

- Determine y clasifique todos los equilibrios (nodos, sillars, centros espirales, estables o inestables).
- Trace el retrato de fase utilizando el sistema lineal (no calcule los vectores propios).

- c. Trace el retrato de fase usando las nuclinares.
 - d. Mejore el plano de fase usando los vectores y valores propios si son reales.
 - e. Trace el plano de fase usando un programa de computador.
-

21. Sea $a = b = 1$, $q = 1$, $r = 2$ en nuestras ecuaciones.

- a. Determine y clasifique todos los equilibrios (nodos, sillas, centros espirales, estables o inestables).
 - b. Trace el retrato de fase utilizando el sistema lineal (no calcule los vectores propios).
 - c. Trace el retrato de fase usando las nuclinares.
 - d. Mejore el plano de fase usando los vectores y valores propios si son reales.
 - e. Trace el plano de fase usando un programa de computador.
-

10.26 Cantidades que se conservan

En la figura 117 vemos una porción de una curva solución, para el sistema planar:

$$x' = f(x, y)$$

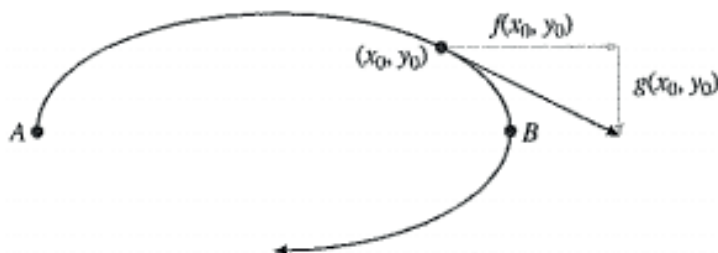
$$y' = g(x, y) \quad (13)$$

En el plano observe que entre los puntos A y B, la curva es la gráfica de y como función de x . ¿Podemos descubrir cuál es esa función de la ecuación diferencial?

En el punto (x_0, y_0) en la figura 116, tenemos dibujados el campo vectorial, mostrando sus componentes $f(x_0, y_0)$ y $g(x_0, y_0)$. Como el vector es tangente a la curva solución en (x_0, y_0) , la pendiente de la curva es igual a la pendiente de su vector tangente. Asumiendo que la pendiente es finita, tenemos:

Figura 117. Porción de una curva solución.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x,y)}{f(x,y)} \quad (14)$$



Fuente. Elaborada por el autor con el programa Derive.

Podemos también encontrar este resultado usando la regla de la cadena y la igualdad anterior¹¹:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \bigg/ \frac{dx}{dt} = \frac{g(x,y)}{f(x,y)} \quad (15)$$

Entonces el sistema (13) lleva a una ecuación diferencial lineal de primer orden (14) para y como función de x . Algunas veces esta ecuación puede ser resuelta, quizás solo con una relación implícita entre x y y . Incluso esto puede proporcionar información muy útil. Miremos un ejemplo elemental.

Ejemplo 76. La energía cinética:

Usando la velocidad $v = y'$, la ecuación $m y'' + k y = 0$ para el sistema masa - resorte sin amortiguar, lo podemos escribir como el sistema:

$$\begin{aligned} y' &= v \\ v' &= -\frac{k}{m}y \end{aligned}$$

Encontrar la relación entre las componentes y , y' y v de la solución.

Solución:

De (14) tenemos que:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{-ky}{mv}$$

Mediante separación de variables y resolviendo, se tiene la relación implícita:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}ky^2 = C \quad (16)$$

¹¹ En la derivación siguiente, usamos el hecho de que $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dt}}$ una consecuencia del teorema de la función inversa.

Donde C es una constante arbitraria. Esta ecuación, mejor la podemos escribir de la siguiente forma:

$$\frac{1}{2}m(v(t))^2 + \frac{1}{2}k(y(t))^2 = C$$

Para enfatizar, que esta igualdad es verdadera para todo t .

La ecuación (16) tiene un significado físico. El término:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

es la energía cinética del sistema masa resorte. Mientras que:

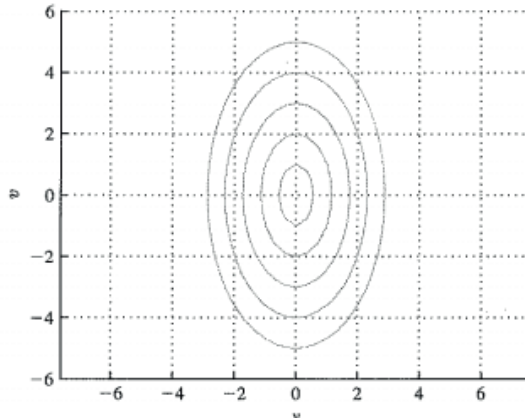
$$U = \frac{1}{2}ky^2 = \int_0^y k \eta \, d\eta$$

es la energía potencial. Entonces la igualdad:

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}ky^2$$

Es la energía total del sistema. La ecuación (16) dice que la energía total del sistema masa resorte es conservado durante su movimiento.

Entonces, hemos mostrado que el desplazamiento $y(t)$ de un oscilador armónico sin amortiguamiento satisface la relación (16). El conjunto de pares (y, v) que satisface (16) forman una elipse centrada en el origen. Ejemplos para diferentes valores de la constante C son mostrados en la figura 118, en donde se usan los parámetros $m = 1$ y $k = 3$. Las curvas son correspondientes a $C = \frac{1}{2}, 2, 9/2, \text{ y } 25/2$.

Figura 118. Gráficas solución para diferentes valores de C .

Fuente. Elaborada por el autor con el programa Derive.

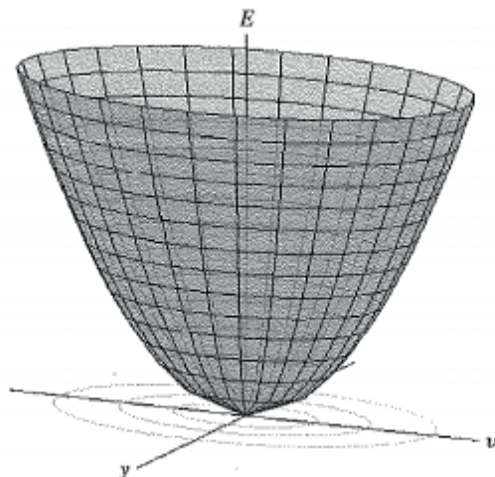
En la figura 119 mostramos la gráfica de la energía total $E(y, v) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}ky^2$, como una función de y, v . Esta es una superficie en tres dimensiones. Sobre el plano (y, v) y debajo de la superficie, algunas elipses definidas por $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}ky^2 = C$, son mostradas para algunos valores de la constante C . Estas curvas incluyen estos pares de puntos (y, v) donde la superficie está a la misma altura $E(y, v) = C$, por encima del plano (y, v) . Por esta razón tales curvas son llamadas **curvas de nivel** de la función E . Entonces, las curvas solución para las vibraciones del resorte amortiguado, son las curvas de nivel de la energía. Esto se puede probar directamente, solamente es necesario mostrar que:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}m(v(t))^2 + \frac{1}{2}k(y(t))^2 \right) = 0$$

Esto se puede ver, usando (16) como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}ky^2 \right) &= mvv' + kyy' \\ &= mv \left(-\frac{k}{m}y \right) + kyv = 0 \end{aligned}$$

Figura 119. Gráficas de las curvas de nivel.



Fuente. Elaborada por el autor con el programa Derive.

Una cantidad, como la energía $E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}ky^2$ para el muelle vibrador amortiguado, que es constante a lo largo de la curva solución es llamada **cantidad de conservación** para el sistema. La cantidad de conservación puede ser encontrada algunas veces resolviendo la ecuación (14), como hicimos para la vibración de un resorte.

El efecto del amortiguamiento

En la vibración de un resorte amortiguado, el amortiguamiento disminuye lentamente la energía total en el sistema.

Ejemplo 17:

Considere el sistema para la vibración de un resorte amortiguado:

$$\begin{aligned} y' &= v \\ v' &= -\frac{k}{m}y - \frac{\mu}{m}v \end{aligned} \quad (17)$$

Muestre que la energía total $E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}ky^2$, decrece lo largo de una curva solución.

Solución:

Este hecho lo podemos mostrar, como hicimos anteriormente. A lo largo de una curva solución $t \rightarrow (y(t), v(t))$, se convierte en la función de t :

$$E(t) = \frac{1}{2}m(v(t))^2 + \frac{1}{2}k(y(t))^2$$

Vamos a demostrar que es decreciente mediante la derivada.

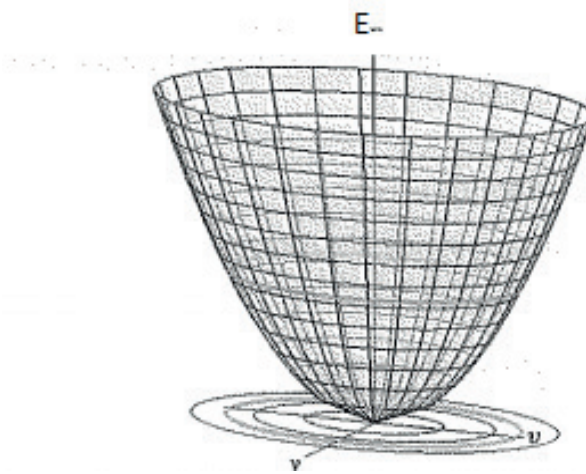
$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}ky^2 \right) \\ &= m v v' + k y y' \\ &= m v \left(-\frac{k}{m}y - \frac{\mu}{m}v \right) + kyv \\ &= -\mu v^2 \leq 0 \end{aligned}$$

Si la constante de amortiguamiento es constante $\mu > 0$, la derivada es negativa, excepto en donde $v = 0$. Sin embargo, cuando esto es cierto vemos de (17) que $v' \neq 0$ a menos que $y = 0$ también. Esto significa que la curva de solución pasa por los puntos donde $E' = 0$ y entonces E continúa disminuyendo, a menos que tengamos $v = y = 0$ en este punto donde $E = 0$ tiene su valor mínimo.

Es interesante ver lo que esto significa en términos de la superficie E que se muestra en la figura 120. Para ver claramente la relación, ilumina ver sobre la superficie una curva. Si $(y(t), v(t))$ es una solución, nosotros consideramos la curva $t \rightarrow (y(t), v(t), E(t))$. Esta curva está en la gráfica de E , como se muestra en las figuras 120 y

121. Las curvas resaltadas en la superficie son las levantadas de las correspondientes curvas de solución resaltadas en el plano (y, v) por debajo de la superficie.

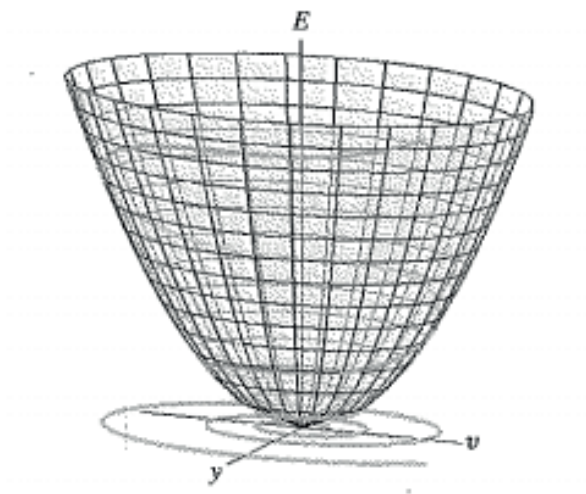
Figura 120. Superficie de nivel con una curva solución.



Fuente. Elaborada por el autor con el programa Derive.

Si no hay amortiguamiento, entonces $\mu = 0$, luego de acuerdo con (17) $E(t)$ no está cambiando. Por lo tanto, la curva levantada se mantiene al mismo nivel en la superficie. Este caso se muestra en la figura 116. Por otro lado, si $u > 0$, hay amortiguación, y entonces $E(t)$ está disminuyendo. Consecuentemente, la curva levantada se mueve siempre más abajo en la superficie, la gráfica de $E(y, v) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}ky^2$. Este hecho está ilustrado en la siguiente figura.

Figura 121. Gráfica de la superficie $E(t)$.



Fuente. Elaborada por el autor con el programa Derive.

Bajo estas circunstancias, las curvas deben aproximarse al punto más bajo de las superficies, el mínimo de $E(y, v) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}ky^2$, que ocurre en el origen.

10.27 Ejercicios

Use la técnica del ejercicio 14, utilizando la ecuación (14) para encontrar la cantidad que se conserva para cada uno de los sistemas 1 al 10. Compruebe que su solución se conserva realmente en trayectorias de solución del sistema dado.

1. $y' = v$
 $v' = -2y$

2. $y' = v$
 $v' = 3-y$

3. $y' = v$
 $v' = -y + y^2$

4. $y' = v$
 $v' = -2y-y^2$

5. $y' = v$
 $v' = y-y^3$

6. $y' = v$
 $v' = -2y-y^3$

7. $x' = e^y$
 $y' = e^x$

8. $x' = x(1-y)$
 $y' = y(-1 + 2x)$

9. $x' = y$
 $y' = -\sin x$

10. $x' = \frac{1}{1+y^2}$
 $y' = e^x$

Para cada uno de los ejercicios del 11 al 20 realizar cada una de las siguientes tareas:

- I. Use la técnica del ejemplo 14 para encontrar la cantidad de conservación.
 - II. Utilice su solucionario numérico para dibujar el campo vectorial asociado con cada sistema, luego superponga curvas de nivel de la cantidad de conservación en el campo vectorial.
-

11. El sistema del ejercicio 1.

12. El sistema del ejercicio 2.

13. El sistema del ejercicio 3.

14. El sistema del ejercicio 4.

15. El sistema del ejercicio 5.

16. El sistema del ejercicio 6.

17. El sistema del ejercicio 7.

18. El sistema del ejercicio 8.

19. El sistema del ejercicio 9.

20. El sistema del ejercicio 10.

Para los ejercicios 21 al 24 use la técnica del ejercicio 15.

21. Sea $E(y, v)$ la cantidad de conservación para el sistema en el ejercicio 1, calcule E' a lo largo de las curvas solución para el sistema:

$$\begin{aligned}y' &= y \\v' &= -v-2y\end{aligned}$$

22. Sea $E(y, v)$ la cantidad de conservación para el sistema en el ejercicio 2, calcule E' a lo largo de las curvas solución para el sistema:

$$\begin{aligned}y' &= v \\v' &= 3-v-y\end{aligned}$$

23. Sea $E(y, v)$ la cantidad de conservación para el sistema en el ejercicio 6, calcule E' a lo largo de las curvas solución para el sistema:

$$\begin{aligned}y' &= v \\v' &= -v - 2y + y^3\end{aligned}$$

24. Sea $E(y, v)$ la cantidad de conservación para el sistema en el ejercicio 9, calcule E' a lo largo de las curvas solución para el sistema:

$$\begin{aligned}x' &= y \\y' &= -v - \sin x\end{aligned}$$

25. Considere el sistema:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= -x + x^3\end{aligned}$$

- Muestre que la cantidad $H(x, y) = x^2 - \frac{1}{2}x^4 + y^2$ es conservativa sobre las trayectorias de solución del sistema.
 - La curva de nivel $H(x, y) = \frac{1}{2}$ es la unión de seis distintas soluciones del sistema dado. Grafique La curva de nivel $H(x, y) = \frac{1}{2}$. Entonces use algún método numérico de solución para superponer las gráficas de las seis soluciones contenidas en la curva de nivel.
-

10.28 Mecánica no lineal

Podemos generalizar fácilmente el análisis del problema del resorte de la sección previa para el ejemplo no lineal de mecánico que es modelado por la ecuación:

$$y'' = f(y, y') \quad (18)$$

Si y es el desplazamiento de una partícula de masa m , entonces por la segunda ley de Newton:

$$m y'' = F$$

Donde F es la fuerza. Asumimos que la fuerza depende solo de y y y' , tenemos:

$$y'' = F(y, y')/m$$

Por lo que tenemos una ecuación del tipo (18) con $f = F/m$. Al escribir nuestra ecuación en la forma de (18), estamos permitiendo situaciones más generales. Por ejemplo, y podría ser el desplazamiento angular de un péndulo.

Ahora estamos familiarizados con el hecho si introducimos la velocidad $v = y'$ como una incógnita, entonces la ecuación de segundo orden en (18) es equivalente al sistema de ecuaciones lineales de primer orden:

$$\begin{aligned} y' &= v \\ v' &= f(y, v) \end{aligned} \quad (19)$$

Sistemas conservativos

En el caso en que la fuerza no depende de la velocidad, el sistema en (19) se simplifica a:

$$\begin{aligned} y' &= v \\ v' &= f(y) \end{aligned} \quad (20)$$

Podemos encontrar la cantidad conservativa para este sistema usando el método de la sección anterior. De (20) y (14), tenemos la ecuación:

$$\frac{dv}{dy} = \frac{f(y)}{v}$$

Separando variable y resolviendo esta ecuación, tenemos:

$$\frac{1}{2}v^2 = \int f(y)dy + C \quad (21)$$

Los términos de esta ecuación (21) tienen un significado físico. Ponemos a $K(v) = \frac{1}{2}v^2$, como la energía cinética y a $U(y) = -\int f(y)dy$ como la energía potencial. Por lo tanto, (21) nos dice que la energía total del sistema:

$$E(y, v) = K(v) + U(y) = \frac{1}{2}v^2 - \int f(y)dy$$

es conservada durante el movimiento del sistema. Sistemas como el (20), donde la fuerza depende solo del desplazamiento, son llamados **sistemas conservativos**, porque la energía total es conservada.

Como vimos en la sección anterior, la vibración de un resorte no amortiguado es un sistema conservativo, cuando está presente el amortiguamiento, la energía se disipa y el sistema no es conservativo.

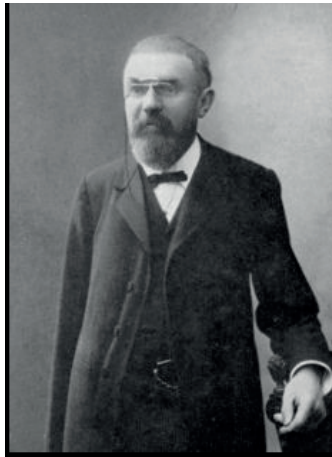
El hecho de que la energía es conservada, significa que toda curva solución está contenida en una curva de nivel de la energía. Esto significa que las curvas solución en el plano de fase están definidas implícitamente por la ecuación (21), que podemos escribir en la forma ligeramente modificada:

$$\frac{1}{2}v^2 + U(y) = E(22)$$

Donde E es una constante.

Las curvas en el plano de fase para un sistema conservativo

Figura 122. Henry Poincaré (1854-1912).



Fuente. Enciclopedia Británica.(Biblioteca virtual de la Universidad EAN).

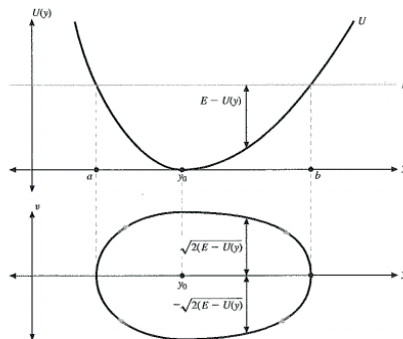
Poincaré nació en la ciudad de Nancy, Francia, el 29 de abril de 1854, y murió en París el 17 de julio de 1912.

Poincaré hizo el primer ataque sistemático y general a la teoría combinatoria de las figuras geométricas, suele ser considerado como el fundador de la topología. Fue profesor de matemáticas

en la universidad de París, y se le conoce como el matemático más importante del último cuarto del siglo XIX y primeros del siglo XX, así como el último hombre que tuvo un conocimiento universal de la matemática y de sus aplicaciones. Escribió un gran número de artículos de divulgación, cubriendo casi todas las áreas básicas de la matemática y las más importantes de la física teórica, del electromagnetismo, dinámica, mecánica de fluidos y astronomía.

En una dimensión, los sistemas físicos conservativos como (19) pueden ser entendidos mediante el análisis del potencial $U(y)$. Hay varias consideraciones importantes que nos permiten hacer esto. Durante este proceso, nos referiremos frecuentemente a la figura 123. La gráfica superior en dicha figura es de un potencial de energía U ; el gráfico inferior es la información del plano de fase que está implícita por la forma de la gráfica de U .

Figura 123. Gráfica en el plano de fase.



Fuente. Elaborada por el autor con el programa Derive.

Las siguientes consideraciones nos permiten analizar la física:

El punto de equilibrio de (19) está donde $v = 0$ y $f(y) = -U'(y) = 0$. Es decir, ellos están completamente determinados por los puntos críticos de U . (Recordemos que los puntos críticos son donde $U'(y) = 0$).

Las curvas solución en el plano de fase están definidas implícitamente por la ecuación (22). Cada curva solución tiene dos ramas definidas por:

$$v = \pm \sqrt{2(E-U(y))} \quad (23)$$

Como las dos ramas son una opuesta de la otra, las curvas solución en el plano de fase son simétricas respecto al eje y .

El teorema de la función implícita del cálculo multivariado nos dice que las curvas de solución serán lisas excepto posiblemente donde $\frac{\partial E}{\partial v} = v = 0$ y $\frac{\partial E}{\partial y} = -f(y) = 0$. Note que estos son los puntos de equilibrio de (19).

Notemos que la velocidad v es positiva en la mitad superior de la curva de solución porque $y = v$, el desplazamiento y está aumentando. Por lo tanto, el campo vectorial apunta a la izquierda donde $v < 0$, y a la derecha donde $v > 0$.

Como $\frac{1}{2}v^2 \geq 0$, esto se sigue de (22) que en cualquier curva de solución tenemos:

$$U(y) \leq E \quad (24)$$

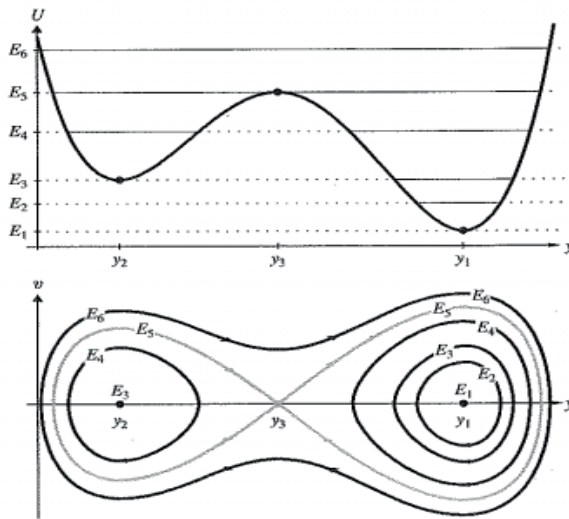
Esto restringe el rango del desplazamiento y sobre la curva de solución. Un ejemplo se muestra en la figura 122. Este es un ejemplo de lo que se conoce como **pozo potencial**. Más ejemplos se muestran en la figura 123. Encontrará útil imaginar que una pelota alcance un punto final donde $U(y) = E$, la velocidad de la pelota es 0. En este punto, la bola gira y sigue el camino del orden. Por lo tanto, la bola está restringida a permanecer en el pozo potencial.

Veamos primero un mínimo local de U , tal como el punto y en el gráfico superior de la figura 124. Para un nivel de energía E ligeramente

mayor que $U(y_0)$, como el que se muestra en la figura 116, el conjunto de y definido (24). Por lo tanto, el conjunto en el plano de fase definido por (22) es la curva cerrada indicada en la mitad inferior de la figura 116. Como se ilustra, la curva de solución correspondiente a cualquier nivel de energía ligeramente mayor que el mínimo local es una curva cerrada. Esto significa que el punto de equilibrio definido por un mínimo local de la energía potencial es un centro.

Una energía potencial más complicada se analiza en la figura 124. Esta energía potencial tiene dos mínimos locales, y_1 y y_2 . Se examinan varios niveles de energía y se han dibujado las correspondientes curvas de soluciones.

Figura 124. Gráfica de curvas potenciales.



Fuente. Elaborada por el autor con el programa Derive.

Veamos a continuación un máximo local de U , tal como y_3 en la figura 125. Sabemos que $(y_3, 0)$ es un punto de equilibrio. En consecuencia, las soluciones que se aproximan a este punto deben tardar una eternidad en hacerlo. Estas son soluciones estables para el

punto de equilibrio. Del mismo modo, las soluciones que corresponden a la bola que se aleja de este punto deben ser soluciones inestables, y vemos que el punto de equilibrio definido por un máximo local de la energía potencial es un punto de silla.

Ejemplo 78:

Considere el sistema conservativo:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x) = x(6-x) = 6x-x^2$$

Encuentre el equilibrio y grafique el plano de fase usando la gráfica del potencial.

Solución:

Hay dos puntos de equilibrio $x = 0, 2$. La función potencial debe satisfacer:

$$U(x) = -\int f(x)dx = -3x^2 + x^3$$

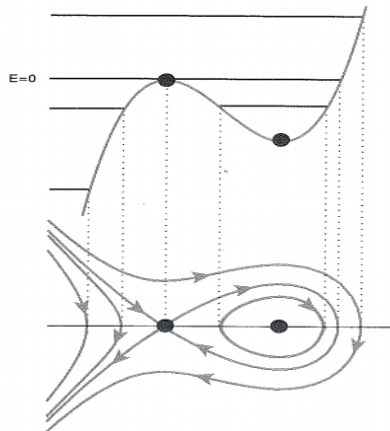
El potencial cúbico es graficado en la figura 118. Esta función cúbica tiene dos puntos críticos, $x = 0$, en donde hay un máximo local y $x = 2$ un mínimo local, que es un centro. Por lo dicho en esta sección $x = 0$ es un punto de silla (estable) y $x = 2$ es un centro. Podemos graficar el plano de fase $x, y = \frac{dx}{dt}$ directamente debajo del potencial con la misma variable x , no es necesario escribir la ecuación de la energía, pero se está utilizando en todo y es:

$$E = \frac{1}{2}y^2 - 3x^2 + x^3$$

El procedimiento es más sencillo, con cierta práctica, que nuestra descripción escrita. Introducimos unos pocos valores constantes permisibles de E en el gráfico del potencial; ver la figura 125. Un

importante valor de E corresponde al máximo local del potencial en $x = 0$, $E = v(0) = 0$. A este valor de E , existe un valor máximo permisible de x , que podemos calcular (pero no es necesario) para representar gráficamente las características cualitativas del plano de fase. Dibujamos líneas verticales hacia el plano de la fase en $x = 0$ y el valor máximo de x . Ahora descendemos al plano de la fase y dibujamos el diagrama del plano de fases para ese valor de E . En $x = 0$ y en el máximo valor de x , E es igual a la energía potencial $V(x)$, de modo que la velocidad $y = \frac{dx}{dt} = 0$ en estos dos puntos. Aquí $x = 0, y = 0$ es el equilibrio que sabemos es un punto de silla, mientras que el valor mayor de x (que también tiene $y = 0$) no es un equilibrio. Dibujamos la porción $E = 0$ del plano de fase cerca del punto de silla, que que son dos líneas rectas que llevan a él.

Figura 125. Gráfica del potencial.



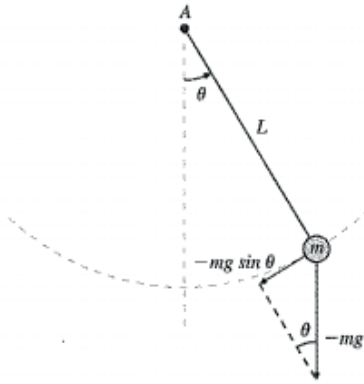
Fuente. Elaborada por el autor con el programa Derive.

El péndulo

Tenemos ahora todas las herramientas que necesitamos para analizar el movimiento de un péndulo. El péndulo consiste en un brazo, con

masa m conectada por una varilla maciza de longitud L , a un pivote fijo A (véase la figura 126). Se considera que la varilla no tiene masa. Si el brazo se mueve desde su posición de equilibrio directamente debajo del pivote, se moverá sobre un círculo de radio L con centro en el pivote (asumimos que es libre de rotación.) Sea θ el ángulo entre la varilla y la línea vertical. El desplazamiento del brazo del equilibrio es medido a lo largo de la circunferencia, por lo tanto, es igual a $L\theta$. Su velocidad es la derivada de esto, es decir $L\theta'$.

Figura 126. Gráfica de un péndulo de longitud L y masa m .



Fuente. Elaborada por el autor.

El brazo está afectado por la fuerza de la gravedad que apunta directamente hacia abajo y tiene magnitud mg . Sin embargo, la parte de la fuerza que es paralela a la varilla es equilibrada por la propia varilla. La parte desequilibrada de la fuerza es tangencial al círculo perpendicular a la varilla. Por lo tanto, esta fuerza tangencial es $-mg \sin\theta$. El signo menos indica que la fuerza está siempre actuando para disminuir la magnitud del desplazamiento angular. Si hay una fuerza de amortiguación que es proporcional a la velocidad, tiene la forma $-\mu L\theta'$, donde μ es una constante. Puesto que la aceleración del péndulo es $L\theta''$, entonces por la segunda ley de Newton se tiene:

$$mL\theta'' = -mg\sin\theta - \mu L\theta'$$

Si dividimos por mL , tenemos:

$$\theta'' = -\frac{g}{L}\text{sen}\theta - \frac{\mu}{L}\theta'$$

Esta ecuación tiene la misma forma que la ecuación (18), pero el desplazamiento es ahora θ , el desplazamiento angular.

Podemos encontrar el sistema de primer orden equivalente introduciendo la velocidad angular $\omega = \theta'$. En la forma usual, encontramos que la dinámica del péndulo está gobernada por el sistema no lineal:

$$\begin{aligned}\theta' &= \omega \\ \omega' &= -\frac{g}{L}\text{sen}\theta - \frac{\mu}{m}\omega\end{aligned}$$

Hacemos el cambio de variable $a = g/L$, y $b = \frac{\mu}{m}$. Nos referimos a b como la constante de amortiguamiento. Entonces el sistema para el péndulo es:

$$\begin{aligned}\theta' &= \omega \\ \omega' &= -a\text{sen}\theta - b\omega\end{aligned}\quad (23)$$

El péndulo sin amortiguamiento

Observe que el sistema (23) tiene la misma forma que el sistema (19), con θ y v reemplazado por θ y ω . El término forzado $f(\theta, \omega) = -a\text{sen}\theta - b\omega$ es, en general, una función de tanto θ y ω . El procedimiento de análisis muestra que el sistema del péndulo es conservativo si no existe amortiguamiento (es decir $b = 0$). Vamos a asumir que esto es verdadero por el momento. El sistema para el péndulo sin amortiguamiento se reduce a:

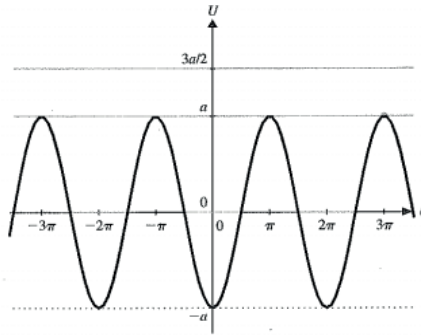
$$\begin{aligned}\theta' &= \omega \\ \omega' &= -\text{sen}\theta\end{aligned}\quad (24)$$

Para este caso la energía potencial es:

$$U(\theta) = -\int f(\theta)d\theta = \int a\text{sen}\theta d\theta = -a\cos\theta$$

La gráfica de U se muestra en la siguiente figura.

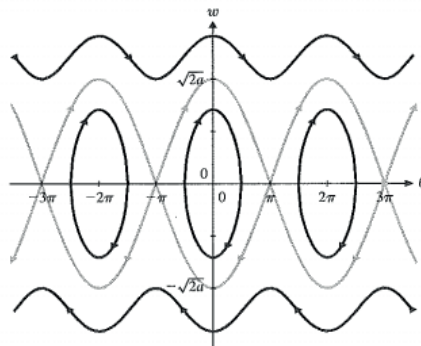
Figura 127. Gráfica de la función de energía potencial U .



Fuente. Elaborada por el autor con el programa Derive.

Observe que U es periódica de periodo 2π , reflejando el hecho de que mide el ángulo θ en el que el péndulo se desplaza. La gráfica de la energía potencial en la figura 126 conduce al gráfico de plano de fase en la figura 127 que también es periódica con el periodo 2π . La situación física del mismo péndulo es periódica. Sería una buena idea imaginar las gráficas en la figura 120 y 121 enrolladas de modo que las líneas $\theta = -\pi$ y $\theta = \pi$ fueran identificadas. Entonces la energía potencial sería trazada en un cilindro, y en lugar de un plano de fase, tendríamos un cilindro de fase.

Figura 128. Gráfica de la energía potencial para varios valores de θ .



Fuente. Elaborada por el autor con el programa Derive.

Para el péndulo la energía potencial tiene un mínimo valor de $-a$ cuando $\theta = 2k\pi$ para todo entero k . Entonces todos los puntos de equilibrio $(2k\pi, 0)$ son centros.

Por supuesto, todos ellos corresponden al equilibrio físico donde el brazo se cuelga inmóvil directamente debajo del pivote. Si la energía total

$$E = \frac{1}{2}\omega^2 - a\cos\theta$$

se encuentra entre $-a$ y a , y las curvas solución están cerradas. Estos corresponden a lo que podría llamarse la pequeña amplitud normal de oscilación del péndulo no amortiguado.

La energía potencial logra sus máximos valores de a en $\theta = (2k + 1)\pi$ para todo entero k . Así, todos los puntos de equilibrio $((2k + 1)\pi, 0)$ son puntos de silla. Ellos corresponden a los puntos físicos de equilibrio inestables donde el brazo del péndulo está equilibrado sin moverse directamente sobre el pivote. Las curvas de soluciones estables e inestables para el péndulo no amortiguado en este caso se muestran en gris oscuro en la figura 127. Observe que el conjunto gris consiste en una serie de curvas solución, cada una comenzando en un punto de equilibrio inestable y terminando en una posición adyacente. Ellas son todas las Separatrices para los puntos de silla.

Si la energía total es mayor que a , entonces el péndulo tiene suficiente energía para pasar sobre la parte superior del pivote. El movimiento continúa en una dirección alrededor del pivote, disminuyendo la velocidad a medida que el brazo alcanza la posición directamente sobre el pivote y luego se acelera a medida que se mueve hacia abajo.

Péndulo amortiguado

Nosotros encontramos que para el péndulo no amortiguado sus puntos de equilibrio se tienen cuando $\theta = k\pi$ para algún entero k y cuando $w = 0$. Si examinamos ahora el lado derecho (23) vemos que el péndulo amortiguado tiene los mismos puntos de equilibrio. Analicemos esto. El Jacobiano es:

$$J(\theta, \omega) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a \cos \theta & -b \end{bmatrix}$$

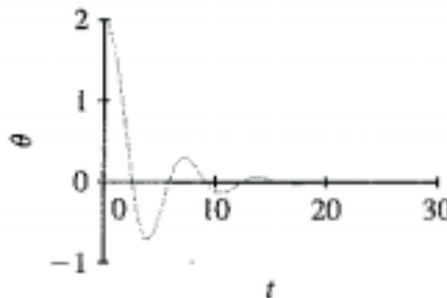
Si $\theta = 2k\pi$, entonces $\cos \theta = 1$, luego:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a & -b \end{bmatrix}$$

Entonces $D = \det(J) = a > 0$ y $T = \text{Tr}(J) = -b < 0$. Entonces vemos que el punto de equilibrio es un sumidero, pero el tipo actual depende de la constante de amortiguamiento b .

Para ser más precisos en nuestra evaluación calculamos el discriminante $T^2 - 4D = b^2 - 4a$. Si $b^2 < 4a$, el discriminante es negativo y el punto de equilibrio es un sumidero de espiral. Este es el caso no amortiguado. Un ejemplo del movimiento de un péndulo no amortiguado se muestra en la figura 129.

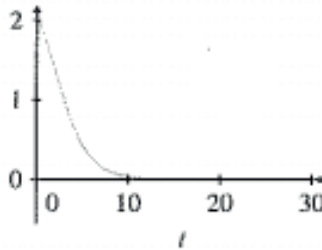
Figura 129. Gráfica del movimiento de un péndulo.



Fuente. Elaborada por el autor con el programa Derive.

Si $b^2 > 4a$, el discriminante es positivo y el punto de equilibrio es un nodo sumidero. Esto es el caso sobre-amortiguado. Una gráfica típica de este desplazamiento se muestra en la figura 130.

Figura 130. Gráfica del movimiento sobre – amortiguado.



Fuente. Elaborada por el autor con el programa Derive.

Si $b^2 = 4a$, el amortiguamiento es crítico, y no podemos decir nada más que el punto de equilibrio es un sumidero.

Si θ es un múltiplo impar de π , entonces $\cos \theta = -1$ y el Jacobiano es:

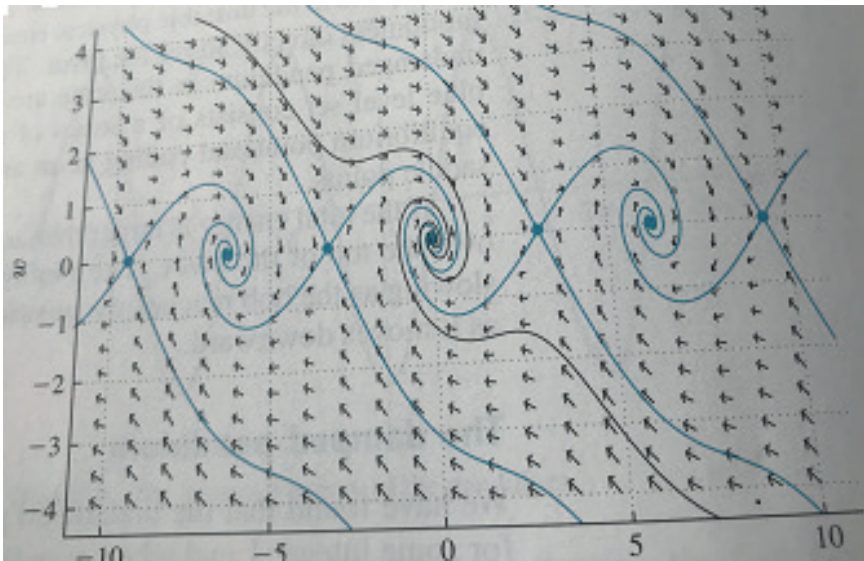
$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & -b \end{bmatrix}$$

Ahora $D = \det(J) = -a < 0$, luego sabemos que es un punto de silla. Matemáticamente, estos puntos de silla son inestables, reflejan la inestabilidad física del brazo del péndulo balanceado alrededor del pivote. Esto es interesante ya que muestra el comportamiento de las Separatrices. Una separatriz se puede considerar como una solución estable (después de un tiempo infinito) que termina equilibrada sobre el pivote. Si intentáramos lograr esto con un péndulo es altamente improbable que lo lográramos. En algún momento de tiempo el brazo se detiene en cortos instantes y el resto del tiempo pasaría sobre el pivote y continuaría por el otro lado. Teóricamente, debe haber una posibilidad entre estas dos donde el brazo acaba de llegar a una

parada por encima del pivote. Esta solución es una separatriz estable. Por otra parte, una separatriz inestable comienza en el punto de equilibrio y luego precede lejos de él.

El plano de fase para el péndulo sobre-amortiguado se muestra en la figura 131. Observe que las curvas de solución estable se apoyan en las sillas de montar, pero las soluciones inestables curvas en espiral entran a los sumideros. Cada uno de los sumideros tiene una cuenca de atracción, que se ve claramente que está limitada por las curvas de solución estables de las sillas vecinas.

Figura 131. Plano de fase para el péndulo sobre-amortiguado.



Fuente. Elaborada por el autor con el programa Derive.

Energía y el péndulo amortiguado

Veamos lo que le sucede a la energía a lo largo de las curvas solución $(\theta(t), \omega(t))$ para el sistema (23) del péndulo. A lo largo de la curva la energía es:

$$E(t) = E(\theta(t), \omega(t)) = \frac{1}{2}\omega^2(t) - a\cos\theta(t)$$

Derivando y usando el sistema (23), vemos que:

$$E' = \omega\omega' + a\sin\theta\theta' = \omega(-a\sin\theta - b\omega) + a\omega\sin\theta = -b\omega^2$$

Si no existe amortiguamiento, $b = 0$, luego $E' = 0$, y la energía es conservada a lo largo de la curva solución, confirmando lo que ya sabemos. Sin embargo, si existe amortiguamiento entonces $b > 0$ y $E' = -b\omega^2 \leq 0$. Entonces, la energía es decreciente excepto donde la velocidad angular $\omega = 0$. En tal punto la segunda ecuación del sistema (24) queda: $\omega' = -a\sin\theta$, la cual no es cero salvo $\theta = k\pi$. Así, si nuestra solución no es una solución de equilibrio, en cada punto donde $E' = -b\omega^2 \neq 0$, la velocidad angular está cambiando. Por lo tanto, estos puntos son aislados, y en general la energía continua va disminuyendo a lo largo de la curva solución.

¿Dónde puede terminar este proceso? Nos referiremos a la figura 118. Las curvas de solución estable para las sillas de montar, terminan en las sillas de montar por supuesto. Con estas excepciones, todas las curvas de solución terminan en los puntos de equilibrio estables, que son los mínimos de la función de energía.

Sistemas hamiltonianos

Existe un tipo especial de sistemas que están definidos por conservar una cantidad. Es bueno tener en cuenta que los sistemas no lineales de ecuaciones diferenciales son casi imposibles de resolver explícitamente. También hemos visto que las curvas solución de los sistemas puedan comportarse de muchas maneras diferentes y que no hay procedimientos cualitativos que funcionen en todos los casos. Afortunadamente, hay ciertos tipos de sistemas no lineales que aparecen a menudo en la práctica, y para los cuales existen procedimientos especiales que nos permiten entender de alguna manera el plano de fase. Veremos en esta última parte un tipo especial de sistema no lineal.

Ejemplo 79. Cantidades que se conservan:

Consideremos la siguiente situación: desde hace 10 años Pedro y Germán están escribiendo un texto de ecuaciones diferenciales. Quieren que su libro esté lleno de nuevas ideas, ingeniosas y brillantes sobre sobre las ecuaciones diferenciales, pero han encontrado que resulta muy difícil aportar nuevas ideas.

La situación más problemática es la siguiente: siempre que Pedro llega a la oficina en la mañana con una idea ingeniosa y ambos empiezan a trabajar asiduamente en ella, por lo general no llegan a nada, es decir, es una reunión que no resulta fructífera. Entonces el entusiasmo de Pedro decrece y con ello su creatividad. Por otra parte, siempre que Germán llega en la mañana con una nueva idea, sin importar qué tan trivial sea esta, sucede algo diferente. Ambos trabajan en la idea arduamente. Algunas veces el entusiasmo de Pedro decrece, pero el de Germán siempre está animado. Hay un buen intercambio y nunca cesan de trabajar. Algo resulta de la idea y el texto progresa. Este hecho es lo que molesta a Pedro y a Germán, ¿por qué debe depender tan críticamente su energía creativa de quien tuvo la primera idea?

Solución:

Para modelar esta situación, ellos llaman a $x(t)$, y y $y(t)$ los niveles de entusiasmo de Germán y Pedro en el tiempo t respectivamente. Es bueno observar que $x(t)$ y $y(t)$ son difíciles de medir debido a una falta de unidades estandarizadas de entusiasmo; pero es claro que $y(t) > 0$ indica que Pedro es entusiasta, mientras que $y(t) < 0$ significa que Pablo es apático. Cuando $y(t) = 0$, Pablo permanece sentado, ni feliz ni triste, y lo mismo ocurre con Germán.

Ambos observan que el ánimo de Germán cambia a una razón directamente proporcional al nivel de entusiasmo de Pedro. Cuando Pedro está emocionado, Germán se vuelve más entusiasta, pero cuando Pedro está apático, Germán pierde su energía. Una simple ecuación que modela esta situación es:

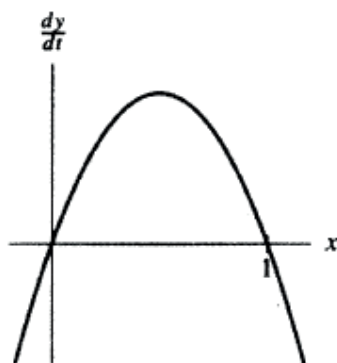
$$\frac{dx}{dt} = y$$

La situación de Pedro es un poco más difícil de categorizar. Cuando Germán está medianamente entusiasta, Pedro se pone contento. Pero cuando Germán está sumamente emocionado, Pedro empieza a perder entusiasmo. Aparentemente, cuando el torrente de ideas que emanan de Germán se vuelve muy grande, a Pedro le da dolor de cabeza y se aísla de su amigo. Por otra parte, cuando Germán está deprimido, Pedro se pone realmente apático. Entonces por la razón de cambio del entusiasmo de Pedro usamos:

$$\frac{dy}{dt} = x - x^2$$

La gráfica de $dy/dt = x - x^2$ como función de x refleja de manera exacta el nivel de entusiasmo de Pedro (figura 132). Se puede ver que $dy/dt > 0$ si $0 < x < 1$, pero se tiene que $dy/dt < 0$ en los otros casos.

Figura 132. Gráfica del nivel de entusiasmo de Pedro.



Fuente. Elaborada por el autor con el programa Derive.

El sistema de ecuaciones diferenciales que modela esta situación es:

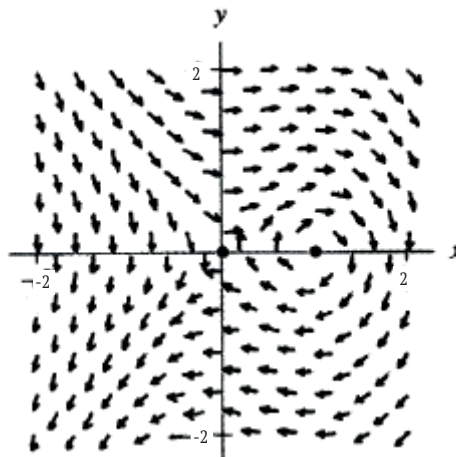
$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= x - x^2\end{aligned}$$

El campo de direcciones para este sistema se muestra en la figura 133. Hay dos puntos de equilibrio, uno en el origen $(0, 0)$ y otro en $x = 1, y = 0$, o $(1, 0)$. El procedimiento de Linealización, puede usarse para estudiar las soluciones cerca del equilibrio. En el origen, la matriz jacobiana es:

$$J(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Que tiene los valores propios ± 1 . Por lo tanto, el origen es un punto de silla.

Figura 133. Campo de direcciones del sistema dado



Fuente. Elaborada por el autor con el programa Geogebra.

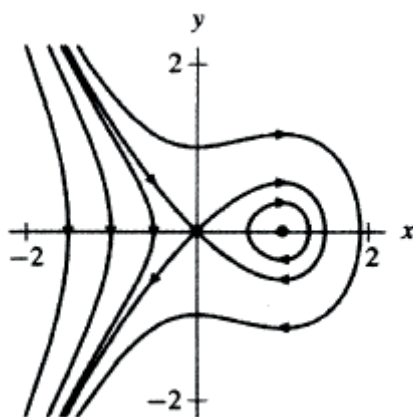
El punto de equilibrio en $(1, 0)$ tiene como matriz jacobiana a:

$$J(1, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Que tiene como valores propios $\pm i$. El sistema linealizado es un centro. Como se vio anteriormente, este es uno de los casos en que el comportamiento a largo plazo de las soluciones del sistema no lineal cerca del punto de equilibrio no queda totalmente determinado por la Linealización. El comportamiento del sistema no lineal cerca del punto de equilibrio $(1,0)$ podría ser el de un sumidero espiral, el de una fuente espiral o el de un centro.

Las aproximaciones numéricas de las soluciones dan el plano de fase mostrado en la figura 134, donde se puede observar un comportamiento muy regular. Las soluciones con condiciones iniciales cerca de $(1,0)$ parecen formar lazos cerrados correspondientes a soluciones periódicas. También las Separatrices inestables y estables que emergen del punto de silla en el origen y se dirigen a los cuadrantes primero y cuarto que parecen formar un solo lazo.

Figura 134. Gráfica del plano de fase.



Fuente. Elaborada por el autor con el programa Derive.

Los procedimientos cualitativos que hemos estudiados hasta ahora no nos permiten predecir que este sistema tendrá tales curvas soluciones regulares. Además, ya que las aproximaciones numéricas de las soluciones sólo son eso, debemos ser cautos. Distinguir las

curvas que forman lazos cerrados de aquellas que se mueven en espiral muy lentamente puede ser muy difícil. Nos gustaría tener procedimientos que pudieran usarse para verificar el comportamiento especial de este sistema.

Cantidades que se conservan

Existe un tipo especial de sistemas que están definidos por una cantidad que se conserva.

Sea $H(x(t), y(t))$ una función de dos variables, con segundas derivadas parciales continuas. **El sistema hamiltoniano** H definido por:

$$\begin{aligned}x' &= \frac{\partial H}{\partial y} \\y' &= -\frac{\partial H}{\partial x}\end{aligned}\quad (25)$$

La función H es llamada **la hamiltoniana**:

Esto quiere decir, que si $(x(t), y(t))$ es una solución del sistema $H(x(t), y(t))$ es constante. En otras palabras:

$$\frac{d}{dt} H(x(t), y(t)) = 0$$

Ejemplo 80:

Muestre que $H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$ es una cantidad constante para el problema de Pedro y Germán (ejemplo 17).

Solución:

Calculemos $\frac{dH}{dt}$, entonces:

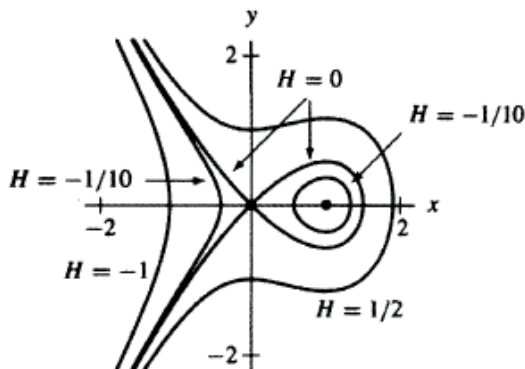
$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} H(x(t), y(t)) &= \frac{\partial H}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial H}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \\&= (-x + x^2) \cdot y + y(x - x^2) \\&= 0\end{aligned}$$

Donde la primera igualdad proviene de la regla de la cadena, y la segunda parte del hecho en el que

$(x(t), y(t))$ es una solución para reemplazar $\frac{dx}{dt}$ por y , y $\frac{dy}{dt}$ por $x - x^2$.

Esto significa que las curvas solución siempre se encuentran a lo largo de las curvas de nivel de H , las cuales se muestran en la figura 135. Ahí se puede observar que alrededor del punto de equilibrio $(1,0)$ las curvas de nivel de H forman círculos cerrados y que las ramas de la curva de nivel que salen del origen hacia la derecha se conectan con un lazo. Esto concuerda con el análisis del plano de fase del sistema.

Figura 135. Gráfica del plano de fase del sistema.

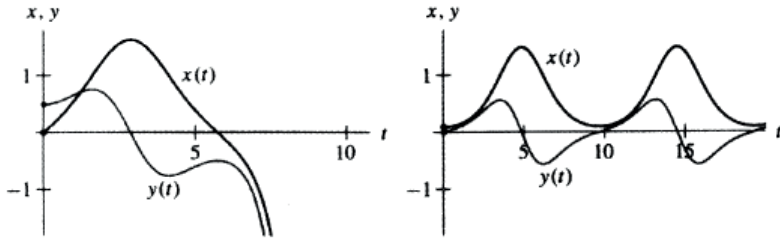


Fuente. Elaborada por el autor con el programa Derive.

Es muy especial el hecho de que las ramas derechas de las Separatrices estables e inestables del origen formen un solo lazo. Este tipo de curvas solución es una **conexión de punto silla**. Dentro de la conexión del punto silla, todas las curvas solución son periódicas; pero fuera de ella, todas las soluciones tienen la propiedad de que tanto $x(t)$ como $y(t)$ tienden a $-\infty$ cuando $t \rightarrow \infty$. Esto explica, para gran alivio de Pedro y German, por qué su productividad diaria depende

tan crucialmente de quien tiene la primera idea. Si $y(0) > 0$, $y(0) = 0$ (con $x(0)$ no muy grande), entonces $x(t)$ y $y(t)$ son periódicas, con $x(t) > 0$ para toda t . En la figura 136 están esbozadas las gráficas de $x(t)$ y $y(t)$ para condiciones iniciales cercanas a $(0, 0)$.

Figura 136. Gráficas de las funciones $x(t)$, y $y(t)$.



Fuente. Elaborada por el autor con el programa Derive.

Ejemplo 81:

Cualquier sistema físico conservativo:

$$\begin{aligned}y' &= v \\v' &= f(y)\end{aligned}$$

Es hamiltoniano.

Solución:

Si $U(y) = -\int f(y)dy$ es una función potencial, tomamos la energía total $H(y, v) = \frac{1}{2}v^2 + U(y)$ como nuestro hamiltoniano. Entonces:

$$\begin{aligned}y' &= v = \frac{\partial H}{\partial v} \\v' &= f(y) = -U'(y) = -\frac{\partial H}{\partial y}\end{aligned}$$

Luego el sistema es hamiltoniano.

Como la energía para un sistema conservativo, el hamiltoniano es siempre una cantidad conservativa para el correspondiente

sistema hamiltoniano. Para ver esto, supongamos que $(x(t), y(t))$ es una solución de (25), para ver esto usamos la regla de la cadena para varias variables:

$$\begin{aligned}\frac{dH(x(t), y(t))}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial x} x' + \frac{\partial H}{\partial y} y' \\ &= \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial y} \left(-\frac{\partial H}{\partial x}\right) \\ &= 0\end{aligned}$$

Entonces $H(x(t), y(t))$ es constante a lo largo de cualquier curva solución, es decir H es una cantidad conservativa. La curva de nivel $H(x, y) = C$ consta de una o más curvas solución.

Supongamos que se nos da un sistema:

$$\begin{aligned}x' &= f(x, y) \\ y' &= g(x, y)\end{aligned}$$

¿Hay alguna manera de saber si el sistema es hamiltoniano? Si es hamiltoniano, existe una función H tal que:

$$\begin{aligned}f &= \frac{\partial H}{\partial y} \\ g &= -\frac{\partial H}{\partial x}\end{aligned}\quad (26)$$

En consecuencia, estamos realmente preguntando cuándo podemos resolver el sistema de las ecuaciones parciales diferenciales en (26). La respuesta en detalle es dada por el siguiente teorema.

Teorema

Considere el sistema: $\begin{aligned}x' &= f(x, y) \\ y' &= g(x, y)\end{aligned}$ (27)

Donde f y g tienen derivadas continuas.

1. Si el sistema es hamiltoniano, entonces:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial g}{\partial y} \quad (28)$$

2. Si la ecuación (28) es verdadera en un rectángulo R , entonces el sistema es hamiltoniano en R . Un hamiltoniano está dado por:

$$H(x, y) = \int f(x, y)dy + \phi(x) \quad (29)$$

Donde la función ϕ satisface:

$$\phi'(x) = -\frac{\partial}{\partial x} \int f(x, y)dy - g(x, y) \quad (30)$$

Prueba:

Supongamos primero que el sistema es hamiltoniano, con H como su hamiltoniano. Entonces f y g están dadas por (26). De esto tenemos que:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial H}{\partial x} \right) = -\frac{\partial^2 H}{\partial y \partial x}$$

Como H tiene segundas derivadas continuas, entonces las segundas derivadas mixtas son iguales, luego (28) se cumple.

Ahora supongamos que (28) es verdadera en un rectángulo R . Necesitamos encontrar una función H que satisface (26). Empezamos integrando la primera ecuación en (26) con respecto a y . Por el teorema fundamental del cálculo, tenemos:

$$H(x, y) = \int f(x, y)dy + \phi(x)$$

Esta ecuación es (29). Como integramos respecto a y , la constante de integración $\phi(x)$ tiene que depender de x .

Para encontrar la función ϕ , derivamos H en la ecuación (30) con respecto a x :

$$\frac{\delta H}{\delta x} = \frac{\delta}{\delta x} \int f(x, y)dy + \phi'(x)$$

De acuerdo con la segunda ecuación de (26), tenemos que:

$$-g = \frac{\partial H}{\partial x}$$

y también:

$$\phi'(x) = -\frac{\delta}{\delta x} \int f(x, y) dy - g(x, y)$$

Esta es la ecuación (30). Se puede resolver integrando el lado derecho como una función solo de la variable x . La hipótesis de la parte (2) del teorema garantiza que es el caso. Para ver esto, mostremos que la derivada del lado derecho con respecto a y es cero. Tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta y} \left(\frac{\delta}{\delta x} \int f(x, y) dy + g(x, y) \right) &= \frac{\delta}{\delta y} \left(\frac{\delta}{\delta x} \int f(x, y) dy \right) + \frac{\delta g}{\delta y} \\ &= \frac{\delta}{\delta x} \left(\frac{\delta}{\delta y} \int f(x, y) dy \right) + \frac{\delta g}{\delta y} \\ &= \frac{\delta f}{\delta x} + \frac{\delta g}{\delta y} = 0 \end{aligned}$$

Por (28).

Ejemplo 82:

Considere el sistema:

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= x(x - 1) \end{aligned} \quad (31)$$

Muestre que este sistema es hamiltoniano y encuentre una función hamiltoniana.

Solución:

Como $F(x, y) = y$, y $g(x, y) = x(x - 1)$, tenemos:

$$\frac{\delta f}{\delta x} = 0 = -\frac{\delta g}{\delta y}$$

Entonces el sistema es hamiltoniano.

Para encontrar la función hamiltoniana, seguimos los pasos de la prueba.

Primero:

$$H(x, y) = \int f(x, y)dy + \phi(x) = \int ydy + \phi(x) = \frac{y^2}{2} + \phi(x)$$

Segundo: para encontrar $\phi(x)$, usamos:

$$\begin{aligned} -g(x, y) &= \frac{\delta H}{\delta x}(x, y) = \phi'(x) \\ \phi'(x) &= -x(x - 1). \end{aligned}$$

A partir de esto tenemos que:

$$\phi(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$$

Tercero: finalmente,

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{1}{3}x^3$$

Puntos de equilibrio en los sistemas hamiltonianos

Vimos anteriormente que los sistemas mecánicos conservadores pueden tener puntos de equilibrio que son el punto de silla o el centro. De hecho, estos son los únicos tipos de puntos de equilibrio que pueden ocurrir. Mostraremos que esto es cierto para cualquier sistema hamiltoniano. Para ver esto, supongamos que tenemos un sistema hamiltoniano:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{\partial H}{\partial y} \\ y' &= \frac{\partial H}{\partial x} \end{aligned}$$

Calculando su jacobiano, tenemos:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\delta^2 H}{\delta x \delta y} & \frac{\delta^2 H}{\delta y^2} \\ -\frac{\delta^2 H}{\delta x^2} & -\frac{\delta^2 H}{\delta y \delta x} \end{bmatrix}$$

Si $\det(J) < 0$, los puntos de equilibrio son sillas. Si $\det(J) > 0$ debemos ser un poco más cuidadosos. La traza del jacobiano es:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial x} = 0$$

Ya que las segundas derivadas parciales mixtas de H son iguales. En particular, la traza del jacobiano es igual a cero en todo punto de equilibrio. Por lo tanto, si $\det(J) > 0$, la Linealización tiene un centro en el origen, pero este no necesariamente implica que el sistema no lineal hamiltoniano tenga un centro.

Note que todo punto de equilibrio para un sistema hamiltoniano es un punto crítico para este. Apliquemos la prueba de la segunda derivada del cálculo multivariado para determinar si el punto crítico es un punto extremo o no. Esto requiere que miremos el determinante de la matriz de las segundas derivadas parciales de H .

Sin embargo:

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\delta^2 H}{\delta x^2} & \frac{\delta^2 H}{\delta y \delta x} \\ \frac{\delta^2 H}{\delta x \delta y} & \frac{\delta^2 H}{\delta y^2} \end{bmatrix} = \frac{\delta^2 H}{\delta x^2} \frac{\delta^2 H}{\delta y^2} - \left(\frac{\delta^2 H}{\delta x \delta y} \right)^2 = \det(J) > 0$$

Por el teorema de la segunda derivada para funciones de dos variables, si $\det(J) > 0$, el punto crítico de H debe ser un máximo local o un mínimo local. En cualquier caso, los conjuntos de niveles de H (que son las curvas de solución del sistema hamiltoniano) cerca del valor crítico son curvas cerradas. Por lo tanto, se sigue que el punto de equilibrio es un centro.

Veamos dos ejemplos de sistemas hamiltonianos:

Ejemplo 83. El oscilador armónico:

El sistema para un oscilador armónico no amortiguado es:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= v \\ \frac{dv}{dt} &= -qy\end{aligned}$$

Donde q es una constante positiva. Ver que dicho sistema es hamiltoniano.

Solución:

Si hacemos:

$$H(x, y) = \frac{1}{2}v^2 + \frac{q}{2}y^2$$

Entonces:

$$\frac{dy}{dt} = v = \frac{\partial H}{\partial v}$$

Y:

$$\frac{dv}{dt} = -qy = -\frac{\partial H}{\partial y}$$

Por lo tanto, el sistema del oscilador armónico no amortiguado es un sistema hamiltoniano. Los conjuntos de nivel de la función H son elipses en el plano $y - v$ que corresponden al retrato del plano de fase de las soluciones del oscilador armónico no amortiguado. Esta función hamiltoniana, también se llama la **función de energía para el oscilador**.

Ejemplo 84. El péndulo ideal:

Las ecuaciones de péndulo ideal con brazo de longitud 1, están dadas por:

$$\begin{aligned}\frac{d\theta}{dt} &= v \\ \frac{dv}{dt} &= -g\operatorname{sen}\theta\end{aligned}$$

Verificar que este sistema es hamiltoniano.

Solución:

Podemos ver que la función:

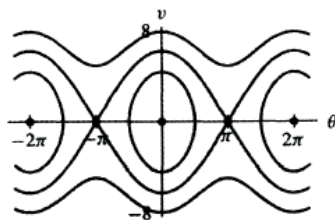
$$H(\theta, v) = \frac{1}{2}v^2 - g\cos\theta$$

es una función hamiltoniana para el sistema, esto se puede ver del cálculo de derivadas parciales de H:

$$\frac{\partial H}{\partial \theta} = g\operatorname{sen}\theta = -\frac{dv}{dt}, \quad \frac{\partial H}{\partial v} = v = \frac{d\theta}{dt}$$

Podemos recordar cómo es la gráfica de H como sigue: para cada θ fija, el término $\frac{v^2}{2}$ implica que la gráfica de H es una parábola en la dirección de v . Los puntos críticos ocurren en $v = 0$, $g \operatorname{sen} \theta = 0$, $\theta = 0, \pm\pi, \pm2\pi$, etc. Los puntos $v = 0$, $\theta = 0, \pm\pi, \pm2\pi$, etc., son mínimos locales, y $v = 0$, $\theta = 0 \pm \pi, \pm3\pi$, etc., son puntos de silla de la gráfica (ver la siguiente figura).

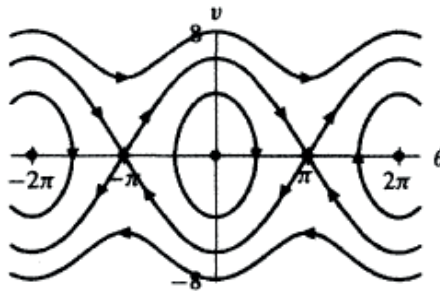
Figura 137. Gráficas de puntos de silla.



Fuente . Elaborada por el autor con el programa Derive.

Las curvas de nivel de H están graficadas en la figura 136. Sabemos que el campo vectorial siempre es tangente a esas curvas. El componente θ es igual a v , por lo que el campo vectorial señala hacia la derecha cuando $v > 0$, y hacia la izquierda cuando $v < 0$. Si aplicamos esto, podemos asignar direcciones a lo largo de esas curvas y con ello, determinar el retrato de fase. Este se muestra en la siguiente figura.

Figura 138. Gráficas de curvas de nivel de H .



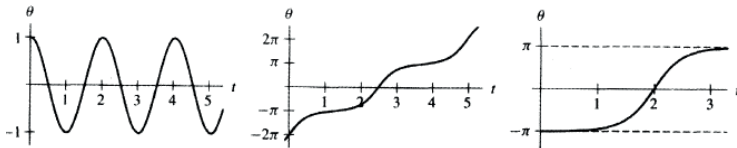
Fuente. Elaborada por el autor con el programa Derive.

Hay tres tipos diferentes de curvas solución presentes en el retrato del plano de fase. Se muestran esquemáticamente en la figura 129 y están marcados como A, B, y C. Alrededor de los puntos de equilibrio en $v = 0$, $\theta = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \text{etc.}$, encontramos soluciones periódicas que se mueven en el mismo sentido que las manecillas del reloj. Esas son las soluciones de tipo A en la figura 138. Como el valor θ a lo largo de esas curvas solución nunca alcanza los valores $\pi, 3\pi, \text{etc.}$, se infiere que el péndulo nunca pasa por la posición vertical. En consecuencia, lo único que hace es oscilar de ida y vuelta periódicamente con los valores máximos y mínimos de θ , determinados por el punto donde la curva solución cruza el eje θ . Este es el movimiento usual que asociamos a un péndulo. La gráfica de $\theta(t)$ para tal solución como esta se muestra en la figura 139.

Figura 139. Gráfica de la curva $\theta(t)$.

Fuente. Elaborada por el autor con el programa Derive.

Por otra parte, una curva solución como la B en la figura 137 corresponde al péndulo girando para siempre en sentido contrario a las manecillas del reloj. Note que $v \neq 0$ a lo largo de dicha curva solución, por lo que el péndulo nunca alcanza un punto donde la velocidad sea 0. La gráfica de $\theta(t)$ para la solución se incrementa para toda t si $v > 0$, y decrece para todo t si $v < 0$ (figura 140).

Figura 140. Gráficas de curvas para $\theta(t)$ si $v < 0$ o, si $v > 0$.

Fuente. Elaborada por el autor con el programa Derive.

Los tipos intermedio de soluciones (vea el punto C en la figura 139) son separatrices de puntos de sillas que forman conexiones de punto de silla. Esas soluciones provienen de y se aproximan a la posición vertical de equilibrio cuando el tiempo tiende a $\pm\infty$. La gráfica $\theta(t)$ de este tipo de solución se muestra en la figura 140. Para encontrarla, debemos escoger con cuidado el ángulo y velocidad iniciales. Con una velocidad inicial levemente alta, el péndulo oscila más allá de la posición vertical; cuando es ligeramente baja, el péndulo cae de regreso. Las separatrices de los puntos de equilibrio de punto silla

separan las soluciones «oscilantes», de ida y vuelta, de las soluciones «rotatorias» que giran una y otra vez.

El valor de la función hamiltoniana para el péndulo ideal en un punto particular (y, v) se llama **energía**. El principio físico de la conservación de la energía es aplicable al péndulo ideal, como lo es para el oscilador armónico sin amortiguamiento. Esta es una manera de predecir que el oscilador armónico sin amortiguamiento y el péndulo ideal son sistemas hamiltonianos.

Para terminar, veamos qué pasa con los sistemas lineales hamiltonianos.

Sistemas lineales hamiltonianos

Consideremos el sistema lineal plano:

$$\vec{X}' = \mathbf{A} \cdot \vec{X} \text{ donde } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

En términos de las coordenadas de $\vec{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ el sistema es:

$$\begin{aligned} x_1' &= f(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2 \\ x_2' &= g(x_1, x_2) = cx_1 + dx_2 \end{aligned} \quad (32)$$

Por el teorema, se tiene que es hamiltoniano si y solo si:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = -\frac{\partial g}{\partial x_2} \text{ o, } a = -d$$

Entonces, el sistema lineal (32) es hamiltoniano sí y solo sí:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$$

Diciendo esto en otra forma, vemos que un sistema planar, lineal es hamiltoniano si y solo si su traza es cero.

Vamos a encontrar una función hamiltoniana. Se debe tener:

$$H(x_1, x_2) = \int (ax_1 + bx_2)dx_2 = ax_1x_2 + \frac{1}{2}bx_2^2 + \phi(x_1)$$

Donde $\phi(x_1)$ está bien determinada. La función ϕ se puede encontrar derivando y observando que:

$$\frac{\partial H}{\partial x_1} = -g(x_1, x_2) = -(cx_1 - ax_2)$$

Esto se convierte:

$$ax_2 + \phi'(x_1) = -(cx_1 - ax_2)$$

$\phi(x_1) = -cx_1^2/2$. Entonces, un hamiltoniano para nuestro sistema lineal es el polinomio cuadrático:

$$H(x_1, x_2) = \frac{1}{2}bx_2^2 - \frac{1}{2}cx_1^2 + ax_1x_2 \quad (33)$$

Sabemos que el punto de equilibrio en el origen es o un punto de silla o un centro. El tipo exacto del punto de equilibrio se puede decidir por el determinante $\det(A) = -a^2 - bc$. La naturaleza de la curva de nivel del polinomio H está determinado por su discriminante, el cual es:

$$a^2 - 4\left(-\frac{c}{2}\right)\left(\frac{b}{2}\right) = a^2 + bc = -\det(A)$$

Podemos considerar dos casos:

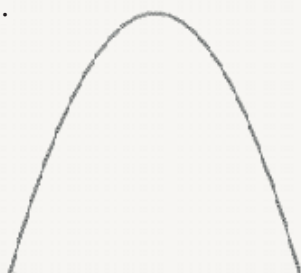
Si $\det(A) < 0$, o equivalentemente, si $-bc < a^2$, entonces el punto de equilibrio es un punto de silla. Esta misma condición significa que el discriminante de H es positivo, lo cual implica que los conjuntos de nivel del hamiltoniano cuadrático (33) son hipérbolas.

Si $\det(A) > 0$, o equivalentemente, si $-bc > a^2$, entonces el punto de equilibrio es un centro. Esta misma condición, significa que el discriminante de H es negativa lo cual implica que los conjuntos de nivel del hamiltoniano cuadráticos (33) son elipses centradas en el origen. Como centros lineales están caracterizados por $T = \text{tr}(A) = 0$ y $D > 0$, vemos que todo el centro lineal está rodeado por curvas de solución que son elipses centradas en el origen.

10.29 Ejercicios

Para los ejercicios 1 al 6, los potenciales son dados. Encontrar y clasificar los equilibrios (nodos, sillas, espirales, centros, estables o inestables), y trazar la gráfica del plano de fase correspondiente.

1.



2.



3.



4.



5.



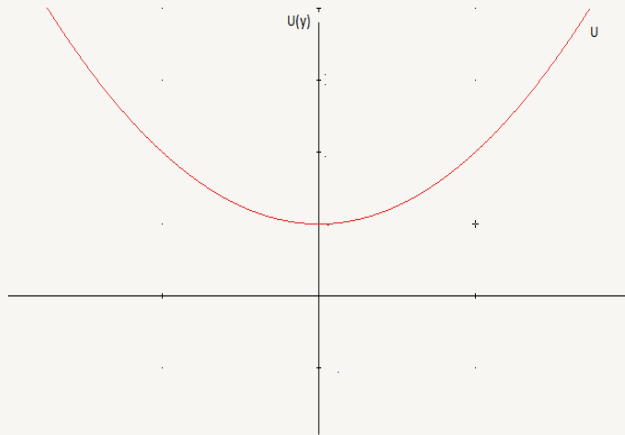
6.



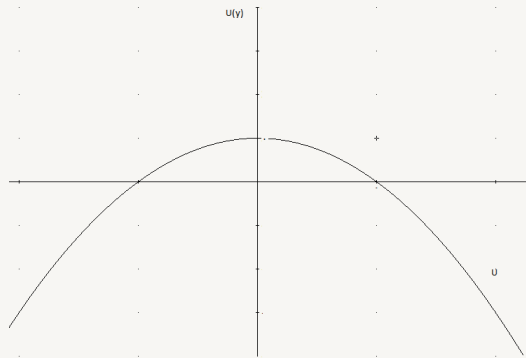
Considere el sistema:

$$\begin{aligned}y' &= v, \\v' &= f(y)\end{aligned}$$

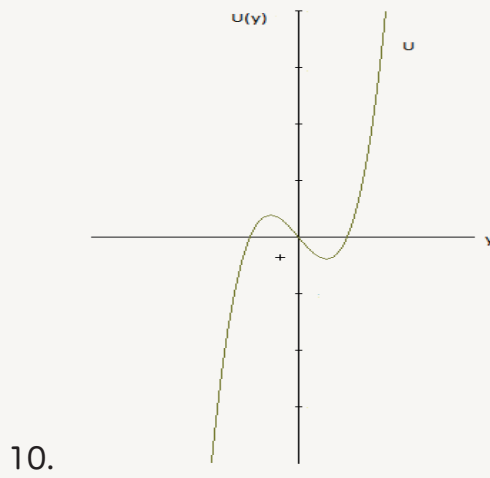
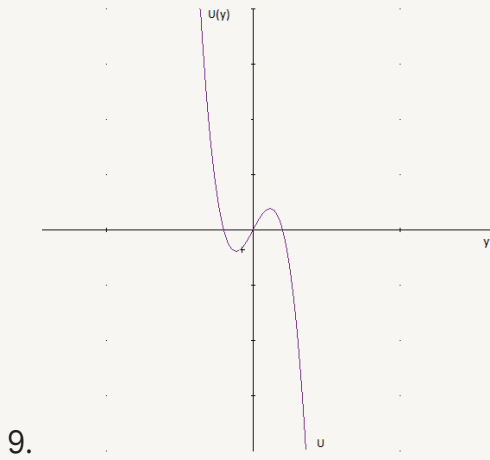
En los ejercicios 7 al 12, la función potencial $U(y) = -\int f(y)dy$ es trazada. Haga una copia del potencial; alinee el plano de fase $y-v$ por debajo de los ejes de potencial, como se muestra en la figura 7. Utilice la función de potencial U para crear el retrato de fase correspondiente en el plano de fase $y - v$.



7.



8.





Considere el sistema:

$$\begin{aligned} y' &= v, \\ v' &= f(y) \end{aligned}$$

En los ejercicios 13 al 18, se da una ecuación para la fuerza $f(y)$. En cada ejercicio, realice la siguiente tarea:

- I. Encuentre los puntos de equilibrio.
- II. Encuentre la función de potencial $U(y)$.
- III. Como se hizo en el ejercicio 7, alinee los ejes de potencial con el del plano de fase y $-v$. Trace la función potencial y los puntos de equilibrio, luego construya un retrato en fase en el plano de fase y $-v$ con esta información:

13. $f(y) = 1 - 2y$

14. $f(y) = y$

15. $f(y) = 4y - y^2$

16. $f(y) = y^2 - 9y$

17. $f(y) = \sin y$.

18. $f(y) = -\cos y$

Considere el sistema:

$$\begin{aligned}y' &= v, \\v' &= f(y)\end{aligned}$$

En los ejercicios 19 al 22, use la función $f(y)$ dada para ayudar a completar cada una de las siguientes tareas:

- I. Use su solución numérica para trazar el retrato de fase del sistema. Rotule y clasifique cada punto de equilibrio como: centro, silla y así sucesivamente.
- II. Use la relación:

$$\frac{1}{2}v^2 + U(y) = E$$

para encontrar la ecuación de las separatrices, trácelas sobre el retrato de fase desarrollado en la parte i.

19. $f(y) = y^3 - y$.

20. $f(y) = y^2(y^2 - 1)$

21. $f(y) = -\sin y$

22. $f(y) = \cos y$

En los ejercicios 23 al 28, encuentre los equilibrios, encuentre el potencial, clasifique los equilibrios (nodos, sillars, espiral, centro, estable o inestable), y grafique el plano de fase usando el potencial.

23. $\frac{d^2x}{dt^2} = x(1 + x^2)$

24. $\frac{d^2x}{dt^2} = -x(1 + x^2)$

25. $\frac{d^2x}{dt^2} = x(1 - x^2)$

26. $\frac{d^2x}{dt^2} = -x(1 - x^2)$

27. $\frac{d^2x}{dt^2} = -x(6 - 3x) = -6x + 3x^2$

28. $\frac{d^2x}{dt^2} = (1 - x^2)(4 - x^2)$

29. Si la fuerza de un resorte de un muelle es una función lineal del desplazamiento, como en $f(y) = -kx$, entonces el modelo $m y'' + k y = 0$, produce un movimiento armónico simple. Pero, ¿qué pasa si la fuerza restauradora del resorte es no lineal? Por ejemplo, se define la fuerza restauradora por $f(y) = -(\alpha y + \beta y^3)$, donde $\alpha > 0$. Defina **la rigidez** del resorte como $f'(y)$. Un resorte **suave** es aquel cuya rigidez disminuye a medida que aumenta el desplazamiento, pero un resorte **duro** es aquel cuya rigidez aumenta con el aumento del desplazamiento. Utilice la gráfica de f' para encontrar condiciones sobre β tales que el resorte definido por f sea un resorte duro (suave).

30. Considere la ecuación: $y'' + \alpha y + \beta y^3 = 0$, la cual es un modelo de un sistema masa resorte ($m = 1$), con una fuerza de restauración no lineal.

I. Si el resorte es duro (ver ejercicio 29), muestre que todas las trayectorias en el plano de fase $y - v$ ($v = y'$) son órbitas cerradas circulando alrededor del origen que es el punto de equilibrio aislado.

II. Si el resorte es suave (ver ejercicio 29), identifique los puntos de equilibrio. Luego encuentre y use una función potencial $U(y)$ para ayudar a trazar el retrato de fase en el plano $y - v$. Encuentre las ecuaciones de las Separatrices e inclúyalas en su gráfica.

31. Suponga que el sistema planar:

$$x' = ax + by$$

$$y' = cx + dy$$

tiene el polinomio cuadrático $H(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$, como una cantidad conservativa. Muestre que: $(a + d)(ad - bc) = 0$. Entonces, la matriz del sistema tiene determinante o traza igual cero.

En los ejercicios 32 al 39 determine si el sistema dado es hamiltoniano. Si el sistema es hamiltoniano, encuentre dicha función.

32.
$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -x + x^3 \end{aligned}$$

33.
$$\begin{aligned} x' &= -2x - 3y^2 \\ y' &= -3x^2 + 2y \end{aligned}$$

34.
$$\begin{aligned} x' &= 5x - 3y^2 \\ y' &= 3x^2 - 4y \end{aligned}$$

35.
$$\begin{aligned} x' &= 3y^2 \\ y' &= -3x^2 \end{aligned}$$

36.
$$\begin{aligned} x' &= x - 4y \\ y' &= 4x + 2y \end{aligned}$$

37.
$$\begin{aligned} x' &= -x + 2y \\ y' &= -2x + y \end{aligned}$$

$$38. \begin{aligned} x' &= -2y \operatorname{sen}(x^2 + y^2) \\ y' &= 2x \operatorname{sen}(x^2 + y^2) \end{aligned}$$

$$39. \begin{aligned} x' &= \cos x \\ y' &= -y \operatorname{sen} x + 2x \end{aligned}$$

40. Una partícula se mueve a lo largo de una recta, de acuerdo a la ecuación de movimiento:

$$x'' = -2x + x^2$$

Donde x marca la posición de la partícula sobre la recta en el tiempo t .

I. Cambie la ecuación a un sistema de primer orden para mostrar que el sistema es hamiltoniano, y encuentre la función hamiltoniana $H(x, y)$ para el sistema.

II. Encuentre la curva de nivel de $H(x, y)$ que contienen las Separatrices para el sistema. Grafique esta curva de nivel; luego sombree en rojo las regiones del plano donde el sistema oscila.

III. ¿Cuántas curvas solución distintas están contenidas en el conjunto de nivel de la parte b)?

41. Los métodos de esta sección se aplican a sistemas físicos con más de un grado de libertad. Suponga que hay dos desplazamientos y_1 , y y_2 con velocidades asociadas $v_1 = y_1'$, y $v_2 = y_2'$ y supongamos que el sistema está modelado por $\mathbf{y}'' = \mathbf{f}(\mathbf{y})$ donde $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$. También tenemos que el vector velocidad está dado por: $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$. Entonces podemos reescribir la ecuación de segundo orden como el sistema de primer orden:

$$\mathbf{y}' = \mathbf{v}$$
$$\mathbf{v}' = \mathbf{f}(\mathbf{y})$$

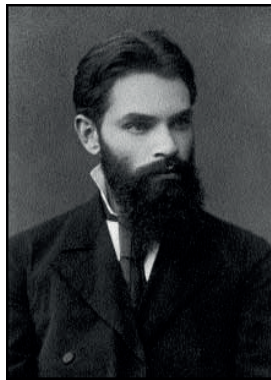
Podemos decir que este sistema es **conservativo** si existe una función $U(\mathbf{y})$ tal que $\frac{\partial U}{\partial y_1} = -f_1$, y $\frac{\partial U}{\partial y_2} = -f_2$. Muestre que si el sistema es conservativo, entonces la energía total:

$$E(\mathbf{y}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + U(\mathbf{y}) = \frac{1}{2} (v_1^2 + v_2^2) + U(\mathbf{y})$$

es una cantidad conservativa para el sistema de primer orden.

10.30 El método de Lyapunov sobre la estabilidad de los sistemas de ecuaciones

Figura 141. Aleksandr Mikhailovich Lyapunov (1857-1918).



Fuente. Farlow, Hall, McDill y West (2007).

Lyapunov nació en Rusia en 1857 y murió de forma violenta en 1918, en Odessa. Su trabajo se concentró en la estabilidad y el equilibrio de un sistema mecánico y la estabilidad de un fluido que gira uniformemente. Ideó métodos importantes de aproximaciones. Los métodos de Lyapunov, los cuales fueron introducidos en 1899, aportaron formas de determinar la estabilidad de un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Introducción

Uno de los más útiles métodos globales para el estudio de la estabilidad fue dado por Aleksandr Lyapunov. La idea clave es la que se ha venido usando ocasionalmente pero que ahora explicaremos en detalle.

Variación de una función a lo largo de una curva solución

Consideremos el sistema autónomo en el plano:

$$\begin{aligned}x' &= f(x, y) \\y' &= g(x, y)\end{aligned}\quad (34)$$

Supongamos que tenemos una función continuamente diferenciable $V(x, y)$, y nos preguntamos cómo V varía a lo largo de una curva solución. Esto significa que tenemos una curva solución $(x(t), y(t))$ para (34) y queremos saber cómo la función $V(x(t), y(t))$ varía cuando t varía. En particular, ¿si ella es creciente o decreciente? Es claro que la forma de encontrar la respuesta es derivando. La regla de la cadena para funciones en distintas variables y el sistema de ecuaciones (34) nos da la respuesta:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} V(x(t), y(t)) &= \frac{\delta V}{\delta x} \frac{dx}{dt} + \frac{\delta V}{\delta y} \frac{dy}{dt} \\ &= \frac{\delta V}{\delta x} f(x, y) + \frac{\delta V}{\delta y} g(x, y)\end{aligned}\quad (35)$$

Observe que el lado derecho de (35) se puede calcular sin saber realmente la solución. Vamos a definir:

$$\dot{V}(x(t), y(t)) = \frac{\delta V}{\delta x}(x, y)f(x, y) + \frac{\delta V}{\delta y}(x, y)g(x, y) \quad (36)$$

Entonces de (35) tenemos:

$$\frac{d}{dt} V(x(t), y(t)) = \dot{V}(x(t), y(t))$$

Podemos decir que V es creciente a lo largo de la curva solución que pasa por el punto (x, y) si $\dot{V}(x, y) > 0$, y es decreciente si $\dot{V}(x, y) < 0$. ¡Podemos hacer esto sin conocer la curva solución!

Vale la pena mirar más de cerca a \dot{V} en la definición (36). Recordemos que el gradiente de V es el vector:

$$\mathbf{Grad} V = \left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y} \right)^T$$

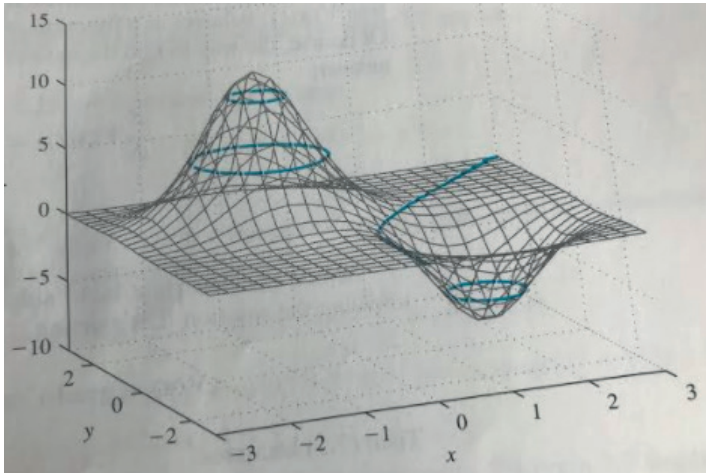
Si ponemos el sistema (35) en forma vectorial, el lado derecho toma la forma del campo vectorial $\mathbf{F} = (f, g)^T$. Observemos que (36) define \dot{V} como el producto punto del vector $\mathbf{Grad} V$ y el campo vectorial \mathbf{F} , es decir:

$$\dot{V} = \mathbf{Grad} V \cdot \mathbf{F}$$

Recordemos que para todo vector \mathbf{v} , el producto punto $\mathbf{Grad} V \cdot \mathbf{v}$ es la derivada de V en la dirección de \mathbf{v} . Entonces, \dot{V} es la derivada de V en la dirección del campo vectorial $\mathbf{F} = (f, g)^T$ definido por el sistema (35).

Vamos a cambiar nuestro punto de vista un momento. Podemos usar la información acerca de cómo V varía a lo largo de una curva solución para obtener nueva información acerca de la curva solución misma. Para esto es útil concebir el plano x - y como un mapa de algún terreno donde las elevaciones están dadas por la función V . Entonces la visión tridimensional del terreno es justamente la gráfica de V . Ver la siguiente figura para un ejemplo.

Figura 142. La gráfica de V con las curvas de nivel en $V = -5, 0, 5$ y 10 .



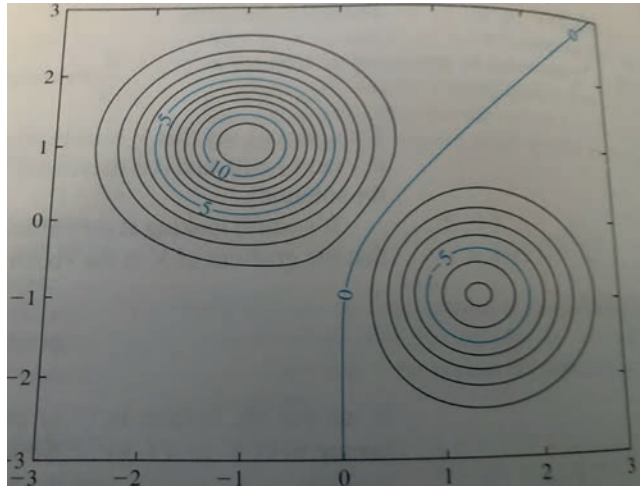
Fuente. Elaborada por el autor con el programa Derive.

Podemos tener una idea de cómo se ve el terreno trazando, las curvas de nivel de V en el plano x - y . Estas son las curvas definidas por $V(x, y) = C$, para varias constantes C . Ya que estamos imaginando que V es la elevación, las curvas de nivel son donde el terreno tiene la misma elevación. Las cuatro curvas de nivel se muestran más oscuras sobre la superficie en la figura 142. Si proyectamos las curvas de nivel sobre el plano x - y , tenemos la figura 141. Esta es llamada un mapa **topográfico** del terreno. Las curvas de nivel de V son las líneas de igual elevación y son usualmente llamadas **líneas de contorno**.

Recordemos que **Grad V** , señala en la dirección en que V está aumentando más rápidamente. En particular, esta dirección es ortogonal a las curvas de nivel de V . Si $V(x, y) > 0$, entonces sabemos que es creciente en la dirección del campo vectorial. Entonces, la elevación a lo largo de la curva solución que pasa por el punto (x, y) es creciente. Mirando de manera ligeramente diferente, esto significa que la curva solución que pasa por (x, y) se está moviendo en la porción del terreno donde la elevación del terreno es mayor que la que hay en

(x, y) . En otras palabras, la curva va cuesta arriba. Similarmente, si $V(x, y) < 0$, la curva solución en (x, y) está cayendo.

Figura 143. Las curvas de nivel de la función V , graficada en la figura 136.



Fuente. Elaborada por el autor con el programa Derive.

Lo dicho anteriormente puede ser transportado para sistemas en dimensiones superiores, aunque la metáfora de la elevación se vuelve complicada. Supongamos que tenemos un sistema autónomo:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (37)$$

Donde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x}))$. De nuevo suponemos que tenemos una función $V(\mathbf{x})$, y nos preguntamos cómo V varía a lo largo de una curva solución. Esto significa que tenemos una solución $\mathbf{x}(t)$ para (37), y queremos conocer cómo la función $V(\mathbf{x}(t))$ se comporta en función de t en particular si ella es creciente o decreciente. Por supuesto que la manera de encontrar la respuesta es derivando. La regla de la cadena nos da la respuesta:

$$\frac{d}{dt} V(\mathbf{x}(t)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i}(\mathbf{x}(t)) \frac{dx_i}{dt}(t)$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i}(\mathbf{x}(t)) f_i(\mathbf{x}(t)) \quad (38)$$

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{Grad} V(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i}(\mathbf{x}) f_i(\mathbf{x})$$

Entonces de (38) tenemos:

$$\frac{d}{dt} V(\mathbf{x}(t)) = \dot{V}(\mathbf{x}(t)).$$

Teorema de Lyapunov

Supongamos que la función V está definida en un conjunto S que incluye el punto \mathbf{x}_0 y satisface

$$V(\mathbf{x}_0) = 0 \text{ y } V(\mathbf{x}) > 0 \text{ para todo } \mathbf{x} \in S \text{ con } \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0 \quad (39)$$

Tal función se dice que está **definida positivamente** en el conjunto S con un mínimo en \mathbf{x}_0 . Si V es una función en dos variables, la gráfica se puede ver con una cuenca en el punto \mathbf{x}_0 , al menos cerca del mínimo \mathbf{x}_0 . Podemos debilitar esta definición diciendo que V es **semidefinida positiva** en S si la desigualdad en (39) es cambiada por $V(\mathbf{x}) \geq 0$ para todo $\mathbf{x} \in S$. Si la desigualdad se invierte, decimos que V es **definida negativa o semidefinida negativa**.

Ejemplo 85:

De acuerdo a la definición anterior clasifique la función $F(x, y) = x^2 + y^2$ en el plano.

Solución:

Es claro que para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = x^2 + y^2$ es positiva, con un mínimo en $(0, 0)$. Más general $V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$, es definida positiva para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^n$, con un mínimo en $\mathbf{0}$.

Ejemplo 86:

Supongamos que se tiene un sistema mecánico conservativo con energía potencial $U(y)$ y energía total $\mathbf{E}(y, v) = 1/2v^2 + U(y)$. Si y_0 es un mínimo local aislado de U entonces $(y_0, 0)$ es un mínimo local aislado de \mathbf{E} . ¿Qué podemos decir de la función $V(y, v) = \mathbf{E}(y, v) - U(y_0)$?

Solución:

Podemos decir que la función $V(y, v) = \mathbf{E}(y, v) - U(y_0)$ es definida positivamente en un conjunto S que contiene $(y_0, 0)$.

Consideremos un sistema (como (34) o (37)) que tienen un punto de equilibrio en \mathbf{x}_0 . Supongamos que podemos encontrar una función V que es definida positivamente sobre un conjunto S en el cual hay un mínimo \mathbf{x}_0 y que tiene la propiedad adicional que $\dot{V}(\mathbf{x})$ definida negativamente sobre S . Entonces cada curva solución se moverá cuesta abajo y aparentemente continuaría haciéndolo hasta que termine en el punto \mathbf{x}_0 . Esto quiere decir que \mathbf{x}_0 es un punto de equilibrio asintóticamente estable. Esta intuición es correcta y sirve como la idea principal en la prueba del siguiente teorema, el cual es debido a Lyapunov.

Teorema

Supongamos que el sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ tiene un punto de equilibrio en x_0 . Suponemos que existe también una función continuamente diferenciable V definida sobre una vecindad U de x_0 que está definida positivamente con un mínimo en x_0 .

Si V es semi-definida negativamente en U , entonces \mathbf{x}_0 es un punto de equilibrio estable.

Si V es definida negativamente en U , entonces \mathbf{x}_0 es un punto de equilibrio asintóticamente estable.

Veamos algunos ejemplos en donde el teorema de Lyapunov se aplica.

Ejemplo 87:

Consideremos el sistema:

$$\begin{aligned}x' &= y + \alpha x(x^2 + y^2), \\y' &= -x + \alpha y(x^2 + y^2)\end{aligned}$$

Aplicar el teorema de Lyapunov en el punto de equilibrio.

Solución:

La función $V(x, y) = (x^2 + y^2)$ es definida positivamente en \mathbb{R}^2 , con un punto mínimo aislado en el origen. Si calculamos:

$$\begin{aligned}\dot{V}(\mathbf{x}) &= \frac{\delta V}{\delta x}(x, y)f(x, y) + \frac{\delta V}{\delta y}(x, y)g(x, y) \\&= 2x(y + \alpha x(x^2 + y^2)) + 2y(-x + \alpha y(x^2 + y^2)) \\&= 2\alpha(x^2 + y^2)^2\end{aligned}$$

Si $\alpha < 0$, \dot{V} es definida negativa en \mathbb{R}^2 . Luego por el teorema de Lyapunov se tiene que el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable. Esto es cierto incluso si el jacobiano del sistema en $(0, 0)$ tiene valores propios imaginarios, lo que significa que el sistema lineal tiene un centro.

Ejemplo 88:

Consideremos el sistema de vibración de un resorte:

$$\begin{aligned}y' &= v \\v' &= -\frac{k}{m}y - \frac{\mu}{m}v\end{aligned}$$

donde el total de energía del sistema es:

$$E(y, v) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}ky^2$$

Analizar el sistema, utilizando el teorema de Lyapunov.

Solución:

Del dato dado tenemos que la energía es positiva sobre \mathbb{R}^2 , la cual tiene un punto aislado mínimo que es el origen. Haciendo los cálculos:

$$\dot{E} = \frac{\partial E}{\partial y} y' + \frac{\partial E}{\partial v} v' = kyv + mv \left(-\frac{k}{m}y - \frac{\mu}{m}v \right) = -\mu v^2$$

Asumiendo que la constante de amortiguamiento es positiva, \dot{E} es semi-definida negativa, luego por el teorema de Lyapunov, el origen es un punto de equilibrio estable. Es necesario conocer más para poder concluir que el origen es asintóticamente estable.

El argumento usado en el ejemplo 26 puede ser aplicado al péndulo y a otros sistemas físicos no lineales.

Se debe notar que si la función V en el teorema de Lyapunov es definida negativa y \dot{V} es definida positiva (o semi), la conclusión aún permanece. Solamente necesitamos reemplazar V por $-V$ para tener una función que satisfice la hipótesis. Toda función que satisfaga la hipótesis (2) del teorema anterior es llamada una **función de Lyapunov**, para el sistema dado, esta es una **función de Lyapunov fuerte** que sí satisfice la condición (1).

Además, el teorema anterior es útil por dos razones. La primera, es que puede serlo algunas veces, cuando el criterio de linealidad mediante el jacobiano no aplica, como en el ejemplo (25). La segunda razón es que la función de Lyapunov está definida sobre su dominio, el cual es usualmente un conjunto bien definido. Es decir, en los dos ejemplos (25) y (26) el dominio es todo \mathbb{R}^2 . El dominio, entonces nos da una idea de la región sobre la cual la estabilidad del punto de equilibrio se extiende. Entonces el teorema de Lyapunov da una estabilidad de tipo global.

La idea clave del método de Lyapunov se resume en el siguiente teorema. A menudo es muy útil por sí mismo.

Teorema

Suponga que el sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ está definido en un conjunto U . Supongamos que $\mathbf{x}(t)$ es una solución que tiene más adelante un conjunto límite ω . Además, supongamos que la función V es continuamente diferenciable en U y satisface:

$$\dot{V}(\mathbf{x}(t)) \leq 0 \text{ para todo } t \geq 0$$

Entonces ω está contenido en el conjunto.

$$\{\mathbf{x} \in U \mid \dot{V}(\mathbf{x}) = 0\}$$

Ejemplo 89:

Aplique el teorema anterior al ejercicio (26).

Solución:

Vimos en el ejemplo que $\dot{E} = -\mu v^2 \leq 0$ en todo \mathbb{R}^2 . De acuerdo con nuestro teorema, el conjunto límite de toda curva solución está contenida en el conjunto $\dot{E} = 0$, el cual es el eje y , definido por $v = 0$. Sin embargo, un conjunto límite puede ser la unión de curvas solución, y la única curva solución contenida en el eje y es el punto de equilibrio en el origen. Entonces toda curva solución para el sistema de vibración de un resorte amortiguado es atraída hacia el origen.

10.31 Ejercicios

En los ejercicios 1 al 10 determine: ¿es la función definida positiva en una vecindad abierta que contiene a $(0, 0)$? ¿es semi-definida positivamente? ¿es definida negativamente? ¿ninguno de estos casos? Justifique su respuesta en cada caso.

1. $V(x, y) = x^2 + 2y^2$

2. $V(x, y) = -x^2 - 2y^2$

3. $V(x, y) = x + y^2$

4. $V(x, y) = (x + y)^2$

5. $V(x, y) = -2y^2$

6. $V(x, y) = x^2$

7. $V(x, y) = x^2 + y$

8. $V(x, y) = 2xy - x^2 - y^2$

9. $V(x, y) = x^2 - 2xy + 3y^2$

10. $V(x, y) = x^2 - 6xy + 9y^2$

11. Pruebe que el polinomio cuadrático $V(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ es definido positivamente con mínimo en $(x, y) = (0, 0)$ si y solo si $a > 0$ y $a \cdot c - b^2 > 0$.

12. Supongamos que $V(x, y)$ es definida negativamente con un máximo en $(0, 0)$.

a. Muestre que $V(x, y) = -S(x, y)$ es una función de Lyapunov para el sistema:

$$\begin{aligned}x' &= \frac{\partial S}{\partial x} \\y' &= \frac{\partial S}{\partial y}\end{aligned}\quad (40)$$

b. Encuentre la función de Lyapunov para el sistema

$$\begin{aligned}x' &= 2y - 2x \\y' &= 2x - 2y - 4y^2\end{aligned}\quad (41)$$

Un sistema de la forma (40) es llamado un **sistema gradiente**. Considere el sistema:

$$x' = y$$

$$y' = -x - y^3$$

Use la regla de la cadena para calcular dV/dt para cada función $V(x, y)$ en los ejercicios 13 al 16 sobre las curvas solución del sistema (41):

13. $V(x, y) = x^2 + y^2$

14. $V(x, y) = x^3 + y^3$

15. $V(x, y) = x^2 + xy - y^2$

16. $V(x, y) = 2x^2 + 3xy - y^2$

17. Considere el sistema:

$$\frac{dx}{dt} = -y - x^3$$

$$\frac{dy}{dt} = x - y^3$$

a. Calculando el jacobiano muestre que la linealización predice que el punto de equilibrio es un centro.

b. Muestre que la función $V(x, y) = x^2 + y^2$ es definida positiva sobre una vecindad del origen. Muestre que \dot{V} es definida negativamente sobre las trayectorias solución del sistema en esta misma vecindad y establezca que el punto de equilibrio en el origen es asintóticamente estable.

c. Trace el retrato de fase del sistema que refleja el comportamiento asintóticamente estable del sistema en el origen.

Use la función definida positiva $V(x, y) = x^2 + y^2$ para argumentar que los sistemas 18 y 19 tienen al origen como un punto de equilibrio asintóticamente estable.

$$18. \begin{cases} x' = -x - 2y^2 \\ y' = 2xy - y^3 \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} x' = -x + y \\ y' = -x - y \end{cases}$$

En los ejercicios 20 y 21, use la función definida positivamente $V(x, y) = x^2 + y^2$ para argumentar que el punto de equilibrio en el origen es asintóticamente estable. En cada ejercicio, trace el retrato de fase para ver el comportamiento asintóticamente estable del origen. (Ayuda: en cada caso \dot{V} puede no ser definida negativamente (o semidefinida negativamente) para todo x, y). Sin embargo, se puede restringir el dominio de V , tal que \dot{V} quede definida semi negativamente sobre una vecindad del origen. De aquí se puede argumentar que el punto de equilibrio es asintóticamente estable.

$$20. \begin{cases} x' = -x + y^2 \\ y' = -xy - x^2 \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} x' = -x + xy \\ y' = -y + xy \end{cases}$$

22. Considere el sistema:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -y^3 - x^3 \end{cases}$$

Muestre que:

$$V(x, y) = \frac{1}{2}x^4 + y^2$$

Está definida positivamente en una vecindad del punto de equilibrio el origen. Además, muestre que \dot{V} está definida seminegativa en la misma vecindad, y que el origen es estable. Finalmente, use el teorema último de esta sección para mostrar que el origen es asintóticamente estable. Trace el retrato de fase del sistema para visualizar la estabilidad en el origen.

23. Considere la ecuación de segundo orden:

$$x'' + x' - \frac{1}{3}(x')^2 + x = 0 \quad (42)$$

Use la sustitución estándar $x_1 = x$, y $x_2 = x'$ para escribir la ecuación (42) como un sistema de ecuaciones lineales de primer orden, que tiene un punto de equilibrio en el origen.

a. Usando la definición de la función positiva $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ muestre que:

$$\dot{V}(x_1, x_2) = -\frac{2}{3}x_2^2(3 - x_1^2)$$

sobre las trayectorias solución del sistema. Asuma que \dot{V} es semidefinida negativa sobre:

$\{(x_1, x_2) \mid |x_2| < \sqrt{3}\}$. Y muestre que el punto de equilibrio en el origen es estable.

b. Dado que \dot{V} es semidefinida negativa sobre $\{(x_1, x_2) \mid |x_2| < \sqrt{3}\}$, use el último teorema de esta sección para argumentar que el punto de equilibrio en el origen es asintóticamente estable. Trace un retrato de fase del sistema para visualizar la estabilidad asintótica del punto de equilibrio en el origen.

Muestre que las ecuaciones diferenciales de segundo orden en los ejercicios 24 y 25 tienen solución en $\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$ punto de equilibrio asintóticamente estable. (Ayuda: ver los ejercicios 22 y 23).

$$24. x'' + x' + x^3 = 0$$

$$25. x'' + (x')^2 + x^3 = 0$$

26. Sean m , g , y L constantes positivas.

a. Muestre que:

$$V(\theta, \omega) = \frac{1}{2}mL^2\omega^2 + mgL(1 - \cos\theta) \quad (43)$$

Es definida positiva en una vecindad abierta que contiene $(\theta, \omega) = (0, 0)$.

b. Muestre que $\dot{V}(\theta, \omega)$ es semidefinida negativamente sobre la trayectoria solución de:

$$\theta' = \omega$$

$$\omega' = -\frac{\mu}{m}\omega - \frac{g}{L}\sin\theta$$

Sobre una vecindad abierta que contiene a $(\theta, \omega) = (0, 0)$.

27. Considere la ecuación de segundo orden:

$$x'' + f(x)x' + g(x) = 0 \quad (44)$$

Donde $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas diferenciales que satisfacen:

I. $f(x) > 0$ para todo x , y .

II. $g(x) > 0$ para todo $|x| < k$, donde k es un número real positivo.

a. Muestre que $g(x) = 0$ y trace algunas posibles gráficas paraa función g . Defina:

$$G(x) = \int_0^x g(u) du$$

Muestre que G tiene un mínimo absoluto en $x = 0$.

b. Muestre que la ecuación (44) tiene un sistema de ecuaciones de primer orden equivalente representado por:

$$\begin{aligned}x' &= y \\ y' &= -f(x)y - g(x) \quad (45)\end{aligned}$$

Entonces muestre que la función:

$$V(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + G(x)$$

Es definida positiva en una vecindad que contiene al origen.

C. Muestre que la función V es semi-definida negativa sobre la trayectoria solución del sistema (45). Entonces use el teorema último de Lyapunov visto en esta sección, para argumentar que el origen es asintóticamente estable.

CAPÍTULO 11.

TRANSFORMADA DE LAPLACE

Contenido

11.1	La transformada de Laplace y su inversa	495
11.2	Ejercicios	512
11.3	Solución de ecuaciones diferenciales lineales con valores iniciales, mediante la transformada de Laplace	518
11.4	Ejercicios	539
11.5	La función escalón y la función delta de Dirac	544
11.6	Ejercicios	581
11.7	La convolución de funciones y la función de transferencia	600
11.8	Ejercicios	614
11.9	Solución de un sistema lineal de ecuaciones mediante la transformada de Laplace	624
11.10	Ejercicios	634

Competencias

1. Interpretar y analizar la transformada de Laplace.
2. Reconocer y aplicar las propiedades de la transformada de Laplace.
3. Aplicar la transformada de Laplace en la solución de PVI.

Figura 144. Pierre-Simón de Laplace (1749-1827).



Fuente. Enciclopedia Británica (Biblioteca virtual de la Universidad EAN):

El físico matemático francés Pierre-Simón de Laplace realizó la mayor parte de su trabajo matemático, al aplicar la teoría newtoniana de la gravitación al sistema solar en conjunto. Su obra **Mecánica celeste**, un texto de dos mil páginas publicadas en partes entre 1799 y 1825, demostró la estabilidad del sistema solar según sus hipótesis simplificadoras. Laplace no solo fue un gran matemático, sino también un político destacado, habiendo examinado y aprobado al joven Napoleón Bonaparte de 16 años para que ingresara en el Colegio Militar Francés en 1785. Laplace sobrevivió la revolución francesa y los muchos cambios en la estructura política dada en los años posteriores. Uno se pregunta qué habría pasado con la historia europea si Laplace hubiera reprobado a Napoleón.

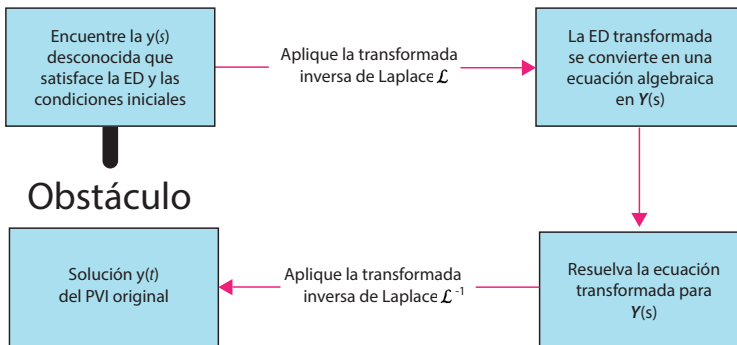
Introducción

En este capítulo, estudiaremos la transformada de Laplace, como una transformada entre espacios de funciones, como una estrategia de desviación para cambiar una ecuación diferencial lineal con condición inicial en un problema algebraico fácil de resolver.

11.1 La transformada de Laplace y su inversa

La estrategia de transformar un problema difícil en un problema equivalente pero más tratable es un proceso muy común en matemáticas (y en otras áreas)¹. En este capítulo, discutiremos la estrategia de solución de la transformada de Laplace $\mathcal{L}: V \rightarrow W$, una transformación lineal entre espacios vectoriales de funciones V y W .

Figura 145. Puente de la transformada de Laplace entre espacios de funciones.



Fuente. Elaborado por el autor.

¹ Para más problemas que se analizan de esta forma ver Z. A. Melzak. *Bypasses*. John Wiley (1953).

Estrategia de puente usando la transformada de Laplace

En esta sección nos concentraremos en el cálculo de la transformada de Laplace para funciones elementales. Luego, en la sección siguiente veremos cómo se aplica para reformular algebraicamente una ecuación diferencial. Después de resolver la ecuación algebraica resultante, podemos transformarla mediante la transformada inversa \mathcal{L}^{-1} de W en V .

Definición y propiedades

Transformada de Laplace

La transformada **de Laplace** $\mathcal{L}\{f(t)\}$ de una función adecuada $f(t)$ definida sobre $[0, \infty)$ es la función $F(s)$ dada por:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} f(t) dt \quad (1)$$

Donde s puede ser un número complejo.

Si este límite falla para la existencia, entonces $f(t)$ es «inadecuada» para la transformada de Laplace. Funciones $f(t)$ son del dominio si para ellas la integral impropia existe.

Se sigue de inmediato por las propiedades de la integral que la transformada de Laplace es lineal.

Linealidad de la transformada de Laplace

Si $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ y $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$, entonces:

$$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\} \quad (2)$$

Para todo a y $b \in \mathbb{R}$, o (\mathbb{C}) .

Ejemplo 1:

Para la función constante $f(t) = 1$, para $t \geq 0$, calcular $\mathcal{L}\{f(t)\}$

Solución:

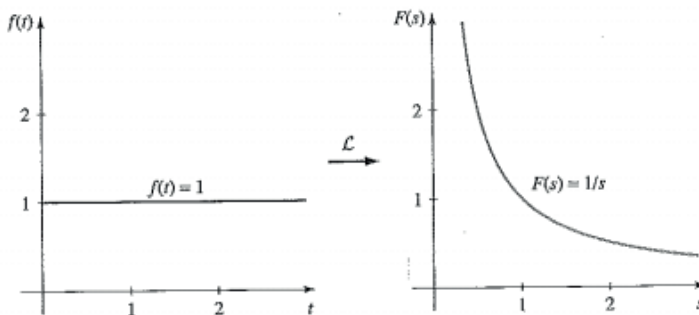
$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t)\} &= \mathcal{L}\{1\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot 1 dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{e^{-st}}{s} \right]_0^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{e^{-sb}}{s} + \frac{1}{s} \right]\end{aligned}$$

Si $s > 0$, entonces $e^{-sb} = \frac{1}{e^{sb}} \rightarrow 0$ cuando $b \rightarrow \infty$. Luego:

$$\mathcal{L}\{1\} = F(s) = \frac{1}{s}, s > 0. \quad (3)$$

Entonces tenemos nuestro primer par de la transformación:
 $f(t) = 1$, $F(s) = \frac{1}{s}$, para $s > 0$ (figura 146):

Figura 146. Gráfica de la transformada de Laplace de $f(t) = 1$.



Fuente. Elaborada por el autor con el programa Derive.

Ejemplo 2. Transformada de una exponencial:

Dada $f(t) = e^{at}$, a cualquier constante real, calcular $\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{e^{at}\}$.

Solución:

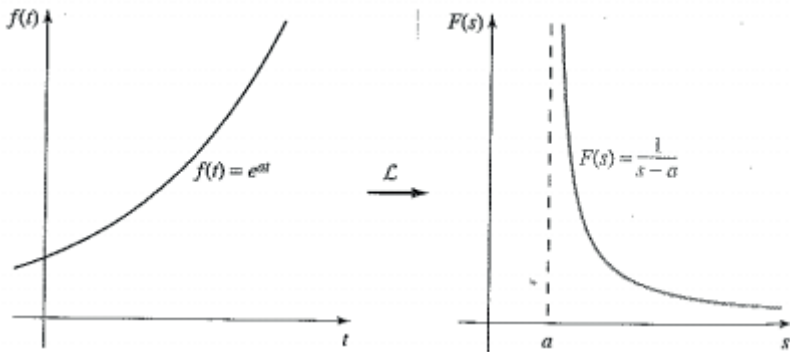
$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot e^{at} dt &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-(s-a)t} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{e^{-(s-a)t}}{s-a} \right] \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{e^{-(s-a)b}}{s-a} + \frac{1}{s-a} \right] \end{aligned}$$

Luego:

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = F(s) = \frac{1}{s-a}, s > a \quad (4)$$

Entonces tenemos nuestro segundo par de transformada:
 $f(t) = e^{at}$, $F(s) = \frac{1}{s-a}$, $s > a$ (figura 147):

Figura 147. Gráfica de la transformada de Laplace de $f(t) = e^{at}$.



Fuente. Elaborada por el autor con el programa Derive.

Ejemplo 3. Explorando la linealidad:

Usando el ejemplo 1 y 2, hallar la transformada de la función $f(t) = 5 - 3e^{-2t}$.

Solución:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{5 - 3e^{-2t}\} = 5\mathcal{L}\{1\} - 3\mathcal{L}\{e^{-2t}\},$$

Luego:

$$F(s) = 5\left(\frac{1}{s}\right) - 3\left[\frac{1}{s-(-2)}\right] = \frac{2s+10}{s(s+2)}$$

Ejemplo 4. Transformada de Laplace de potencias de t:

Calcular la transformada de Laplace de $f(t) = t^n$, para n entero positivo.

Solución:

Debemos calcular $\mathcal{L}\{t^n\} = \int_0^{\infty} e^{-st} t^n dt$, esta integral se puede calcular por partes para n entero positivo. Pero la podemos calcular haciendo el cambio de variable en la integral:

$$x = s t, \quad dx = s dt.$$

Recordemos que la variable de integración es t , y s se trata como una constante. Luego, nuestra integral se transforma en:

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \int_0^{\infty} e^{-st} x^n dt = \int_0^{\infty} e^{-x} \left(\frac{x}{s}\right)^n \frac{dx}{s} \quad (5)$$

O:

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{1}{s^{n+1}} \int_0^{\infty} e^{-x} x^n dx$$

Esta igualdad es válida mientras s sea positivo (esta suposición de s es necesaria para que el límite superior de integración permanezca como ∞). La fórmula dada anteriormente muestra que la transformada de Laplace de t^n es un múltiplo constante de $\frac{1}{s^{n+1}}$, con dicha constante igual a la integral impropia $\int_0^{\infty} e^{-x} x^n dx$.

Esta integral impropia converge para todo $n > -1$, y diverge para todo $n \leq -1$. Luego $\mathcal{L}\{t^n\}$ existe si y solo si $n > -1$, incluyendo valores fraccionarios e irracionales de n , así como enteros. Sin embargo, se verá que la misma integral resulta más fácil de evaluar cuando n es entero.

Específicamente, probaremos si n es un entero positivo:

$$\int_0^{\infty} e^{-x} t^n dt = n!$$

Luego si esto es así, tendríamos que:

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}} \text{ para } n = 1, 2, 3, \dots \quad (5)$$

En particular:

$$\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}$$

$$\mathcal{L}\{t^2\} = \frac{2}{s^3}$$

$$\mathcal{L}\{t^3\} = \frac{6}{s^4}$$

$$\mathcal{L}\{t^4\} = \frac{24}{s^5}$$

⋮

Para completar la deducción de nuestra fórmula, se debe establecer la veracidad de: $\int_0^{\infty} e^{-t} t^n dt = n!$

para todo entero n positivo. Esto se puede ver mediante integración por partes con:

$$u = t^n, \quad dv = e^{-t} dt$$

Luego:

$$du = nt^{n-1} dt, \quad v = -e^{-t}$$

Por lo tanto:

$$\int_0^{\infty} e^{-t} t^n dt = -e^{-t} t^n \Big|_0^{\infty} + n \int_0^{\infty} e^{-t} t^{n-1} dt$$

Pero:

$$-e^{-t} t^n \Big|_0^{\infty} = -\lim_{t \rightarrow \infty} (e^{-t} t^n) = 0$$

Esto se puede ver, usando la regla de L'hopital, n veces a:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{t^n}{e^t} \right)$$

Luego nuestra integral se vuelve:

$$\int_0^{\infty} e^{-t} t^n dt = n \int_0^{\infty} e^{-t} t^{n-1} dt \quad (6)$$

para cualquier entero positivo n.

Haciendo n = 1, se tiene:

$$\int_0^{\infty} e^{-t} t dt = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_0^{\infty} = e^{-t} \Big|_{\infty}^0 = 1 \quad (7)$$

Luego si n = 1, se cumple nuestro resultado.

Cuando n = 2, se tiene de (6) que:

$$\int_0^{\infty} e^{-t} t^2 dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-t} t dt$$

de acuerdo con (7), es igual a 2. Enseguida para n = 3, tenemos:

$$\int_0^{\infty} e^{-t} t^3 dt = 3 \int_0^{\infty} e^{-t} t^2 dt = 3 \cdot 2 = 6$$

Y en general:

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} e^{-t} t^n dt &= n \int_0^{\infty} e^{-t} t^{n-1} dt \\ &= n(n-1) \int_0^{\infty} e^{-t} t^{n-2} dt \\ &= n(n-1)(n-2) \int_0^{\infty} e^{-t} t^{n-3} dt \\ &\vdots \\ &= n!\end{aligned}$$

De esta manera se ha probado nuestro resultado. Otra forma de ver el resultado del teorema anterior sería la siguiente:

Se tiene por definición de la transformada de Laplace que:

$$F(S) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (8)$$

Derivando esta ecuación (8) con respecto a s , obtenemos:

$$F'(s) = \frac{d}{ds} \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_0^{\infty} \frac{\delta}{\delta s} (e^{-st} f(t) dt) = \int_0^{\infty} (-t e^{-st} f(t) dt)$$

Por lo tanto, tenemos:

$$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -F'(S) \quad (9)$$

Es decir que para la transformada de Laplace, multiplicar a $f(t)$ por t corresponde a tomar menos la derivada de la transformada de $f(t)$.

En un diagrama se tiene:

$$\begin{array}{ccc} f(t) & \xrightarrow{\quad} & F(s) \\ \downarrow \cdot t & & \downarrow \\ t f(t) & \xrightarrow{\quad} & -\frac{\partial}{\partial s} F(s) \end{array}$$

Usando este hecho de la derivada de una transformada, podemos calcular la transformada de una potencia de t , es decir $\mathcal{L}\{t^n\}$, de la siguiente forma:

Sabemos que si $f(t) = 1$, entonces $F(s) = \frac{1}{s}$,

Luego:

$$\begin{aligned}
 F(1) &= \frac{1}{s} \\
 \mathcal{L}\{t\} &= \mathcal{L}\{t \cdot 1\} = -\frac{\partial}{\partial s} \mathcal{L}\{1\} = -\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{s} \right) = \frac{1}{s^2}, \\
 \mathcal{L}\{t^2\} &= \mathcal{L}\{t \cdot t\} = -\frac{\partial}{\partial s} \mathcal{L}\{t\} = -\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{s^2} \right) = \frac{2}{s^3}, \\
 \mathcal{L}\{t^3\} &= \mathcal{L}\{t \cdot t^2\} = -\frac{\partial}{\partial s} \mathcal{L}\{t^2\} = -\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{2}{s^3} \right) = \frac{3!}{s^4}, \\
 &\vdots \\
 \mathcal{L}\{t^n\} &= \frac{n!}{s^{n+1}}
 \end{aligned}$$

que es el mismo resultado obtenido anteriormente.

Ejemplo 5. Usando la propiedad (9):

Encuentre $\mathcal{L}\{te^{at}\}$ usando (9).

Solución:

Usando (9) con $f(t) = e^{at}$, sabemos que $F(s) = \frac{1}{s-a}$, luego:

$$\mathcal{L}\{te^{at}\} = -\frac{\partial}{\partial s} \frac{1}{s-a} = \frac{1}{(s-a)^2}$$

Ejemplo 6. Transformada de un polinomio:

Calcular la transformada del polinomio $t^8 - 7t^3 + 2t^2$.

Solución:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{t^8 - 7t^3 + 2t^2\} &= \mathcal{L}\{t^8\} - 7\mathcal{L}\{t^3\} + 2\mathcal{L}\{t^2\} = \frac{8!}{s^9} + 7\frac{3!}{s^4} + 2\frac{2!}{s^3} \\ &= \frac{8!}{s^9} - \frac{42}{s^4} + \frac{4}{s^3}\end{aligned}$$

Ejemplo 7. Transformada de Laplace de seno y coseno:

Calcular la transformada de Laplace de las funciones $f(t) = \cos(kt)$ y $f(t) = \sin(kt)$.

Solución:

La definición de la transformada de Laplace puede ser usada para determinar directamente la definición $\mathcal{L}\{f(\cos kt)\}$ y $\mathcal{L}\{f(\sen kt)\}$, sin embargo, la integral requiere una doble integración por partes. Es más sencillo utilizar la linealidad de la transformada para simplificar el proceso, si se extiende la propiedad (2) tomando las constantes en los números complejos y recordando la fórmula de Euler, es decir:

$$\mathcal{L}\{e^{ikt}\} = \mathcal{L}\{\cos kt + i \sen kt\} = \mathcal{L}\{\cos kt\} + i\mathcal{L}\{\sen kt\} \quad (10)$$

Por el ejemplo (2), y ecuación (4), tenemos que para $s > \text{Re}(ik) = 0$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{e^{ikt}\} &= \frac{1}{s - ik} = \frac{1}{s - ik} \cdot \frac{s + ik}{s + ik} = \frac{s + ik}{s^2 - (i)^2(k)^2} \\ \mathcal{L}\{e^{ikt}\} &= \frac{s}{s^2 + k^2} + i\frac{k}{s^2 + k^2} \quad (11)\end{aligned}$$

Por la igualdad de números imaginarios y de (10) y (11) obtenemos:

$$\mathcal{L}\{\cos(kt)\} = \frac{s}{s^2 + k^2} \quad \text{y} \quad \mathcal{L}\{\sen(kt)\} = \frac{k}{s^2 + k^2}, s > 0$$

No cualquier función tiene una transformada de Laplace. Ya se ha mencionado, por ejemplo, que $\mathcal{L}\{t^n\}$ existe solamente cuando $n > -1$. Así, por ejemplo la función $f(t) = t^{-1}$ no tiene transformada de Laplace. Para ver que esto es cierto, calculemos su transformada:

$$\mathcal{L}\{t^{-1}\} = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{-1} dt$$

Veamos que esta integral diverge. Por la ecuación (5), se tiene:

$$\int_0^{\infty} e^{-t} t^{-1} dt \geq \int_0^1 e^{-t} t^{-1} dt \geq e^{-1} \int_0^1 t^{-1} dt = e^{-1} \ln t \Big|_0^1 = -e^{-1} \lim_{t \rightarrow 0^+} (\ln t) = \infty$$

La transformada de Laplace siempre existe para una importante clase de funciones $f(t)$:

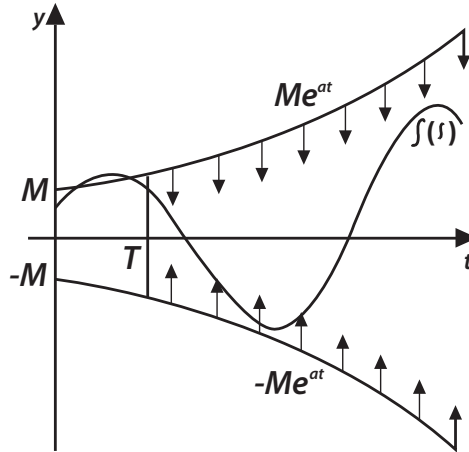
Función discontinua a trozos en $[0, \infty)$ y de orden exponencial α .

Exponencial de orden α , significa que $f(t)$ no crece más rápido que una función exponencial con exponente lineal. La función $f(t) = 1$, usada en el ejemplo 1, y los $f(t)$ dados en los ejemplos siguientes son de orden exponencial. La función $f(t) = e^{t^2}$ no es de orden exponencial porque t^2 crece mucho más rápido que kt para cualquier constante k .

En resumen $f(t)$ es de orden exponencial α para todo número real α si existen constantes T y M tal que:

$$|f(t)| \leq M e^{\alpha t}, \text{ para } t \geq T$$

Esta propiedad se ilustra en la figura 148.

Figura 148. Significado de lo que significa una función de orden exponencial.

Fuente. Elaborada por el autor con el programa Derive.

Estas ideas nos dan el siguiente teorema, que dice que si f es «amortiguable» por alguna función exponencial entonces la transformada de Laplace existe.

Teorema de existencia de la transformada de Laplace²

Si $f(t)$ es una función continua a trozos en $[0, \infty)$ y es de orden exponencial α , entonces la transformada de Laplace $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ existe para $s > \alpha$.

Ejemplo 8. Transformada de una función continua a trozos:

Calcular $\mathcal{L}\{f(t)\}$ para la función:

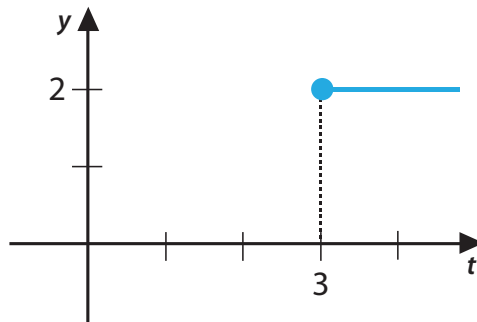
$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < 3 \\ 2 & \text{si } t \geq 3 \end{cases}$$

² Para una prueba del teorema de la existencia, se puede ver el libro de M. Braum (1983). *Differential Equations and Their applications*. Tercera edición. Springer – Verlag.

Solución:

La función que se muestra en la figura 6 es continua a trozos y de orden exponencial para $t > 0$. Como f está definida en dos partes, entonces $\mathcal{L}\{f(t)\}$ se puede expresar como la suma de dos.

Figura 149. Gráfica de la función $f(t)$ dada.



Fuente. Elaborada por el autor.

Integrales:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_0^3 e^{-st} \cdot 0 dt + \int_3^{\infty} e^{-st} \cdot 2 dt \\ &= 0 + \left. \frac{2 \cdot e^{-st}}{-s} \right|_3^{\infty} = \frac{2e^{-3t}}{s}, s > 0.\end{aligned}$$

Es bueno observar que no toda función en s es una transformada de Laplace de una función continua a trozos; el siguiente teorema nos da una condición que debe cumplir la transformada de Laplace.

Teorema: (Comportamiento de $F(s)$ cuando $s \rightarrow \infty$)

Si f es continua a trozos en $[0, \infty)$ y de orden exponencial y $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, entonces:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0$$

La transformada inversa

Una función $f(t)$ cuya transformada es $F(s)$ es llamada la **transformada inversa de Laplace** de F , y escribimos $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$

Ejemplo 9. Trabajando hacia atrás:

De qué función $f(t)$ es:

$$F(s) = \frac{2s-14}{(s+1)(s-3)}$$

la transformada de Laplace.

Solución:

Por la teoría de fracciones parciales, se tiene³:

$$F(s) = \frac{4}{s+1} - \frac{2}{s-3} = 4 \cdot \frac{1}{s+1} - 2 \cdot \frac{1}{s-3}$$

Entonces por la linealidad y (4), tenemos:

$$F(s) = 4 \cdot \mathcal{L}\{e^{-t}\} - 2 \cdot \mathcal{L}\{e^{3t}\} = \mathcal{L}\{4e^{-t} - 2e^{3t}\}$$

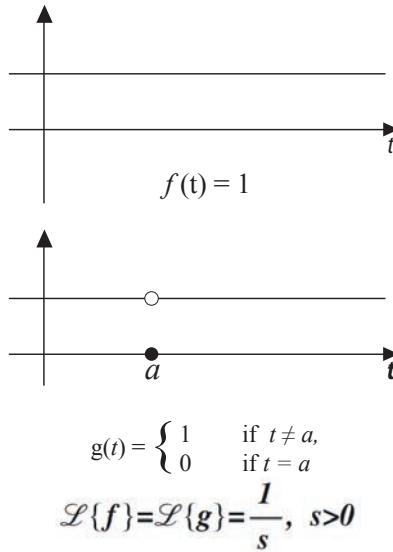
Por lo tanto:

$$f(t) = 4e^{-t} - 2e^{3t}$$

Podemos preguntarnos, ¿cómo sabemos que hay una función $f(t)$ que tiene tal transformación $F(s)$, si solo existe uno de tales objetos? Con ciertas excepciones que implican cómo se definen las funciones continuas a trozos en sus puntos de salto, es cierto que \mathcal{L} es una transformación inyectiva o uno a uno.

Como la transformada de Laplace involucra integrales, los puntos de discontinuidad no pueden afectar sus valores. Para las transformaciones inversas de Laplace simplemente elegimos la versión continua de la función (figura 150).

3 Este ejemplo usa la descomposición en fracciones parciales de $\frac{2s-14}{(s+1)(s-3)}$.

Figura 150. Interpretación gráfica para las transformadas inversas.


Fuente. Elaborada por el autor.

Manejando las tablas

Tabla 1. Tabla corta de transformada de Laplace.

	$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	
(i)	1	$\frac{1}{s}$	$S > 0$
(ii)	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$S > 0$, n entero positivo
(iii)	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$S > a$
(iv)	$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$S > a$, n entero positivo
(v)	Sen (bt)	$\frac{b}{s^2 + b^2}$	$S > 0$
(vi)	Cos (bt)	$\frac{s}{s^2 + b^2}$	$S > 0$
(vii)	$e^{at} \text{sen}(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2 + b^2}$	$S > a$
(viii)	$e^{at} \text{cos}(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}$	$S > a$
(ix)	Senh (bt)	$\frac{b}{s^2 - b^2}$	$S > b $
(x)	Cosh (bt)	$\frac{s}{s^2 - b^2}$	$S > b $

Fuente. Elaborada por el autor.

La aplicación práctica de la transformada de Laplace depende de tener un almacén sustancial de «pares de transformación» (como los que se calcularon en los ejemplos 3, 5, y 6), para transformar y luego transformar de nuevo hacia atrás. La tabla anterior puede ser adecuada de acuerdo con nuestras necesidades; una versión más larga está dentro de la contraportada, y las colecciones más extensas están disponibles en varios libros de referencia. Los problemas 21, 22, 24 y 31 proporcionan verificación de entradas en la tabla que no están cubiertas por los ejemplos anteriores.

Por supuesto, una tabla de pares de transformaciones es también una tabla de pares de transformaciones inversas. En el uso de la tabla para implementar el viaje de regreso \mathcal{L}^{-1} , se requiere un poco de ingenio algebraico, como ilustra el siguiente ejemplo, incluyendo completar el cuadrado, fracciones parciales, y agregar o restar la misma cantidad, o multiplicar y dividir por la misma cantidad.

Ejemplo 10. Transformada inversa cuando el denominador es $s^2 + b^2$:

Dado $F(s) = \frac{2s+5}{s^2+9}$, encontrar $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$.

Solución:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{2\frac{s}{s^2+9} + \frac{5}{3}\frac{3}{s^2+9}\right\} \\ &= 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\} + \frac{5}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+9}\right\} \\ &= 2\cos 3t + \frac{5}{3}\operatorname{sen}3t \quad \text{por casillas (v) y (vi) de la tabla.}\end{aligned}$$

Ejemplo 11. Usando el resultado de la derivada:

Encuentre $\mathcal{L}\{t \operatorname{sen} bt\}$

Solución:

$$\mathcal{L}\{t \operatorname{sen} bt\} = -\frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{b}{S^2 + b^2} \right) = \frac{2bs}{(S^2 + b^2)^2}$$

De manera similar se puede ver que:

$$\mathcal{L}\{t \operatorname{cos} bt\} = \frac{S^2 - b^2}{(S^2 + b^2)^2}$$

Ejemplo 12. Utilizando fracciones parciales:

Utilizar la descomposición en fracciones parciales, y la tabla dada anteriormente para encontrar la inversa de Laplace de la expresión:

$$F(s) = \frac{2s^2 - s + 11}{(s-1)(s^2 + 5)}$$

Solución:

Recordando la descomposición en fracciones parciales, se tiene que $F(s)$ se puede escribir como:

$$F(s) = \frac{2}{s-1} - \frac{1}{s^2+5}$$

Podemos adaptar el primer término de esta expresión con la casilla (iii) de nuestra tabla y el segundo término con la casilla (v) tomando $b = \sqrt{5}$. Luego reescribiendo $F(s)$ como:

$$F(s) = \underbrace{2 \left(\frac{1}{s-1} \right)}_{\mathcal{L}(e^t)} - \underbrace{\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{\sqrt{5}}{s^2 + (\sqrt{5})^2} \right)}_{\mathcal{L}(\operatorname{sen}\sqrt{5}t)}$$

De donde obtenemos:

$$F(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = 2e^t - \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{sen}(\sqrt{5}t)$$

11.2 Ejercicios

Transforma por definición. Use la definición por integral para calcular la transformada de Laplace de la función de cada uno de los problemas 1 al 13:

1. $f(t) = 5$

2. $f(t) = t$.

3. $f(t) = e^{2t}$

4. $f(t) = e^{-t}$

5. $f(t) = \text{sen}(2t)$

6. $f(t) = \text{cos}(3t)$

7. $f(t) = t^2$

8. $F(t) = 3 - e^{2t}$

9. $f(t) = \frac{1+e^{3t}}{t}$

10. $F(t) = t(t^2 - 1)^2$

11. $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < 4, \\ 0 & \text{si } t \geq 4 \end{cases}$

12. $f(t) = \begin{cases} t - 1 & \text{si } 0 \leq t < 2, \\ 1 & \text{si } t \geq 2 \end{cases}$

13. $f(t) = \begin{cases} 1 - t^2 & \text{si } 0 \leq t < 1, \\ 0 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$

En los ejercicios 14 al 23, utilice el resultado (9) para calcular la transformada de Laplace.

14. te^{5t}

15. te^{-5t}

16. $t \text{ cos}(5t)$

17. $t \text{ sen}(5t)$

18. $t^2 \text{ Cos}(3t)$

19. $t^2 \text{ Cos}(3t)$

20. $te^{5t} \text{ sen } 3t$

21. $te^{5t} \text{ cos } 2t$

22. $te^{-4t} \text{ cos } 5t$

23. $te^{-4t} \text{ sen } 6t$

Transformando con herramientas. Use la propiedad de linealidad y la tabla de transformadas para determinar la transformada de Laplace en los problemas del 24 al 31.

$$24. f(t) = a + b t + c t^2$$

$$25. f(t) = 1 + e^{-t}$$

$$27. f(t) = e^{2t} + e^{-3t}$$

$$28. f(t) = 3 + t + e^{-t} \sin(2t)$$

$$29. f(t) = (t + 3t^2)e^{-t}$$

$$30. f(t) = t^3 e^{-3t} + 4e^{-t} \cos(3t).$$

$$31. f(t) = 2e^{at} - e^{-at}$$

$$32. f(t) = t e^{-3t} + 2 \sin t$$

33. Linealidad de la transformada de Laplace. Pruebe que la transformada de Laplace \mathcal{L} es una transformación lineal, mostrando que para todas f y g cuyas transformaciones existen, se cumple que:

$$\mathcal{L}\{f + g\} = \mathcal{L}\{f\} + \mathcal{L}\{g\}$$

$$\mathcal{L}\{c f\} = c \mathcal{L}\{f\}$$

Donde $c \in \mathbb{C}$, una constante arbitraria.

34. ¿Existe una regla del producto? Vimos que la transformada de Laplace de una suma es la suma de las transformadas. Existe una regla para el producto, es decir ¿

$\mathcal{L}\{f \cdot g\}$ es igual a $\mathcal{L}\{f\} \cdot \mathcal{L}\{g\}$? Muestre que la respuesta es no. Ayuda: Prueba con algunos ejemplos particulares.

35. Transformada de Laplace de las funciones seno y coseno amortiguadas. Para verificar las entradas en las filas (vii) y (viii) en la tabla, considere la identidad:

$$e^{(\alpha+ik)t} = e^{\alpha t} e^{ikt} = e^{\alpha t} (\cos kt + i \sin kt).$$

a. Muestre que:

$$\mathcal{L}\{e^{(a+ik)t}\} = \frac{1}{s - (a + ik)} = \frac{s - a}{(s - a)^2 + k^2} + i \frac{k}{(s - a)^2 + k^2}$$

b. Use el resultado obtenido en a. y el hecho de que la transformada de Laplace es lineal para mostrar que:

$$\mathcal{L}\{e^{\alpha t} \cos kt\} = \frac{s - a}{(s - a)^2 + k^2}$$

Y,

$$\mathcal{L}\{e^{\alpha t} \sin kt\} = \frac{k}{(s - a)^2 + k^2}$$

(Ver el ejemplo 7 para hacer una prueba similar.)

36. Transformada de Laplace para funciones hiperbólicas.

Use la propiedad de la linealidad de la Transformada de Laplace y el hecho de que $\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{(s-a)}$ para $s > 0$, para verificar las entradas (ix) y (x) de la tabla. Ayuda: Use la definición de las funciones hiperbólicas trigonométricas:

$$\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \quad \text{y} \quad \cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

37. Usando las funciones hiperbólicas, utilice la propiedad de linealidad y la tabla dada para determinar:

a. $\mathcal{L}\{\cosh^2 bt - \sinh^2 bt\}$ para $s > |b|$

b. $\mathcal{L}\{t^2 \cosh^2 bt\}$ para $s > |b|$

38. **Regla de la potencia.** Verifique la entrada (ii) de la tabla, de la siguiente manera:

a. Muestre que:

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n}{s} \mathcal{L}\{t^{n-1}\} \text{ Para } n \geq 2$$

usando integración por partes.

b. Usando la parte a, dé la prueba por inducción que:

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

39. **Regla multiplicadora.** Asuma que f es una función tal que:

$$\frac{d}{ds} \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \int_0^\infty \frac{d}{ds} (e^{-st}) f(t) dt$$

Use este supuesto para mostrar que si $\mathcal{L}\{tf(t)\} = F(s)$, entonces:

$$\mathcal{L}\{tf(t)\} = - \frac{dF(s)}{ds}$$

Aplicaciones de la regla multiplicadora. Use la regla multiplicadora del problema 25 para calcular la transformada de Laplace de las funciones dadas en los problemas 29 al 33.

40. te^t

41. $t \operatorname{sen} 3t$

42. $t \operatorname{cosh} bt$.

43. $3t \cos at$

44. $-2t \sinh 2t$

45. **Cambio exponencial.** Muestre que si $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ para $s > 0$, entonces:

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s - a), s > a$$

Usando el cambio exponencial. Use la propiedad del cambio exponencial del ejemplo 31 para calcular la transformada de Laplace de las funciones dadas en los problemas 35 al 40.

46. $t^n e^{at}$

47. $e^t \sin 2t$

48. $e^{-t} \cos 3t$

49. $e^{2t} \cosh 3t$

50. $e^{-3t} \sinh t$

51. $te^{2t} \sin 3t$

52. **Linealidad de la inversa.** Muestre que la transformada inversa de Laplace es lineal: es decir que, para funciones $F(s)$ y $G(s)$ en el rango de \mathcal{L} y constantes reales a y b .

$$\mathcal{L}^{-1}\{aF(s) + bG(s)\} = a\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + b\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$$

Transformada inversa. Determine la transformada inversa de Laplace $f(t)$ de las funciones $F(s)$ en los problemas 42 al 56.

53. $\frac{1}{s^3}$

54. $\frac{2}{s} + \frac{3}{s-1} + \frac{7}{s^3}$

55. $\frac{5}{s^3+3}$

56. $\frac{3}{s-3} + \frac{4}{s+3}$

57. $\frac{1}{s^2+3s}$

58. $\frac{s+1}{s^2+2s+10}$

59. $\frac{1}{s^2+4s+4}$

60. $\frac{3s+5}{s^2-6s+25}$

61. $\frac{s+1}{s^2+s-2}$

62. $\frac{5}{s^2+s-6}$

$$63. \frac{2s+4}{s^2-1}$$

$$64. \frac{7}{s^2+4s+7}$$

$$65. \frac{2s+16}{s^2+4s+13}$$

$$66. \frac{4}{s^2(s^2+4)}$$

$$67. \frac{3}{(s^2+1)(s^2+4)}$$

68. Sea:

$$f(t) = \begin{cases} 2 & \text{Si } t = 1 \\ t & \text{Si } t \neq 1 \end{cases}$$

Muestre que $\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{t\}$.

69. Muestre que $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-at} e^{t^2} = \infty$ para todo a . Use este hecho para mostrar que e^{t^2} no es una función de orden exponencial.

70. Determine si $e^{\sqrt{t}}$ es de orden exponencial.

71. Muestre que e^{t^β} es de orden exponencial si $0 \leq \beta \leq 1$ y no es de orden exponencial si $\beta > 1$.

11.3 Solución de ecuaciones diferenciales lineales con valores iniciales, mediante la transformada de Laplace

Introducción

Hemos resuelto ecuaciones diferenciales utilizando una variedad de técnicas: el método del factor de integración, el método de Euler, el cambio de variables, los métodos de ensayo y error, la variación de los parámetros, etc. Vamos a ver cómo la transformada de Laplace puede ser usada para transformar un problema de valor inicial, como:

$$a y'' + b y' + c y = f(t), \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1$$

Este método siempre implicará las condiciones iniciales, como explicaremos más adelante.

Transformada de la derivada

La base para aplicar la transformada de Laplace para problemas en ecuaciones diferenciales, es la forma como la transformada se relaciona con la derivada. Asumimos que ambas: $f(t)$ y $f'(t)$, tienen transformada y que $f(t)$ es de orden exponencial α , por lo que a derivar la fórmula de la transformada de Laplace de las derivadas, como sigue. Por la definición de la transformada de Laplace, tenemos:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f'(t) dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} f'(t) dt$$

Integrando esta última integral por partes, nos da:

$$\int_0^b \underbrace{e^{-st}}_u \underbrace{f'(t)dt}_{dv} = \left[\underbrace{e^{-st}}_u \underbrace{f(t)}_v \right]_0^b - \int_0^b \underbrace{f(t)}_v \underbrace{[-se^{-st}]}_{du}$$

$$= e^{-sb} f(b) - f(0) + s \int_0^b e^{-st} f(t) dt \quad (8)$$

Tomando el límite cuando $b \rightarrow \infty$, de la expresión anterior, tenemos:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \lim_{b \rightarrow \infty} e^{-sb} f(b) - f(0) + s\mathcal{L}\{f(t)\}$$

Como f es de orden exponencial C , entonces se tiene que $|f(b)| \leq Me^{ab}$, de esto se puede mostrar que $\lim_{b \rightarrow \infty} e^{-sb} f(b) = 0$ y por lo tanto, de (8) se tiene que:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0) \quad (9)$$

Podemos ahora calcular fácilmente $\mathcal{L}\{f''(t)\}$ usando (9) y tratando a $f'(t)$ como la función y a $f''(t)$ como su derivada. Tenemos:

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s\mathcal{L}\{f'(t)\} - f'(0) \quad (10)$$

Sustituyendo (9) en (10) nos da:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f''(t)\} &= s [s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)] - f'(0) \\ &= s^2 \mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0) \end{aligned}$$

Estos cálculos se pueden repetir, de tal forma que iteradamente se tiene el siguiente teorema:

Teorema de la transformada de Laplace de la derivada

Si $f, f', \dots, f^{(n-1)}$ son continuas sobre $[0, \infty)$ y $f^{(n)}$ es continua a trozos sobre $[0, \infty)$ y si $f, f', \dots, f^{(n)}$ son de orden exponencial α , entonces para $s > \alpha$, $n = 1, 2, \dots$

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n \mathcal{L}\{f\} - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0) \quad (11)$$

En particular se tiene:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0) \quad \text{Para } n = 1 \quad (12)$$

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0) \quad \text{Para } n = 2 \quad (13)$$

$$\mathcal{L}\{f'''(t)\} = s^3\mathcal{L}\{f(t)\} - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0) \quad \text{Para } n = 3 \quad (14)$$

Así, la transformada de Laplace convierte derivadas en fórmulas algebraicas. De hecho, la propiedad de linealidad y el teorema de la transformada de Laplace de la derivada nos permiten cambiar las ecuaciones diferenciales lineales con condición inicial (en el t -dominio) en ecuaciones algebraicas (en el s -dominio), como se prometió en la figura 2. Además, se deben tener las condiciones iniciales.

Resolviendo ecuaciones diferenciales con la transformada de Laplace

En la sección anterior, generamos la estrategia para aplicar la transformada de Laplace en términos de la derivación. Específicamente, basta seguir los siguientes tres pasos listados a continuación:

Estrategia de la transformada de Laplace

- **Paso 1.** Usando la transformada de Laplace \mathcal{L} , transformamos el problema con valor inicial con función desconocida $f(t)$, en un problema algebraico con función desconocida $F(s)$.
- **Paso 2.** Resolvemos la ecuación algebraica para $F(s)$.
- **Paso 3.** Manipulando $F(s)$ algebraicamente si se requiere, use la transformada inversa de Laplace \mathcal{L}^{-1} para transformar $F(s)$ en la solución de problema con valor inicial $f(t)$.

Ejemplo 13. Problema con valor inicial:

Resolver el siguiente problema con valor inicial:

$$y' + y = e^{at}, \quad y(0) = 0$$

Solución:

Tomamos la transformada de Laplace a cada miembro de la igualdad, para obtener:

$$\mathcal{L}\{y' + y\} = \mathcal{L}\{e^{at}\}$$

Por la linealidad de \mathcal{L} , se tiene:

$$\mathcal{L}\{y'\} + \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{e^{at}\}$$

Usando (12) sustituimos $\mathcal{L}\{y'\}$ para obtener:

$$s\mathcal{L}\{y\} - f(0) + \mathcal{L}\{y\} = \frac{1}{s-a}$$

Aplicando la condición inicial, tenemos que:

$$s\mathcal{L}\{y\} + \mathcal{L}\{y\} = \frac{1}{s-a}$$

Factorizando, tenemos:

$$\mathcal{L}\{y\}(s+1) = \frac{1}{s-a}$$

O:

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{1}{(s-a)(s+1)}$$

Si $a \neq -1$, se puede volver a escribir como:

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{1}{a+1} \left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+1} \right)$$

Tomando la transformada inversa, y tanto por la linealidad como por la tabla se tiene:

$$y = \frac{1}{a+1} \left(\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+1} \right) \right)$$

O:

$$y = \frac{1}{a+1} \left(\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s-a} \right\} - \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s+1} \right\} \right) = \frac{1}{a+1} (e^{at} - e^{-t})$$

Es decir que la solución de PVI es:

$$y = \frac{1}{a+1} (e^{at} - e^{-t})$$

Ejemplo 14. Problema con valor inicial:

Resolver el siguiente problema con valor inicial:

$$y'' - 2y' - 3y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -10$$

Solución:

Tomando transformada a ambos lados de la igualdad y aplicando el principio de linealidad (y que $\mathcal{L}\{0\} = 0$), se tiene:

$$\mathcal{L}\{y''\} - \mathcal{L}\{y'\} - 3\mathcal{L}\{y\} = 0 \quad (15)$$

Pero por (12) y (13), se tiene:

$$\mathcal{L}\{y''\} = s^2 \mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)$$

Y:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$$

Reemplazando en (15), se tiene:

$$s^2 \mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0) - s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0) - 3\mathcal{L}\{y\} = 0$$

O:

$$s^2 \mathcal{L}\{f(t)\} - 2s + 10 - s\mathcal{L}\{f(t)\} - 2 - 3\mathcal{L}\{y\} = 0$$

Esta última es una ecuación algebraica en $\mathcal{L}\{y\}$ o, $Y(s)$. Resolviendo para $\mathcal{L}\{y\}$ por elementales manipulaciones tenemos:

$$(s^2 - 2s - 3)\mathcal{L}\{y\} = 2s - 14$$

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{2s - 14}{s^2 - 2s - 3} = \frac{2s - 14}{(s + 3)(s - 3)}$$

Por el ejemplo 6 de la sección 11-1, se tiene que la transformada inversa de Laplace es:

$$\mathcal{L}\{y\} = 4\mathcal{L}\{e^t\} - 2\mathcal{L}\{e^{3t}\} = \mathcal{L}\{4e^t - 2e^{3t}\}$$

Luego:

$$f(t) = 4e^t - 2e^{3t}$$

Ejemplo 15. Movimiento forzado:

Resolver el problema con valor inicial:

$$y'' + 3y' + 2y = e^{-3t}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

Solución:

Aplicando la transformada de Laplace a ambos miembros de la igualdad, de la ecuación diferencial dada, tenemos:

$$\mathcal{L}\{y'' + 3y' + 2y\} = \mathcal{L}\{e^{-3t}\}$$

Por el teorema de la transformada de una derivada, tenemos:

$$s^2\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0) + 3[s\mathcal{L}\{y\} - y(0)] + 2\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{e^{-3t}\}$$

Luego:

$$s^2\mathcal{L}\{y\} - 1 + 3s\mathcal{L}\{y\} + 2\mathcal{L}\{y\} = \frac{1}{s + 3}$$

Resolviendo para $\mathcal{L}\{y\}$, tenemos:

$$(s^2 + 3s + 2)\mathcal{L}\{y\} = 1 + \frac{1}{s+3} = \frac{s+4}{s+3}$$

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{(s+4)}{(s^2 + 3s + 2)(s+3)} = \frac{(s+4)}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

Usando fracciones parciales para el lado derecha, se tiene:

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{1/2}{s+3} - \frac{2}{s+2} + \frac{3/2}{s+1}$$

Por la entrada (iii) de la tabla se tiene que:

$$f(t) = \frac{1}{2}e^{-3t} - 2e^{-2t} + \frac{3}{2}e^{-t}$$

es la solución del problema con valor inicial.

Ejemplo 16. Forzamiento sinusoidal:

Resolver el problema con valor inicial:

$$y'' + 4y = \sin t, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$$

Solución:

De nuevo, tomamos la transformada a ambos lados de la igualdad, tenemos:

$$\mathcal{L}\{y'' + 4y\} = \mathcal{L}\{\sin t\}$$

Luego:

$$s^2\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0) + 4\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{\sin t\}$$

$$s^2\mathcal{L}\{y\} - 1 + 4\mathcal{L}\{y\} = \frac{1}{s^2+1}$$

$$(s^2 + 4)\mathcal{L}\{y\} = 1 + \frac{1}{s^2+1} = \frac{s^2+2}{s^2+1}$$

Entonces:

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{s^2 + 2}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)}$$

aplicando fracciones parciales, se tiene:

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{1/3}{s^2+1} + \frac{2/3}{s^2+4}$$

Por lo tanto:

$$f(t) = \frac{1}{3} \operatorname{sen} t + \frac{2}{3} \operatorname{sen}(2t)$$

que es la solución del problema con valor inicial.

Ejemplo 17. Una aplicación de orden tres:

No se necesita una teoría adicional para resolver un problema con valor inicial de orden tres.

$$y''' + y' = e^t, y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 0$$

Solución:

Tomando la transformada de Laplace y usando el teorema de la transformada de una derivada, tenemos:

$$\begin{aligned} s^3 \mathcal{L}\{y\} - s^2 \cdot 0 - s \cdot 0 + s \mathcal{L}\{y\} - 0 &= \mathcal{L}\{e^t\} \\ (s^3 + s) \mathcal{L}\{y\} &= \frac{1}{s-1} \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y\} &= \frac{1}{(s-1)(s^3+s)} = -\frac{1}{s} + \frac{1/2}{s-1} + \frac{1/2s-1/2}{s^2+1} \\ &= -\frac{1}{s} + \frac{1/2}{s-1} + \frac{(1/2)s}{s^2+1} - \frac{1/2}{s^2+1} \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$f(t) = -1 + \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}\sin t$$

Transformada de Laplace de expresiones con $e^{at}f(t)$.

Usar la definición de la transformada de Laplace para encontrar dicha transformada de ciertas funciones es tan poco práctico como usar la definición de la derivada para encontrar las derivadas de muchas funciones. El cálculo utiliza reglas de operación, como la regla del producto, la regla de la cadena, y así sucesivamente, para encontrar derivadas sin recurrir a la definición. Introducimos dos reglas útiles para la transformada de Laplace. La primera es usualmente la propiedad de translación (llamada también primera propiedad de la translación), que dice que la multiplicación por e^{at} en el t -dominio es igual a una translación en el s -dominio.

Propiedad de translación por la multiplicación de e^{at} (primer teorema de la translación)

Si la transformada de Laplace $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ existe para $s > 0$, entonces:

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s - a), \text{ para } s > a + \epsilon. \quad (16)$$

O, de otra forma:

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}|_{s \rightarrow s-a}$$

Demostración:

La propiedad de la translación se sigue de la definición de la transformada de Laplace así:

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} f(t) dt = F(s - a)$$

que es lo que queríamos demostrar.

Ejemplo 18. Propiedad de translación:

Encontrar $\mathcal{L}\{e^{at} \cos(bt)\}$

Solución:

Nosotros sabemos que:

$$\mathcal{L}\{e^{at} \cos(bt)\} = \mathcal{L}\{\cos bt\}|_{s \rightarrow s-a} = \{F(S)\}_{s \rightarrow s-a} = \left\{ \frac{s}{s^2+b^2} \right\}_{s \rightarrow s-a}$$

Luego, tenemos:

$$\mathcal{L}\{e^{at} \cos(bt)\} = F(s-a) = \frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$$

Ejemplo 19. Jugando al cuadrado perfecto:

Si $F(s) = \frac{s+1}{s^2+4s+13}$ es la transformada de Laplace de una función $f(t)$, determinar $f(t)$.

Solución:

Para determinar $f(t)$, necesitamos hacer algunos reordenamientos preliminares para $F(s)$:

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{s+1}{s^2+4s+13} = \frac{s+1}{s^2+4s+4+9} = \frac{(s+2)-1}{(s+2)^2+3^2} = \frac{(s+2)}{(s+2)^2+3^2} - \frac{1}{3} \left[\frac{3}{(s+2)^2+3^2} \right] \\ &= \mathcal{L}\{e^{-2t} \cos 3t\} - \frac{1}{3} \mathcal{L}\{e^{-2t} \sin 3t\} \end{aligned}$$

Por lo tanto, de las entradas (vii) y (viii) de la tabla se tiene que:

$$f(t) = e^{-2t} \cos 3t - \frac{1}{3} e^{-2t} \sin 3t \quad (12)$$

La función forzado $f(t)$ de tipo (12) es tediosa para manejar con coeficientes indeterminados o variación de parámetros.

Ejemplo 20. Propiedad de translación:

Encontrar:

$$\mathcal{L}\{t^2 e^t\}$$

Solución:

Tenemos que:

$$\mathcal{L}\{t^2 e^t\} = \mathcal{L}\{t^2\}|_{s \rightarrow s-1} = \{F(S)\}_{s \rightarrow s-1} = \left\{\frac{2}{s^3}\right\}_{s \rightarrow s-1}$$

Luego tenemos:

$$\mathcal{L}\{t^2 e^t\} = F(s-a) = \frac{2}{(s-1)^3}$$

El inverso de la propiedad de la translación, la cual establece que:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at}f(t). \quad (17)$$

Esta expresión es muy útil porque muchas soluciones de ecuaciones de segundo orden son de esta forma, por ejemplo, una vibración amortiguada de la forma $e^{-t} \text{sen}(2t)$. El siguiente ejemplo ilustra esta idea.

Ejemplo 21. Inversa de la propiedad de translación:

Usando (17), calcular:

a. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+6s+10}\right\}$

b. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s-1}{s^2+2s+5}\right\}$

c. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+s-2}\right\}$

Solución:

a. Como $s^2 + 6s + 10$ no se puede factorizar en factores lineales en los reales, entonces completamos de cuadrados perfectos, de la siguiente forma:

$$s^2 + 6s + 10 = (s+3)^2 + 1$$

Por lo tanto, tenemos:

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2 + 6s + 10} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+3)^2 + 1} \right\} = e^{-3t} \text{sen } t.$$

b. De forma similar, para calcular:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{3s-1}{s^2+2s+5} \right\},$$

Completamos un cuadrado perfecto en el denominador, de donde $s^2 + 2s + 5 = (s + 1)^2 + 4$. También podemos partir la fracción en dos fracciones:

$$\frac{3s-1}{s^2+2s+5} = \frac{3(s+1)}{(s+1)^2+4} - \frac{4}{(s+1)^2+4}$$

utilizando la propiedad de translación, se tiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2+6s+10} \right] &= 3\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{(s+1)}{(s+1)^2+4} \right\} - 4\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+1)^2+4} \right\} \\ &= 3e^{-t} \cos 2t - 4e^{-t} \text{sen } 2t = e^{-t} (3\cos 2t - 4\text{sen } 2t) \end{aligned}$$

c. Podríamos también completar un cuadrado perfecto, pero en este caso podemos factorizar el denominador y obtener fracciones parciales de la siguiente forma:

$$\frac{1}{s^2+s-2} = \frac{1}{(s-1)(s+2)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+2}$$

Donde A y B son constantes que se deben determinar. Realizando el proceso de fracciones parciales, obtenemos: $A = 1/3$ y $B = -1/3$, luego:

$$\frac{1}{s^2+s-2} = \frac{1/3}{s-1} - \frac{1/3}{s+2}$$

De donde:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2+s-2} \right\} = \frac{1}{3} e^t - \frac{1}{3} e^{-2t}$$

Un método de diagramas para ver la propiedad de translación

El empleo de la propiedad para encontrar la transformada inversa, es un poco artificiosa, de manera que nos podemos ayudar a plantear el problema mediante un diagrama de la siguiente forma:

$$\begin{array}{ccc}
 f(t) & \text{---} & G(s) \\
 \downarrow \cdot e^{at} & & \downarrow s \rightarrow s - a \\
 e^{at} f(t) & \text{---} & G(s - a)
 \end{array}$$

Las líneas horizontales indican la relación entre una función que depende de t y se encuentra en el lado izquierdo del diagrama y su correspondiente transformada de Laplace en el lado derecho. Las flechas verticales representan los cambios a los que se someten las funciones. Multiplicar a $f(t)$ por e^{at} corresponde, de acuerdo con la primera propiedad de la translación, a reemplazar s por $s - a$ en la transformada de Laplace.

Así para el ejemplo 7, tendríamos el siguiente diagrama:

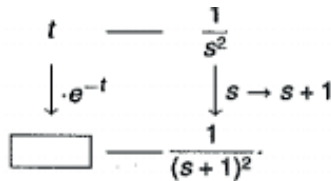
$$\begin{array}{ccc}
 t^2 & \text{---} & \frac{2}{s^3} \\
 \downarrow \cdot e^t & & \downarrow s \rightarrow s - 1 \\
 t^2 e^t & \text{---} & \frac{2}{(s - 1)^3}
 \end{array}$$

Ejemplo 22.

Encontrar la transformada inversa de $\frac{1}{(s+i)^2}$

Solución:

Observemos que la expresión dada en s , se puede obtener a partir de la función más simple $\frac{1}{s^2}$, sustituyendo $s \rightarrow s + 1$. Por lo tanto, podemos plantear el diagrama siguiente:



Para que la caja vacía sea ocupada por la inversa de $\frac{1}{(s+1)^2}$, la función $f(t) = t$ que aparece en el extremo superior izquierdo, se reconoce como la inversa de $\frac{1}{s^2}$ y la operación vertical del lado izquierdo se determina para que corresponda con la operación que se efectúa en el lado derecho, de acuerdo con la propiedad de translación.

De este modo el diagrama indica que el resultado es:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+1)^2} \right\} = te^{-t}$$

Ejemplo 23:

Aplique el mismo método del diagrama para calcular:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 - 2s + 5} \right\}$$

Solución:

Para empezar, completemos con el denominador un cuadrado perfecto, así:

$$s^2 - 2s + 5 = (s - 1)^2 + 4$$

Ahora podemos plantear el diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2t) & \text{---} & \frac{1}{s^2 + 4} \\
 \downarrow \cdot e^t & & \downarrow s \rightarrow s - 1 \\
 \boxed{} & \text{---} & \frac{1}{(s - 1)^2 + 4} = \frac{1}{s^2 - 2s + 5}
 \end{array}$$

Y obtenemos el resultado:

$$f(t) = \frac{1}{2} e^t \operatorname{sen}(2t)$$

Ejemplo 12:

Aplice el mismo método del diagrama para calcular:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + 6s + 10} \right\}$$

Solución:

En algunos casos nuestro diagrama exige un poco de más elaboración, empezamos por completar un cuadrado perfecto:

$$s^2 + 6s + 10 = (s + 3)^2 + 1$$

lo cual sugiere el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 \boxed{} & \text{---} & \boxed{} \\
 \downarrow \cdot e^{-3t} & & \downarrow s \rightarrow s + 3 \\
 \boxed{} & \text{---} & \frac{s}{(s + 3)^2 + 1} = \frac{s}{s^2 + 6s + 10}
 \end{array}$$

Ahora decidiremos qué debe ir en la caja del extremo superior derecho. Obviamente el denominador es $s^2 + 1$, pero podemos encontrar el numerador más fácilmente si invertimos las operaciones.

$$\begin{array}{ccc}
 \boxed{} & \text{---} & \boxed{} \\
 \uparrow \cdot e^{3t} & & \uparrow s \rightarrow s-3 \\
 \boxed{} & \text{---} & \frac{s}{(s+3)^2+1} = \frac{s}{s^2+6s+10}
 \end{array}$$

A condición de que las flechas en ambos lados del diagrama apunten en la misma dirección, no importa si apuntan hacia arriba o hacia abajo. Ahora es mucho más fácil completar el resto del diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 \cos t - 3 \operatorname{sen} t & \text{---} & \frac{s-3}{s^2+1} \\
 \uparrow \cdot e^{3t} & & \uparrow s \rightarrow s-3 \\
 \boxed{f(t)} & \text{---} & \frac{s}{(s+3)^2+1} = \frac{s}{s^2+6s+10}
 \end{array}$$

Por último, la solución deseada $f(t)$ debe satisfacer:

$$f(t)e^{3t} = \cos t - 3 \operatorname{sen} t$$

Luego:

$$f(t) = e^{-3t}(\cos t - 3 \operatorname{sen} t)$$

Ejemplo 25.

Aplice el mismo método del diagrama para calcular:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+s-2}\right\}$$

Solución:

Completando el cuadrado perfecto, se tiene:

$$s^2 + s - 2 = \left(s + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$$

Y planteando el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \boxed{f(t)} & \longleftarrow & \frac{1}{(s + \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}} \\ \uparrow \cdot e^{-\frac{1}{2}t} & & \uparrow s \rightarrow s + \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} \sinh\left(\frac{3}{2}t\right) & \longleftarrow & \frac{1}{s^2 - \frac{9}{4}} \end{array}$$

lo que nos lleva a la solución:

$$f(t) = \frac{2}{3} e^{-\left(\frac{1}{2}\right)t} \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}t\right)$$

Es bueno observar que esta no es la misma respuesta que nos dio en el ejemplo 8 c, pero en realidad se puede ver que son la misma respuesta.

La propiedad del cambio de escala

Otro resultado general, es la propiedad de cambio de escala, que resulta algunas veces muy útil al encontrar transformada de Laplace e inversas.

Propiedad de cambio de escala.

Si $f(t)$ es una función que tiene transformada de Laplace, y a es una constante positiva. Entonces:

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a} \mathcal{L}\{f(t)\} \Big|_{s \rightarrow s/a} \quad (18)$$

Demostración:

La demostración de esta propiedad se logra fácilmente, haciendo el cambio de variable $x = at$.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(at)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} f(at) dt = \int_0^{\infty} e^{-s(x/a)} f(x) \frac{1}{a} dx \\ &= \frac{1}{a} \int_0^{\infty} e^{-(s/a)x} f(x) dx = \frac{1}{a} \left(\int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx \right) \Big|_{s \rightarrow s/a} \end{aligned}$$

Ejemplo 26.

Deducir la fórmula de la transformada de Laplace de la función $\cos(at)$, a partir de la propiedad de cambio de escala.

Solución:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\cos at\} &= \frac{1}{a} \mathcal{L}\{\cos t\} \Big|_{s \rightarrow s/a} = \frac{1}{a} \left(\frac{s}{s^2 + 1} \right) \Big|_{s \rightarrow s/a} \\ &= \frac{1}{a} \left(\frac{s/a}{(s/a)^2 + 1} \right) = \frac{s}{s^2 + a^2}\end{aligned}$$

Para emplear la propiedad de cambio de escala para hallar la inversa es más conveniente escribir el resultado en la forma:

$$\mathcal{L}\{f(at)\} \Big|_{s \rightarrow s/a} = a \mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{af(t)\}$$

y plantear el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} f(t) & \text{---} & G(s) \\ \downarrow \begin{array}{l} t \rightarrow at \\ y \rightarrow y/a \end{array} & & \downarrow s \rightarrow as \\ af(at) & \text{---} & G\left(\frac{s}{a}\right) \end{array}$$

Transformada de Laplace de $t^n f(t)$

Una regla fácil para resolver ecuaciones diferenciales con coeficientes que son potencias de t , es la regla de «multiplicación por t ». Por su uso, la transformada de Laplace convierte una ecuación diferencial cuyos coeficientes son potencias de t en una ecuación diferencial en la transformación.

Regla de la multiplicación por t^n por la transformada de Laplace

Si $f(t)$ es una función continua a trozos sobre $[0, \infty)$ y es de orden exponencial α , entonces para $s > \alpha$:

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n F}{ds^n}(s), \text{ donde } n \text{ es un entero positivo} \quad (19)$$

Demostración:

Probamos el resultado para $n = 1$, usando el hecho de que la derivada y la integral se pueden intercambiar, se tiene:

$$\frac{d}{ds}F(s) = \frac{d}{ds} \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_0^{\infty} \frac{d}{ds} e^{-st} f(t) dt = - \int_0^{\infty} t e^{-st} f(t) dt = -\mathcal{L}\{tf(t)\}$$

El resultado para n arbitrario, se puede obtener a través de repetidas derivaciones.

Ejemplo 27. Multiplicación por t :

Encontrar $\mathcal{L}\{t \cos bt\}$.

Solución:

Recordemos que por la tabla dada de las transformadas se tiene que:

$$\mathcal{L}\{\cos bt\} = \frac{s}{s^2 + b^2}$$

Entonces usando la regla de la multiplicación por t^n , se tiene:

$$\mathcal{L}\{t \cos bt\} = -\frac{d}{ds} \left(\frac{s}{s^2 + b^2} \right) = \frac{s^2 - b^2}{(s^2 + b^2)^2}$$

Coefficientes variables

Ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes variables pueden algunas veces ser resueltas mediante la transformada de Laplace. La ecuación de Bessel de orden cero es uno de tales ejemplos.

Ejemplo 28. Ecuación de Bessel:

Resolver la ecuación de Bessel:

$$t y'' + y' + t y = 0$$

Con condición inicial, $y(0) = 1, y'(0) = 0$

Solución:

Recordemos primero que:

$$\mathcal{L}\{y'\} = s\mathcal{L}\{y\} - y(0) = s\mathcal{L}\{y\} - 1$$

$$\mathcal{L}\{y''\} = s^2\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0) = s^2\mathcal{L}\{y\} - s$$

Como y , y' , y'' están multiplicados por t , aplicando la regla de la multiplicación por tn , se tiene:

$$-\frac{d}{ds}(s^2\mathcal{L}\{y\} - s) + (s\mathcal{L}\{y\} - 1) - \frac{d}{ds}(\mathcal{L}\{y\}) = 0$$

Si hacemos $F(s) \equiv \mathcal{L}\{y\}$, se puede escribir esta expresión como:

$$-\frac{d}{ds}(s^2F\{s\} - s) + (sF\{s\} - 1) - \frac{d}{ds}(F\{s\}) = 0$$

Después de derivar y simplificar, se obtiene la siguiente ecuación diferencial de primer orden en $F\{s\}$:

$$(s^2 + 1)F'(s) + sF(s) = 0$$

Separando variables, tenemos:

$$\frac{F'(s)}{F(s)} = \frac{-s}{s^2 + 1}$$

Integrando respecto a s , se tiene:

$$\ln(F(s)) = -\frac{1}{2}\ln(s^2 + 1) + \ln C$$

Luego:

$$\ln(F(s)) = \ln c (s^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}$$

Es decir que:

$$F(s) = \frac{c}{\sqrt{s^2+1}}$$

Donde C es una constante arbitraria. Para encontrar la inversa de $F(s)^4$, usamos la serie binomial para $\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$, obteniendo:

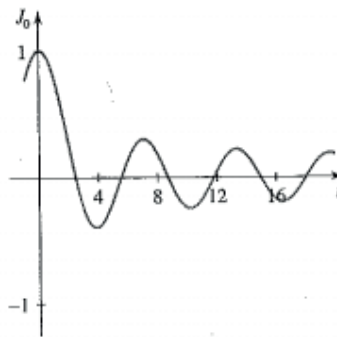
$$F(s) = \frac{C}{\sqrt{s^2+1}} = \frac{C}{s} \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s^2} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{s^4} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^n n!} \cdot \frac{(-1)^n}{s^{2n}} + \dots \right)$$

Finalmente tomando la inversa de cada uno de los términos de la serie, podemos llegar a la solución la cual es denotada por:

$$y(t) \equiv J_0(t) = C \left(1 - \frac{t^2}{2^2} + \frac{t^4}{2^2 4^2} - \frac{t^6}{2^2 4^2 6^2} + \dots \right)$$

Si aplicamos la condición inicial $y(0) = 1$, vemos que la constante $C = 1$. Esta serie de potencias es llamada la función de Bessel de orden cero, y es una de las funciones especiales más útiles. Surge en problemas de ecuaciones diferenciales parciales que tienen simetría cilíndrica, la más famosa en el análisis de las vibraciones de los tambores. La gráfica de $J_0(t)$ se muestra en la figura 8, parece similar a la solución de un oscilador amortiguado, pero el cruce del eje se produce a intervalos t no periódicos.

Figura 8. Función de Bessel de orden cero.



Fuente. Elaborada por el autor con el programa Derive.

11.4 Ejercicios

Inversa de la transformada de Laplace. En los problemas 1 al 10 encuentre la inversa de cada transformada de Laplace.

$$1. \frac{2}{s-3}$$

$$2. \frac{\pi}{s^2}$$

$$3. \frac{1}{\sqrt{\pi} s}$$

$$4. \frac{4}{s^3}$$

$$5. \frac{8s^2-6}{s^7}$$

$$6. \frac{s-3}{s^2-3}$$

$$7. \frac{2s+1}{s^2+4}$$

$$8. \left(\frac{s+1}{s^3}\right)^2$$

$$3. \frac{1}{s^2+2}$$

$$10. \frac{s}{s^2-2}$$

Transformada de Laplace mediante diagramas. En los problemas 11 al 22 emplee fracciones parciales para encontrar la inversa de cada transformada de Laplace (realice el diagrama correspondiente):

$$11. \frac{1}{s^2+2s-3}$$

$$12. \frac{s}{s^2-s-6}$$

$$13. \frac{1}{s^2-s}$$

$$14. \frac{1}{s^3+s^2}$$

$$15. \frac{9}{s^3-9s}$$

$$16. \frac{1}{s^2+3s-4}$$

$$17. \frac{(s-1)^2}{s^3+s}$$

$$18. \frac{s-2}{s^2+2s}$$

$$19. \frac{1}{s^2+2s-3}$$

$$20. \frac{1}{s^4-s^3}$$

$$21. \frac{2s^3+s^2+3}{s^4-1}$$

$$22. \frac{s^3-s^2-2s-1}{s^4-s^2-2}$$

Transformada de Laplace. Encuentre la transformada de Laplace de cada función.

$$23. f(t) = te^t$$

$$24. f(t) = t^2 \sinh t$$

$$25. f(t) = (t + e^{-t})^2$$

$$26. f(t) = e^{-1} \sin t$$

$$28. f(t) = \frac{e^t}{\sqrt{t}}$$

$$29. f(t) = \frac{\cosh t}{\sqrt{t}}$$

$$30. f(t) = e^{3t} \cosh(2t)$$

$$31. f(t) = \frac{\sqrt{t}}{e^t}$$

$$32. f(t) = \sqrt{e^t} \sinh(\sqrt{2t})$$

$$33. f(t) = \left(\frac{t}{e^t}\right)^4$$

Transformada inversa. Use el teorema de la translación para encontrar la inversa de cada transformada de Laplace (utilice diagramas correspondientes).

$$34. F(s) = \frac{1}{(s-1)^3}$$

$$35. F(s) = \frac{s}{(s+1)^{3/2}}$$

$$36. F(s) = \frac{1}{\sqrt{s-2}}$$

$$37. F(s) = \frac{s}{s^2-2s+2}$$

$$38. F(s) = \frac{1}{s^2+4s+4}$$

$$39. F(s) = \frac{2s}{s^2+4s+13}$$

$$40. F(s) = \frac{s}{(s+1)^2}$$

$$41. F(s) = \frac{1}{s^2+2s+4}$$

$$42. F(s) = \frac{s+1}{(s-1)^3}$$

$$43. F(s) = \frac{s}{s^2+2s-3}$$

$$44. F(s) = \frac{1}{(s-\pi)^7}$$

$$45. F(s) = \frac{1}{s^2-s+1}$$

Problemas de primer orden. Use la transformada de Laplace para resolver los problemas con valor inicial del 46 al 49.

$$46. y' = 1, \quad y(0) = 1$$

$$47. y' - y = 0, \quad y(0) = 1$$

$$48. y' - y = e^t, \quad y(0) = 1$$

$$49. y' + y = e^{-t}, \quad y(0) = -1$$

Transformaciones en el trabajo. Resuelva los problemas con valor inicial del 50 al 57.

$$50. y'' - 3y' + 2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

$$51. y'' + 2y' = 4, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -4$$

$$52. y'' + 9y = 20e^{-t}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

$$53. y'' + 9y = \cos(3t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1$$

$$54. y'' + 3y' + 2y = 6, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$$

$$55. y'' + y' + y = 1, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

$$56. y'' + y' + y = \sin t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

$$57. y'' + y' + y = e^{-t}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

Solución general. Si se tiene que $y(0) = A$ y $y'(0) = B$, la transformada de Laplace aplicada a la ecuación diferencial:

$$ay'' + by' + cy = f(t)$$

produce la solución general en términos de las constantes arbitrarias A y B. Aplique este hecho a las ecuaciones diferenciales de los problemas 58 y 59 y compare sus resultados.

$$58. y'' - y = t$$

$$59. y'' + 3y' + 2y = 0$$

Elevando las apuestas. Resuelva los problemas de valor inicial 60 y 61 usando la transformada de Laplace, compare con los métodos usados sin la transformada.

$$60. y''' - y'' - y' + y = 6e^t; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0$$

$$61. y(4) - y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = -1, \quad y'''(0) = 0$$

Métodos del operador. Los métodos simbólicos para resolver ecuaciones diferenciales son métodos en los cuales las derivadas son reemplazadas por los operadores simbólicos $D = d/dt$, $D^2 = d^2/dt^2$. Luego, la ecuación diferencial:

$$y'' + y' - 2y = 0$$

puede ser reemplazada por la ecuación algebraica:

$$D^2 y + D y - 2y = 0$$

O:

$$(D^2 + D - 2)y = 0$$

O:

$$(D - 1)(D + 2)y = 0$$

Como con la transformada de Laplace, se transforma una ecuación diferencial en una ecuación algebraica, los problemas 62 y 63 pueden resolver estas dos ecuaciones diferenciales de segundo orden usando operadores.

62. Resolver $y'' + 3y' + 2y = 1$, siguiendo los siguientes pasos:

a. Escriba la ecuación diferencial en forma de operadores y muestre que ella se puede escribir como:

$$(D + 1)(D + 2)y = 1$$

b. Muestre que y se puede encontrar resolviendo las dos ecuaciones de primer orden:

$$(D + 1)v = 1$$

$$(D + 2)y = v$$

c. Encuentre y de la parte b. resolviendo la primera ecuación dada para v , y luego sustituya v en la segunda ecuación para obtener el valor de y . (Ayuda: Tenga en cuenta que $(D + 1)v = 1$ es simplemente $v' + v = 1$ y que $(D + 2)y = v$, es $y' + 2y = v$).

63. Encuentre la solución de:

$$Y'' + y = t^6$$

usando operadores simbólicos (ayuda: reescriba la ecuación diferencial en forma de operadores, resuelva para y , dividiendo por $(D^2 + 1)$) y escriba la serie de potencias como:

$$\frac{1}{D^2 + 1} = 1 - D^2 - D^4 - \dots$$

luego esta serie de potencias opera sobre t^6 . Esto nos da una solución particular. Verifique su respuesta.

11.5 La función escalón y la función delta de Dirac

La función escalón unitaria

Algunos sistemas en física son controlados por *switches* de abierto o cerrado, los cuales son modelados por funciones discontinuas. Por ejemplo, la entrada del voltaje de un circuito puede ser convertido en abierto o cerrado, o escalonado arriba o abajo; sistemas mecánicos pueden experimentar cambios abruptos ante un forzamiento. Muchos de estos sistemas pueden ser representados usando funciones escalonadas⁵.

Función escalón

La función escalón unitaria $\mathfrak{U}(t)$, se define como:

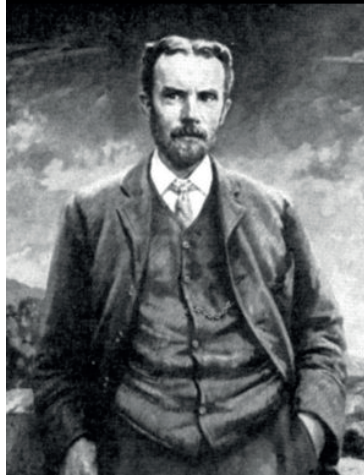
$$\mathfrak{U}(t) = \begin{cases} 0 & \text{Si } t < 0, \\ 1 & \text{Si } t \geq 0. \end{cases}$$

Y la función escalón unitaria trasladada como:

$$\mathfrak{U}(t - a) = \begin{cases} 0 & \text{Si } t < a, \\ 1 & \text{Si } t \geq a \end{cases}$$

⁵ La función escalón unitaria es también llamada la función de Heaviside, después de Oliver Heaviside (1859-1925).

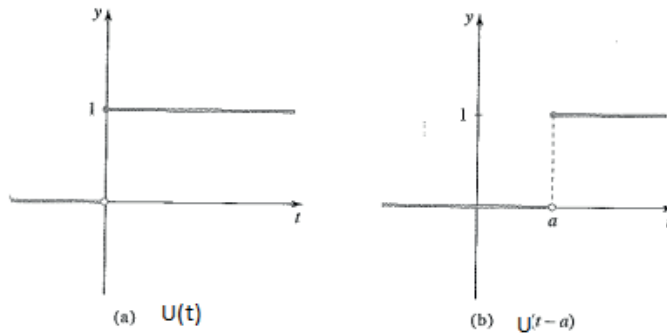
Figura 151. Oliver Heaviside (1850-1925).



Fuente. Enciclopedia Británica (Biblioteca virtual de la Universidad EAN).

Heaviside fue un inglés autodidacta que inventó su propio cálculo operativo para resolver ecuaciones diferenciales mucho antes de que se introdujera la transformada de Laplace en la ingeniería, con el mismo propósito. Heaviside acuñó los términos inductancia y capacitancia e introdujo la ecuación del telegrafista, una ecuación diferencial parcial para el voltaje en un cable en función del tiempo, lugar, resistencia, inductancia y capacitancia. Asimismo predijo la existencia de una región ionizada reflectora alrededor de la tierra (la ionosfera). Acongojado por la pobreza y menospreciado en los primeros años de su vida debido a su falta de educación, su genio fue reconocido finalmente y recibió numerosos honores y premios.

La **función escalón unitaria** representa el cambio de un interruptor de apagado a encendido, en el tiempo $t = 0$, mientras que la **función escalada trasladada** representa activar el conmutador en el momento $t = a$. Estas dos funciones se representan en la figura 152:

Figura 152. Gráfica de la función escalar unitaria.

Fuente. Elaborado por el autor.

Transformada de Laplace de la función escalonada

$$\mathcal{L}\{U(t-a)\} = \frac{e^{-as}}{s} \quad (20)$$

Demostración:

Por la definición de la transformada de Laplace, se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{U(t-a)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} U(t-a) dt \\ &= \int_0^a e^{-st} \cdot 0 dt + \int_a^{\infty} e^{-st} \cdot 1 dt = \int_a^{\infty} e^{-st} dt \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{e^{-as}}{s} \right]_a^b = \lim_{b \rightarrow \infty} -\frac{1}{s} [e^{-sb} - e^{-sa}] = \frac{e^{-as}}{s} \end{aligned}$$

Es claro entonces que:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-as}}{s}\right\} = U(t-a) \quad (21)$$

Antes de aplicar la transformada de Laplace a funciones escalonadas, es importante ver cómo podemos expresar y graficar funciones definidas a trozos mediante las funciones de Heaviside.

Ejemplo 29. Graficando funciones definidas a trozos mediante funciones de Heaviside:

Graficar la función $f(t) = \mathcal{U}(t - 1) - \mathcal{U}(t - 3)$.

Solución:

Como la fórmula para $\mathcal{U}(t - 1)$ cambia en $t = 1$, y la fórmula para $\mathcal{U}(t - 3)$ cambia en $t = 3$, entonces la fórmula para $f(t)$ cambia para $t = 1$ y $t = 3$. De acuerdo con esto dividimos el dominio de t , en los intervalos.

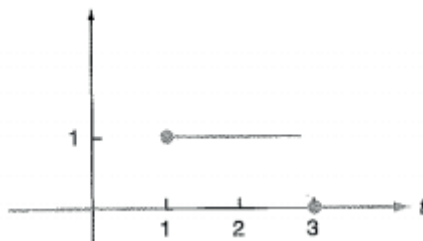
$$(-\infty, 1), [1, 3), \text{ y } [3, \infty)$$

Si $t < 1$, entonces $f(t) = \mathcal{U}(t - 1) - \mathcal{U}(t - 3) = 0 - 0 = 0$, ya que $\mathcal{U}(t - 1) = 0$ si $t < 1$ y $\mathcal{U}(t - 3) = 0$ si $t < 3$.

Si $1 \leq t < 3$, entonces $f(t) = \mathcal{U}(t - 1) - \mathcal{U}(t - 3) = 1 - 0$, ya que $\mathcal{U}(t - 1) = 1$ si $t \geq 1$ y $\mathcal{U}(t - 3) = 0$ si $t < 3$.

Si $3 \leq t$, entonces $f(t) = \mathcal{U}(t - 1) - \mathcal{U}(t - 3) = 1 - 1 = 0$, ya que $\mathcal{U}(t - 1) = 1$ si $t \geq 1$ y $\mathcal{U}(t - 3) = 1$, si $t \geq 3$. La figura 153, nos da la gráfica de $f(t) = \mathcal{U}(t - 1) - \mathcal{U}(t - 3)$.

Figura 153. Gráfica de la función Dada.



Fuente. Elaborado por el autor.

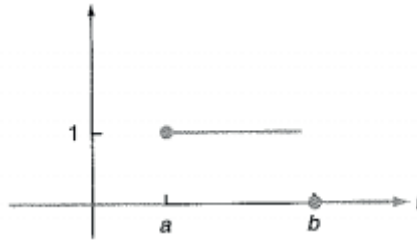
Del ejemplo anterior se concluye la siguiente deducción: una vieja función en ingeniería utilizada como un filtro o función de interrupción para extraer una pieza de una función a lo largo de un intervalo $[a, b)$.

Observación útil función de interrupción si $0 < a < b$

$$\text{entonces: } \mathcal{U}(t-a) - \mathcal{U}(t-b) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ 1 & \text{si } a \leq t < b \\ 0 & \text{si } b \leq t \end{cases} \quad (22)$$

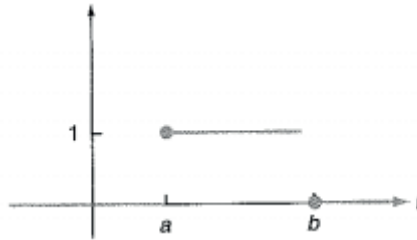
Y la gráfica de $\mathcal{U}(t-a) - \mathcal{U}(t-b)$ se da en la figura 154.

Figura 154. Gráfica de la función dada.



Fuente. Elaborado por el autor.

Figura 155. Gráfica de la función dada.

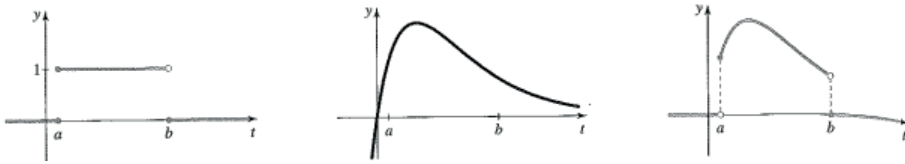


Fuente. Elaborado por el autor.

La función de interrupción corta una parte de una función entre a y b para una función particular $f(t)$, como se muestra en la figura 156. Es decir si $g(t)$ es alguna función de t , con $a < b$ entonces:

$$g(t) [\mathcal{U}(t-a) - \mathcal{U}(t-b)] = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ g(t) & \text{si } a \leq t < b \\ 0 & \text{si } b \leq t \end{cases} \quad (23)$$

La función $g(t)$ se activa en $t = a$ y luego se apaga en $t = b$.

Figura 156. Gráfica de la función de interrupción.

Fuente. Elaborado por el autor con el programa Derive.

Ejemplo 30. Expresiones gráficas con la función de Heaviside:

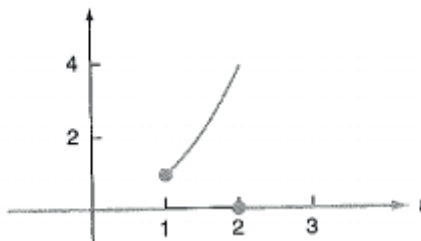
Trazar la gráfica de la función $f(t) = t^2 [\mathcal{U}(t-1) - \mathcal{U}(t-2)]$.

Solución:

Como:

$$t^2[\mathcal{U}(t-1) - \mathcal{U}(t-2)] = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ t^2 & \text{si } 1 \leq t < 2 \\ 0 & \text{si } 2 \leq t \end{cases}$$

y la gráfica de $f(t)$ está dada por la figura 14, la fórmula $t^2[\mathcal{U}(t-1) - \mathcal{U}(t-2)]$ selecciona esa parte de la gráfica de t^2 entre 1 y 2, y vuelve el resto igual a cero.

Figura 14. Gráfica de la función dada.

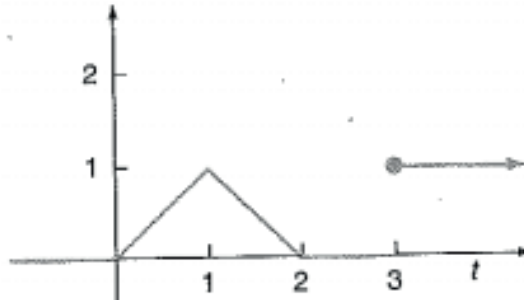
Fuente. Elaborado por el autor con el programa Derive.

Ahora estamos listos para escribir una función continua a trozos en términos de funciones escalón unitario.

Ejemplo 31. La forma alternativa:

Escribir la función dada en la gráfica 157, en términos de una función escalón unitario.

Figura 157. Gráfica de la función 14 en términos de la función escalon unitaria.



Fuente. Elaborado por el autor.

Solución:

La función $f(t)$ dada en la gráfica la podemos escribir como:

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 2 - t & \text{si } 1 \leq t < 2 \\ 0 & \text{si } 2 \leq t < 3 \\ 1 & \text{si } 3 \leq t \end{cases}$$

Entonces:

$$f(t) = t[\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t - 1)] + (2 - t)[\mathcal{U}(t - 1) - \mathcal{U}(t - 2)] + 1 \cdot [\mathcal{U}(t - 3)]$$

Observe que el primer término de la expresión anterior es cero, excepto cuando $0 \leq t < 1$ y esta expresión toma el valor de t . El segundo valor toma el valor de cero, salvo cuando $1 \leq t < 2$, en donde toma el valor de $2 - t$. Para el tercer término de la expresión es cero salvo cuando $3 \leq t$, donde toma el valor de 1. Observación: como solo consideramos valores de $t \geq 0$, el primer término de la expresión anterior puede ser escrito como $t[1 - \mathcal{U}(t - 1)]$.

Ejemplo 32:

Trazar la gráfica de:

$$f(t) = 2\mathcal{U}(t) + t\mathcal{U}(t - 1) + (3 - t)\mathcal{U}(t - 2) - 3\mathcal{U}(t - 4), \text{ para } t \geq 0$$

Solución:

Mirando las funciones de Heaviside vemos que ellas cambian en los puntos $t = 1$, $t = 2$ y $t = 3$, entonces podemos romper el intervalo $(0, \infty)$, de acuerdo a la siguiente tabla:

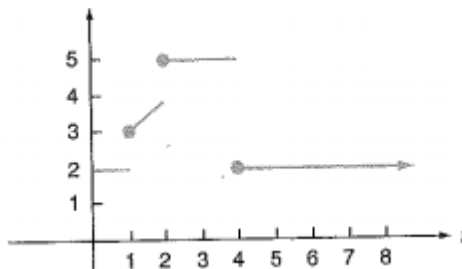
Tabla 2. Funciones de Heaviside de acuerdo a los intervalos dados.

Intervalo	$f(t) = 2\mathcal{U}(t) + t\mathcal{U}(t - 1) + (3 - t)\mathcal{U}(t - 2) - 3\mathcal{U}(t - 4)$
$0 \leq t < 1$	$f(t) = 2 \cdot 1 + t \cdot 0 + (3 - t) \cdot 0 - 3 \cdot 0 = 2$
$1 \leq t < 2$	$f(t) = 2 \cdot 1 + t \cdot 1 + (3 - t) \cdot 0 - 3 \cdot 0 = 2 + t$
$2 \leq t < 4$	$f(t) = 2 \cdot 1 + t \cdot 1 + (3 - t) \cdot 1 - 3 \cdot 0 = 5$
$4 \leq t$	$f(t) = 2 \cdot 1 + t \cdot 1 + (3 - t) \cdot 1 - 3 \cdot 1 = 2$

Fuente. Elaborado por el autor.

En los cuatro subintervalos $[0, 1)$, $[1, 2)$, $[2, 4)$, $[4, \infty)$, vemos cómo $f(t)$ se comporta. Usando la definición de la función de Heaviside, podemos trazar la gráfica que se ve en la figura 158.

Figura 158. Gráfica de la función de Heaviside para los cuatro subintervalos.



Fuente. Elaborado por el autor.

Ya hemos visto cómo las funciones que tienen discontinuidad de salto (funciones escalón) pueden ser representadas en términos de funciones de Heaviside.

Otra propiedad de Laplace para funciones definidas mediante funciones de Heaviside, llamadas también **funciones de retraso**, es la siguiente:

$$\mathcal{L}\{f(t-a)\mathcal{U}(t-c)\} = e^{-cs}F(S) \text{ para } c > 0. \quad (24)$$

En otras palabras, esta propiedad nos dice lo siguiente:

Para encontrar la transformada de Laplace de una función de retraso $f(t-c)\mathcal{U}(t-c)$, se transforma $f(t)$ a $F(S)$ y se multiplica por e^{-cs} .

Demostración

Para $c > 0$. Usamos la definición de la transformada de Laplace y las propiedades de la función de Heaviside, en la que $\mathcal{U}(t-c) = 0$ para $t < c$ y $\mathcal{U}(t-c) = 1$ para $t > c$, luego:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t-a)\mathcal{U}(t-c)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st}f(t-a)\mathcal{U}(t-c)dt = \\ &= \int_0^c e^{-st}f(t-a)\mathcal{U}(t-c)dt + \int_c^{\infty} e^{-st}f(t-a)\mathcal{U}(t-c)dt \\ &= \int_0^c e^{-st}f(t-a) \cdot 0 dt + \int_c^{\infty} e^{-st}f(t-a) \cdot 1 dt \\ &= \int_c^{\infty} e^{-st}f(t-a) dt \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable, $u = t - c$, tenemos que $du = dt$, por lo tanto:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t-a)\mathcal{U}(t-c)\} &= \int_0^{\infty} e^{-S(u+c)}f(u) du \\ &= e^{-cS} \int_0^{\infty} e^{-uS}f(u) du = e^{-cS}F(S) \end{aligned}$$

es claro entonces que la inversa para 24 es⁶:

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-cs}F(S)\} = f(t-a)\mathcal{U}(t-c) \quad \text{Para } c > 0 \quad (25)$$

Para calcular la transformada inversa de una expresión de la forma $F(S)e^{-cs}$, encontramos la transformada inversa $f(t)$ de $F(S)$, e imponemos el corrimiento reemplazando $f(t)$ por $f(t-a)\mathcal{U}(t-c)$.

En la práctica es más común encontrar la expresión de la forma $g(t)\mathcal{U}(t-c)$, esta se logra reemplazando en 24, a $g(t)$ por $f(t-c)$ y entonces 24 se puede escribir como:

Forma alterna de la propiedad de retardo

$$\mathcal{L}\{g(t)\mathcal{U}(t-c)\} = e^{-cs}\mathcal{L}\{g(t+c)\} \quad (26)$$

Ejemplo 33:

Calcular $\mathcal{L}\{t^2\mathcal{U}(t-1)\}$

Solución:

Para poder usar la propiedad 24, tomamos:

$$t^2\mathcal{U}(t-1) = f(t-c)\mathcal{U}(t-c)$$

Entonces $c = 1$ y $t^2 = f(t-1)$. Para poder calcular $e^{-cs}F(S)$ en nuestra fórmula necesitamos $F(S) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, pero tenemos $f(t-1)$ el cual no es $f(t)$. Pero si introducimos una nueva variable u , y hacemos $u = t - 1$, o, $t = u + 1$, entonces:

$$f(t-1) = t^2$$

$$f(u) = (u+1)^2 = u^2 + 2u + 1$$

⁶ Si $f(t)$ es de orden exponencial α , entonces el teorema de la función de retardo (y sus formas alternativas) necesitan las restricciones $\alpha < S$.

Luego:

$$f(u) = u^2 + 2u + 1$$

Por lo tanto:

$$F(S) = \mathcal{L}\{f(u)\} = \mathcal{L}\{u^2 + 2u + 1\} = \frac{2!}{S^3} + \frac{2}{S^2} + \frac{1}{S}$$

Por lo tanto, de nuestra propiedad tenemos que:

$$t^2 \mathcal{U}(t-1) = e^{-cS} F(S) = e^{-S} \left[\frac{2}{S^3} + \frac{2}{S^2} + \frac{1}{S} \right]$$

Ejemplo 34:

Calcular $\mathcal{L}\{(e^t + 1)\mathcal{U}(t-2)\}$ usando la propiedad 24.

Solución:

Tomamos de nuevo:

$$(e^t + 1)\mathcal{U}(t-2) = f(t-2)\mathcal{U}(t-2)$$

Donde $c = 2$ y $f(t-2) = (e^t + 1)$. Sea $u = t-2$, o $t = u+2$, entonces $f(u) = e^{u+2} + 1 = e^2 e^u + 1$. Entonces $f(u) = e^2 e^u + 1$, de donde:

$$F(S) = \mathcal{L}\{e^2 e^u + 1\} = e^2 \frac{1}{S-1} + \frac{1}{S}$$

Por lo tanto, por nuestra propiedad tenemos:

$$\mathcal{L}\{(e^t + 1)\mathcal{U}(t-2)\} = e^{-cS} F(S) = e^{-2S} \left[\frac{e^2}{S-1} + \frac{1}{S} \right]$$

Observación: es fácil ver que si en (24) hacemos $f(t-a) = 1$, entonces tenemos:

$$\mathcal{L}\{1 \cdot \mathcal{U}(t-c)\} = e^{-cS} F(S)$$

Pero $F(S) = \mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{S}$ por lo tanto:

$$\mathcal{L}\{1 \cdot \mathcal{U}(t-c)\} = \mathcal{L}\{\mathcal{U}(t-c)\} = e^{-cS} \cdot \frac{1}{S} = \frac{e^{-cS}}{S}$$

Ejemplo 35. Función definida a trozos:

La función escalón unitaria es útil para representar funciones definidas a saltos. Calcular la transformada de Laplace de la función:

$$f(t) = \begin{cases} 2 & \text{si } t < 3 \\ -4 & \text{si } 3 \leq t < 4 \\ 1 & \text{si } 4 \leq t \end{cases}$$

Solución:

Por lo visto anteriormente podemos escribir la función definida a trozos como:

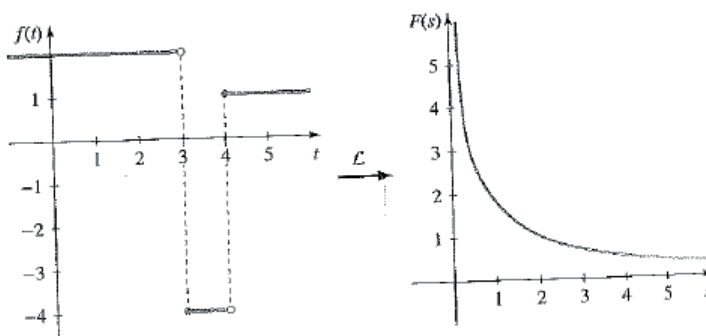
$$f(t) = 2 - 6 \mathcal{U}(t - 3) + 5 \mathcal{U}(t - 4)$$

Luego:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \mathcal{L}\{2 - 6 \mathcal{U}(t - 3) + 5 \mathcal{U}(t - 4)\} = \frac{2 - 6e^{-3t} + 5e^{-4t}}{s}$$

La figura 159 nos muestra la gráfica de la función definida a trozos $f(t)$ y su curva suave continua $F(s)$. Es bueno observar que el término $2/s$ es el dominante.

Figura 159. Gráfica de la función definida a trozos.



Fuente. Elaborado por el autor con el programa Derive.

Ejemplo 8. Otra función definida a trozos:

Usando la función escalar unitaria encuentre la transformada de Laplace de la función definida a trozos:

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ t^2 & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 1 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

Solución:

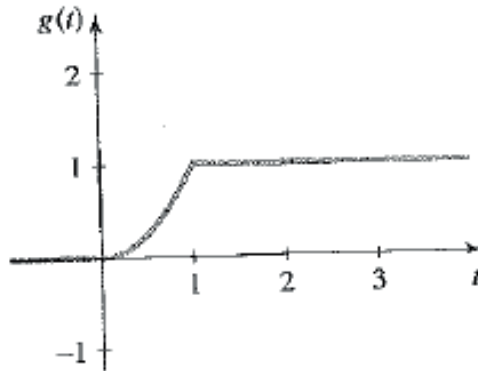
Podemos escribir la función a trozos mediante la función escalar unitaria de la siguiente forma:

$$g(t) = t^2 \mathcal{U}(t) + (1 - t^2) \mathcal{U}(t - 1)$$

Luego:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{g(t)\} &= G(s) = \mathcal{L}\{t^2 \mathcal{U}(t) + (1 - t^2) \mathcal{U}(t - 1)\} \\ &= \int_0^{\infty} e^{-st} t^2 \mathcal{U}(t) dt + \int_0^{\infty} e^{-st} (1 - t^2) \mathcal{U}(t - 1) dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-st} t^2 \mathcal{U}(t) dt + \int_1^{\infty} e^{-st} dt - \int_1^{\infty} e^{-st} t^2 dt \\ &= \int_0^1 t^2 e^{-st} dt + \int_1^{\infty} e^{-st} dt = \frac{2}{s} - e^{-s} \left(\frac{1}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{2}{s^3} \right) + \frac{1}{s} e^{-s} \\ &= \frac{2}{s^3} - 2e^{-s} \left(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^3} \right) \end{aligned}$$

Figura 160. Gráfica de la función definida a trozos.



Fuente. Elaborado por el autor con el programa Derive.

Funciones de retardo

En muchos ejemplos prácticos estamos interesados en problemas de retardo o corrimiento de funciones.

Función de retardo

Para una función dada $g(t)$, la función de retardo, se define como:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < c \\ g(t-c) & \text{si } t \geq c \end{cases}$$

Desplaza g a la derecha c unidades desde el origen y lo reemplaza por cero a la izquierda de $t = c$. Utilizando la función escalón unitaria, la función de retardo también se puede escribir como:

$$f(t) = g(t-c) \mathcal{U}(t-c) \quad (27)$$

Ejemplo 9. Imponiendo un corrimiento:

Imponer un corrimiento de 3 unidades hacia la derecha de la función $f(t) = \sqrt{t}$.

Solución:

Para obtener un corrimiento de 3 unidades hacia la derecha basta escribir la función como:

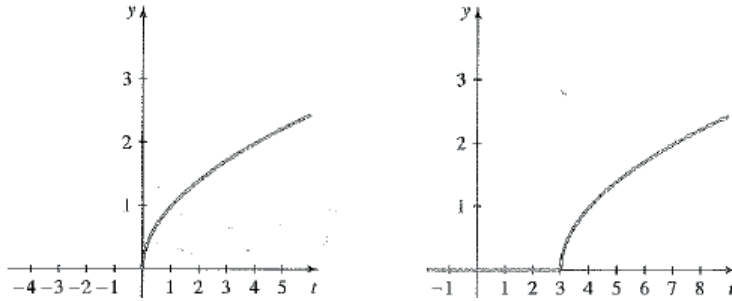
$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 3 \\ \sqrt{t-3} & \text{si } t \geq 3 \end{cases}$$

O si usamos la función escalón unitaria tenemos que:

$$g(t) = \sqrt{t-3} \mathcal{U}(t-3)$$

La figura 161 nos muestra la función (t) y la función trasladada $g(t)$.

Figura 161. Gráfica de la función trasladada.



a) Función original b) Función de retardo $g(t) = \sqrt{t-3}u(t-3)$

Fuente. Elaborado por el autor con el programa Derive.

Ejemplo 38. Transformada de una función de retardo

Encontrar la transformada de Laplace de la función:

$$h(t) = t^2u(t-1)$$

Solución:

Usando la propiedad (24) con $c = 1$ y $g(t) = t^2$, se tiene:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{h(t)\} &= \mathcal{L}\{t^2u(t-1)\} = e^{-s} \mathcal{L}\{t+1\}^2 \\ &= e^{-s} \mathcal{L}\{t^2 + 2t + 1\} = e^{-s} \left(\frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s} \right)\end{aligned}$$

Si comparamos esta simplificación con el cálculo directo, vamos a necesitar calcular la integral de $\int t^2 e^{-st} dt$ por partes.

Ejemplo 39:

Encontrar la transformada de Laplace de la función:

$$g(t) = (e^t + 1)u(t-2)$$

Solución:

Usando la propiedad (24) con $c = 2$ y $g(t) = e^t + 1$, se tiene:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{g(t)\} &= \mathcal{L}\{(e^t + 1)\mathcal{U}(t - 2)\} = e^{-2s} \mathcal{L}\{e^{t+2} + 1\} \\ &= e^{-2s} \mathcal{L}\{e^2 e^t + 1\} = e^{-2s} [e^2 \mathcal{L}\{e^t\} + \mathcal{L}\{1\}] \\ &= e^{-2s} \left[\frac{e^2}{s-1} + \frac{1}{s} \right]\end{aligned}$$

Ejemplo 40. Trabajando con la inversa de la función de retardo:

Calcular la transformada inversa de:

$$F(S) = \frac{1 - e^{-3s}}{s^2}$$

Solución:

Reescribiendo $F(S)$ como:

$$F(S) = \frac{1 - e^{-3s}}{s^2} = \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-3s}}{s^2}$$

Para encontrar $f(t)$, tratamos el segundo término como la transformada de un retardo. Luego:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\{F(S)\} &= t - \underbrace{(t - 3)\mathcal{U}\{t - 3\}} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\{e^{-3s}/s^2\}\end{aligned}$$

Ejemplo 41. Utilizando la forma alternativa:

Usar la función de supresión y la forma alternativa de la propiedad de retardo para encontrar la transformada de Laplace de:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1, \\ -\text{sen}\pi t & \text{si } 1 \leq t < 2 \\ 0 & \text{si } t \geq 2 \end{cases}$$

Solución:

La figura 162 muestra la gráfica de esta función. La cual podemos escribir como:

$$f(t) = -\text{sen}\pi t[\mathcal{U}(t-1) - \mathcal{U}(t-2)]$$

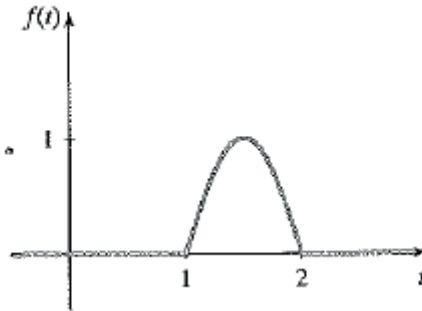
Por 26 podemos encontrar la transformada de Laplace, con $a = 1$ y $b = 2$.

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = e^{-s}\mathcal{L}\{-\text{sen}\pi(t+1)\} + e^{-2s}\mathcal{L}\{\text{sen}\pi(t+2)\}$$

Usando la identidad trigonométrica para $\text{sen}(A+B)$ y simplificando, tenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} &= e^{-s}\mathcal{L}\{\text{sen}\pi t \underbrace{\cos\pi}_{-1} + \cos\pi t \underbrace{\text{sen}\pi}_{0}\} + e^{-2s}\mathcal{L}\{\text{sen}\pi t \underbrace{\cos 2\pi}_{1} + \cos\pi t \underbrace{\text{sen} 2\pi}_{0}\} \\ &= \mathcal{L}\{\text{sen}\pi t\}(e^{-s} + e^{-2s}) = \frac{\pi}{s^2 + \pi^2}(e^{-s} + e^{-2s}) \end{aligned}$$

Figura 162. Gráfica de la función definida a trozos dada.



Fuente. Elaborado por el autor con el programa Derive.

Si en una ecuación diferencial su término forzado es una función definida a trozos, resolver con métodos dados anteriormente es engorroso: una solución separada debe calcularse para cada intervalo de tiempo, y las soluciones «coinciden» mediante la búsqueda de valores iniciales apropiados en cada nuevo intervalo. La transformación de

Laplace nos permite resolver estos problemas con mayor eficiencia, así, por ejemplo:

Ejemplo 42. Término de encendido/apagado:

Resolver el problema con valor inicial:

$$x'' + x' = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < \pi \\ 0 & \text{si } t \geq \pi \end{cases} \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0$$

Solución:

Podemos reescribir la ecuación diferencial escribiendo el término forzado. De la siguiente forma:

$$x'' + x' = 1 - \mathcal{U}(t - \pi) \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0$$

Tomando la transformada de Laplace y sustituyendo por las condiciones iniciales se tiene:

$$S^2 X(S) + X(S) = \mathcal{L}\{1 - \mathcal{U}(t - \pi)\}$$

Por la propiedad del retardo de una función se tiene que:

$$\mathcal{L}\{1 - \mathcal{U}(t - \pi)\} = \frac{1}{s} - \mathcal{L}\{1 \cdot \mathcal{U}(t - \pi)\} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} e^{-\pi s}$$

Luego:

$$S^2 X(S) + X(S) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} e^{-\pi s}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} X(S) &= \frac{1 - e^{-\pi s}}{s(s^2 + 1)} = \frac{1}{s(s^2 + 1)} - e^{-\pi s} \frac{1}{s(s^2 + 1)} \\ &= \left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 1} \right) - e^{-\pi s} \left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 1} \right) \end{aligned}$$

Por la propiedad del retardo tenemos:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(S)\} = (1 - \cos t) - [1 - \cos(t - \pi)]\mathcal{U}(t - \pi)$$

En forma de una función definida a trozos, tenemos:

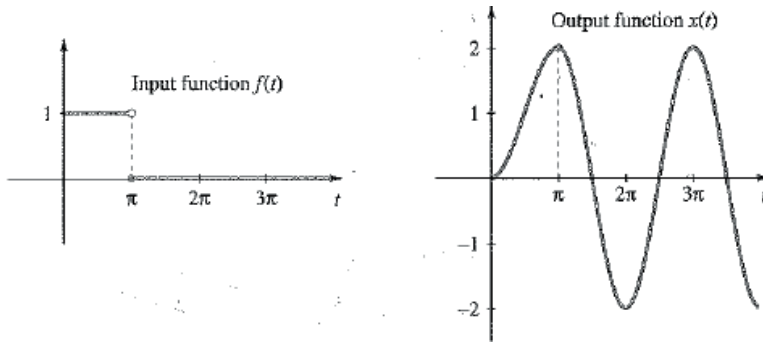
$$x(t) = \begin{cases} 1 - \cos t & \text{si } 0 \leq t < \pi \\ 1 - \cos t - [1 - \cos\{t - \pi\}] & \text{si } t \geq \pi \end{cases}$$

Simplificando y usando la identidad trigonométrica para $\cos(t - \pi)$, se tiene:

$$x(t) = \begin{cases} 1 - \cos t & \text{si } 0 \leq t < \pi \\ -2 \cos t & \text{si } t \geq \pi \end{cases}$$

En la figura 163 tenemos la entrada $f(t)$ y la salida $x(t)$.

Figura 163. Gráfica de la entrada $f(t)$ y la salida $x(t)$.



Fuente. Elaborado por el autor con el programa Derive.

Sabemos poco acerca del comportamiento del «cambio» en el punto en cuestión, pero se puede comprobar que está bien definido por la continuidad en dicho punto.

Funciones periódicas

Una función $f(t)$ definida sobre $(0, \infty)$ es periódica de periodo T si:

$$F(t + T) = f(t) \text{ para todo } t > 0$$

Las funciones periódicas aparecen en muchas aplicaciones. Estamos interesados en ver el comportamiento de las funciones periódicas y la transformada de Laplace. En esta sección veremos esto en detalle.

Teorema

Si $f(t)$ es periódica sobre el intervalo $(0, \infty)$ con periodo T y tiene transformada de Laplace, entonces:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt \quad (28)$$

Demostración:

Suponemos que $f(t)$ es periódica con periodo T y que tiene transformada de Laplace, entonces:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_0^T e^{-st} f(t) dt + \int_T^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

(Si esta segunda integral hacemos $t = T + u$)

$$\begin{aligned} &= \int_0^T e^{-st} f(t) dt + \int_T^{\infty} e^{-s(u+T)} f(u+T) du \\ &= \int_0^T e^{-st} f(t) dt + e^{-sT} \int_0^{\infty} e^{-su} f(u) du \end{aligned}$$

Como $f(t)$ tiene periodo T , entonces:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^T e^{-st} f(t) dt + e^{-sT} \mathcal{L}\{f(t)\}$$

Resolviendo esta ecuación para $\mathcal{L}\{f(t)\}$, se tiene:

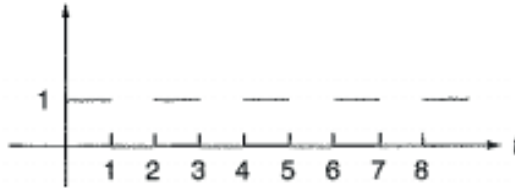
$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt.$$

cuando $f(t)$ es periódica, solo necesitamos $0 < t < T$.

Ejemplo 43:

Encuentre $\mathcal{L}\{g(t)\}$, donde:

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{si } 1 \leq t < 2 \end{cases} \text{ periodo } 2$$

Figura 164. Gráfica de la función de entrada $f(t)$.

Fuente. Elaborado por el autor.

Solución:

Como la función es periódica de periodo 2, entonces por la fórmula (28) se tiene:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{g(t)\} &= \frac{1}{1 - e^{-2s}} \int_0^2 e^{-st} g(t) dt \\
 &= \frac{1}{1 - e^{-2s}} \int_0^1 e^{-st} dt \\
 &= \frac{1}{1 - e^{-2s}} \left(\frac{e^{-st}}{-s} \Big|_0^1 \right) \\
 &= \frac{1}{1 - e^{-2s}} \left(\frac{e^{-s}}{-s} + \frac{1}{s} \right) \\
 &= \frac{1}{s(1 + e^{-s})}
 \end{aligned}$$

Observe que la parte más difícil para el cálculo de la transformada de Laplace según (28) es calcular la integral $\int_0^T e^{-st} f(t) dt$. Esta se puede calcular usando las tablas de la transformada de Laplace, como sigue. Si:

$$\hat{g}(t) = \begin{cases} g(t) & \text{para } 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{para } t > T \end{cases}$$

entonces:

$$\int_0^T e^{-st} g(t) dt = \mathcal{L}\{\hat{g}(t)\}$$

Luego:

$$\begin{aligned} \int_0^T e^{-st} g(t) dt &= \int_0^T e^{-st} \hat{g}(t) dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-st} \hat{g}(t) dt = \mathcal{L}\{\hat{g}(t)\} \quad (29) \end{aligned}$$

Observe que $\hat{g}(t) = g(t)[1 - \mathcal{U}(t - T)]$

Ejemplo 44. Transformada de Laplace de una función periódica:

Sea $g(t)$ la función dada por:

$$g(t) = \begin{cases} t & \text{para } 0 \leq t < 1, \\ 2 - t & \text{para } 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

Hallar $G(s)$. La gráfica de la función se muestra en la gráfica (165).

Figura 165. Gráfica de la función periódica $g(t)$.



Fuente. Elaborado por el autor.

Solución:

Sea:

$$\begin{aligned} \hat{g}(t) &= t[1 - \mathcal{U}(t - 1)] + (2 - t)[\mathcal{U}(t - 1) - \mathcal{U}(t - 2)] \\ &= t + 2(1 - t)\mathcal{U}(t - 1) + (t - 2)\mathcal{U}(t - 2) \end{aligned}$$

Entonces:

$\hat{g}(t) = g(t)$ Para $0 \leq t \leq 2$ y $\hat{g}(t) = 0$ para $t > 2$. La gráfica de $g(t)$ Y $\hat{g}(t)$ están dadas en la figura 22 y 23. Entonces por (28) y (29):

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{g(t)\} &= \frac{1}{1-e^{-2s}} \int_0^2 e^{-st} g(t) dt \\ &= \frac{1}{1-e^{-2s}} \mathcal{L}\{\hat{g}(t)\} \\ &= \frac{1}{1-e^{-2s}} \mathcal{L}[t + 2(1-t)\mathcal{U}(t-1) + (t-2)\mathcal{U}(t-2)] \\ &= \frac{1}{1-e^{-2s}} \left[\frac{1}{s^2} - 2\frac{e^{-s}}{s^2} + \frac{e^{-2s}}{s^2} \right]\end{aligned}$$

La transformada inversa, de Laplace usualmente no se calcula usando (28). Un método para calcularla es mediante el uso de series. Recordemos que para, $|x| < 1$:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Si $s > 0$, $T > 0$, $e^{-2s} > 1$. Haciendo $x = e^{-sT}$, por la serie anterior se convierte en:

$$\frac{1}{1-e^{-sT}} = 1 + e^{-sT} + e^{-2sT} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nsT} \quad (30)$$

Entonces si $\mathcal{L}\{g(t)\} = F(s)$,

$$\frac{1}{1-e^{-sT}} F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nsT} F(s)$$

Tomando la inversa de Laplace a ambos lados y usando (24) con $c = nT$, nos da:

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{1-e^{-sT}} F(s) \right] = \sum_{n=0}^{\infty} f(t - nT) \mathcal{U}(t - nT) \quad (31)$$

De forma similar, haciendo $x = -e^{-sT}$ en la serie geométrica nos da:

$$\frac{1}{1 + e^{-sT}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-nsT}$$

Y:

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{1 + e^{-sT}} F(s) \right] = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n f(t - nT) \mathcal{U}(t - nT) \quad (32)$$

Ejemplo 45. Transformada inversa de Laplace con $1 - e^{-sT}$ en el denominador:

Sea $G(s) = \frac{e^{-2s} - 1}{s^2(1 - e^{-3s})}$. Encontrar $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$.

Solución:

Usando (30), tenemos:

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{1}{s^2} (e^{-2s} - 1) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-3ns} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{s^2} (e^{-(2+3n)s}) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{s^2} e^{-3ns} \end{aligned}$$

Ahora, por (24), $\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2} e^{-cs} \right] = (t - c) \mathcal{U}(t - c)$, luego:

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (t - 2 - 3n) \mathcal{U}(t - 2 - 3n) - \sum_{n=0}^{\infty} (t - 3n) \mathcal{U}(t - 3n).$$

Solución alternativa. Podemos también resolver el ejemplo 17, usando la fórmula (31) con $T = 3$ y $F(s) = -\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^2} e^{-2s}$. Entonces $f(t) = -t + (t - 2) \mathcal{U}(t - 2)$, y de (31):

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} f(t - 3n) \mathcal{U}(t - 3n) &= \sum_{n=0}^{\infty} [-(t - 3n) + (t - 3n - 2) \mathcal{U}(t - 3n - 2)] \mathcal{U}(t - 3n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} -(t - 3n) \mathcal{U}(t - 3n) + (t - 3n - 2) \mathcal{U}(t - 3n - 2) \mathcal{U}(t - 3n) \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} -(t - 3n)\mathcal{U}(t - 3n) + (t - 3n - 2)\mathcal{U}(t - 3n - 2)$$

Esta última desigualdad se sigue de que:

$$\mathcal{U}(t - a)\mathcal{U}(t - b) = \mathcal{U}(t - c)$$

donde c es el mayor entre a y b . (33)

La función delta de Dirac

Sistemas físicos frecuentemente involucran fuerzas de impulso que actúan sobre periodos muy cortos de tiempo, tal como un bate golpeando una pelota de béisbol o la colisión de partículas subatómicas. Para tratar con este tipo de ejemplos, el físico Paul Dirac inventó un objeto llamado «como función», la **función delta de Dirac** o la **función impulso unitario impulsión $\delta(t)$** .

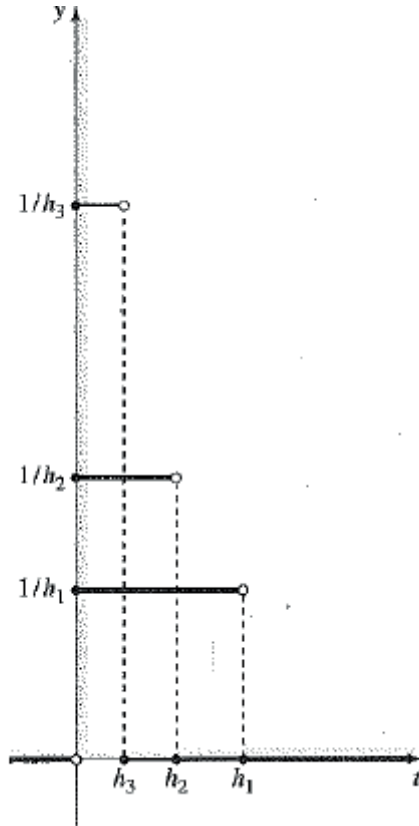
Empecemos con una función especial:

$$f_h(t) = \begin{cases} 0 & \text{Si } t < 0 \\ 1/h & \text{Si } 0 \leq t < h \\ 0 & \text{Si } t \geq h \end{cases}$$

Tal que $\int_{-\infty}^{\infty} f_h(t) dt = 1$. La gráfica típica de $f_h(t)$ se muestra en la figura 166. Entonces Dirac sugiere que:

Figura 166. Gráfica de la función delta de Dirac.

$$\delta(t) \equiv \lim_{h \rightarrow 0} f_h(t)$$



Fuente. Elaborado por el autor.

Esta definición realmente no es válida en matemáticas ordinaria, ya que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h}$ no existe, pero la función delta de Dirac simultáneamente satisface dos condiciones que una función ordinaria no podría cumplir.

Figura 167. Paul Adrien Maurice Dirac (1902-1984).

Fuente. Enciclopedia Británica (Biblioteca virtual de la Universidad EAN).

Físico teórico británico, quien fue premiado (junto con Erwin Schrödinger) con el premio Nobel de Física por su trabajo en mecánica cuántica. Entre otros logros, Dirac describió el movimiento de un electrón mediante cuatro ecuaciones diferenciales simultáneas. Con el hallazgo de estados negativos de energía que predijo con este modelo matemático, Dirac planteó la hipótesis de la existencia de positrones o antipartículas electrónicas, hipótesis que se confirmó más tarde.

La función Delta de Dirac

La **función delta de Dirac** o la **función unidad de impulso**

$\delta(t)$ están definida por dos condiciones:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{Si } t \neq 0 \\ \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{h} \right) & \text{Si } t = 0 \end{cases}$$

$$2. \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (34)$$

Una forma de visualizar la función delta es verla como un límite, en el sentido de una sucesión de funciones que son cero en casi todas

partes, excepto cerca al origen, donde ella toma «puntas»; en el límite, estas puntas se hacen más altas pero más finas para satisfacer la condición 2.

Para encontrar la transformada de Laplace de la función impulso unitario, se tiene primero que calcular la transformada de f_h y entonces examinar qué sucede cuando h tiende a cero. Como f_h es cero para $t > h$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f_h(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} f_h(t) dt = \int_0^h e^{-st} f_h(t) dt \\ &= \frac{1}{h} \int_0^h e^{-st} dt = \frac{1-e^{-hs}}{hs}\end{aligned}$$

Usando la regla de L'hopital, encontramos que:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \mathcal{L}\{f_h(t)\} = 1$$

y definimos la transformada de Laplace de la función impulso unitario como sigue:

Transformada de Laplace de la función delta de Dirac

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1 \quad (35)$$

$$\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-as} \quad (36)$$

Podemos encontrar (36) de manera similar, o escribiendo la función de retardo para la función δ , como:

$$\delta(t-a) \mathcal{U}(t-a)$$

y aplicando el teorema del retardo o corrimiento.

Transformada de Laplace para resolver ecuaciones diferenciales con funciones δ

Los problemas que implican cambios y retardos pueden resolverse sin transformaciones de Laplace, pero las transformaciones son una gran

ayuda, como vimos anteriormente. Para sistemas sujetos a impulsos modelados por la función delta, los métodos de transformación de Laplace son esenciales.

La función delta desempeña un papel importante en la investigación médica, ya que una dosis de medicación administrada por una inyección se puede introducir con una tasa de entrada del fármaco como una función delta.

Ejemplo 46. Función impulso forzada:

Resolver la ecuación diferencial:

$$y'' + y = \delta(t - 1), y(0) = 1$$

Solución:

Tomando la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación y utilizando (36) se tiene:

$$sY(s) - y(0) + Y(s) = e^{-s}$$

Resolviendo para $Y(s)$, tenemos:

$$Y(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{e^{-s}}{s+1}$$

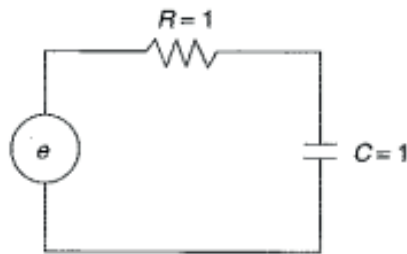
Así que por (24) y (III) de la tabla de transformadas:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-s}\frac{1}{s+1}\right\} = e^{-t} + e^{-t}u(t-1)$$

Físicamente este ejemplo puede ser visto como un ejemplo de un circuito simple lineal RC en la figura 168, donde y es la carga sobre el condensador en el tiempo t , y hay una carga inicial de 1 sobre el condensador. Para $0 \leq t < 1$, el voltaje e es cero y el condensador está descargado. En el tiempo $t = 1$, existe un voltaje impulso, es

decir, un voltaje muy grande aplicado durante un breve periodo que recarga el condensador. Entonces el voltaje es de nuevo cero, y el condensador reanuda la carga.

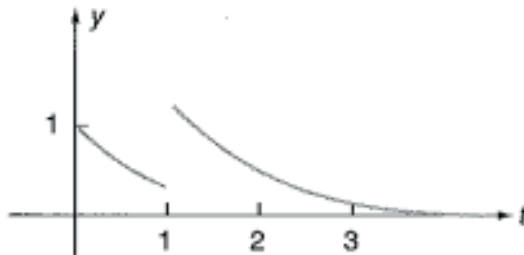
Figura 168. Gráfica de un circuito RC.



Fuente. Elaborado por el autor.

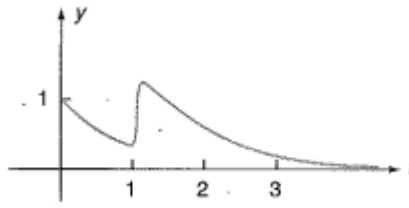
La gráfica 169 muestra la interpretación de lo que es el problema real, mediante $y(t)$.

Figura 169. Interpretación gráfica de la función $y(t)$.



Fuente. Elaborado por el autor con el programa Derive.

Esta gráfica puede ser interpretada mediante la función continua dada en la siguiente figura.

Figura 170. Gráfica de la función continua para el ejemplo 27.

Fuente. Elaborado por el autor con el programa Derive.

Es importante decir que en los problemas reales que implican los impulsos, se debe tener cuidado para asegurar que las ecuaciones que se usan proporcionen modelos asertivos en la precisión de los grandes, pero breves valores dados en el impulso.

Ejemplo 47. Terapia con una droga:

Supongamos que un investigador médico administra a un paciente 100 mg de un fármaco y la misma cantidad 24 horas después. Supongamos que la vida media del fármaco en el cuerpo del paciente es de 24 horas. Utilizar nuestro conocimiento de ecuaciones de primer orden para encontrar la cantidad futura $y = y(t)$ del fármaco presente en el cuerpo. Teniendo en cuenta que este es un problema de mezcla, plantee la ecuación diferencial y resuélvala para $y(t)$.

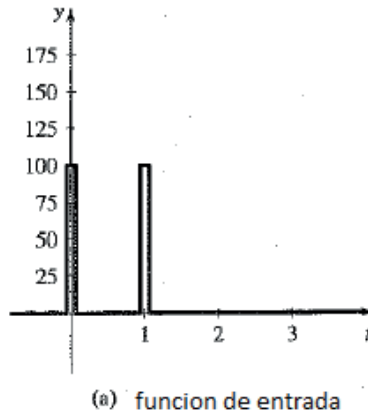
Solución:

Como se trata de un problema de mezcla, entonces debemos tener en cuenta la cantidad de entrada del medicamento así como su cantidad de salida, esto es:

$$\frac{dy}{dt} = \underbrace{100\delta(t) + 100\delta(t-1)}_{\text{Razón de entrada}} - \underbrace{ky}_{\text{razón de salida}}$$

Donde la unidad de medida t está dada en días. La gráfica de la entrada está dada en la siguiente figura.

Figura 171. Gráfica de la función de entrada.



Fuente. Elaborado por el autor.

Podemos evaluar la constante k de decaimiento en nuestra fórmula anterior, usando la información de la vida media. La ecuación de decrecimiento es $y' = -k y$, que tiene como solución $y = y_0 e^{-kt}$. La vida media de 24 horas (un día) significa que:

$$\frac{1}{2} y_0 = y_0 e^{-k}$$

De donde $k = \ln 2 \approx 0.7$, entonces nuestra ecuación se puede escribir como:

$$\frac{dy}{dt} + 0.7y = 100\delta(t) + 100\delta(t - 1)$$

Tomando la transformada de Laplace de esta ecuación tenemos:

$$s\mathcal{L}\{y\} + 0.7\mathcal{L}\{y\} = 100(1 + e^{-s})$$

O:

$$\mathcal{L}\{y\} = 100 \left(\frac{1 + e^{-s}}{s + 0.7} \right)$$

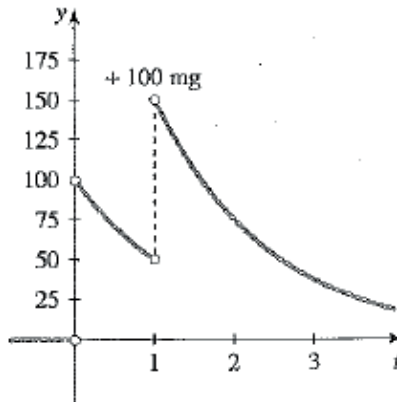
$$\begin{aligned}
 &= 100\left(\frac{1}{s+0.7}\right) + 100\left(\frac{e^{-s}}{s+0.7}\right) \\
 &= 100\mathcal{L}\{e^{-0.7t}\} + 100e^{-s}\mathcal{L}\{e^{-0.7t}\}
 \end{aligned}$$

Luego el futuro de la cantidad de medicamento es:

$$\begin{aligned}
 y(t) &= 100e^{-0.7t} + 100e^{-0.7(t-1)}\mathcal{U}(t-1) \\
 &= \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 100e^{-0.7t} & \text{si } 0 < t < 1 \\ 100(1 + e^{0.7})e^{-0.7t} & \text{si } t > 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

La figura 172 nos muestra la gráfica de esta función:

Figura 172. Gráfica de la función $y(t)$.



**b) La cantidad de
droga en el cuerpo.**

Fuente. Elaborado por el autor con el programa Derive.

Este es exactamente el tipo de problema en el que la información de punto final puede no ser conocida exactamente.

Puede dibujar fácilmente a mano el gráfico de la solución en la figura 172, con la fórmula solución solamente a partir de la información de entrada y la vida media.

- Los saltos en la solución en $t = 0$ y $t = 1$ son causados por la inyección del fármaco. Un impulso de magnitud $A\delta(t - t_0)$ dará lugar a un salto por la cantidad A en $t = t_0$ en la solución $y(t)$ de la ecuación de primer orden.
- Después de cada intervalo de 24 horas, el fármaco que queda en el cuerpo se reduce a la mitad.

Función de respuesta de impulso

Es importante saber cómo un sistema lineal reacciona a una interrupción súbita o función delta de entrada. Esta salida se refiere a la función de respuesta de impulso. Saber cómo un sistema lineal reacciona a una entrada de la función delta nos permite encontrar la salida de los sistemas a cualquier entrada (aprenderemos más sobre esto cuando estudiemos la Convolución en la sección siguiente.) Los siguientes ejemplos encuentran la respuesta de impulso a unos pocos sistemas lineales.

Ejemplo 48. Respuesta de impulso:

Una masa se une a un resorte y se libera del resto 1 unidad por debajo de su posición de equilibrio. Después de que la masa vibre durante π segundos, es golpeada por un martillo en sentido descendente, ejerciendo una fuerza unitaria sobre la masa. Suponiendo que el sistema se rige por el problema de valor inicial:

$$y'' + y = \delta(t - \pi) \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$$

Donde $y(t)$ representa el desplazamiento hacia abajo desde el equilibrio en el instante t , determina el movimiento posterior de la masa.

Solución:

Para hallar $y(t)$, tomamos la transformada de Laplace de la ecuación dada, para obtener:

$$S^2Y(S) - S + Y(S) = e^{\pi S}$$

Resolviendo para $Y(S)$, tenemos:

$$Y(S) = \frac{S}{S^2 + 1} + \frac{e^{\pi S}}{S^2 + 1} = \mathcal{L}\{\cos t\} + e^{-\pi S} \mathcal{L}\{\sin t\}$$

Usando la forma alternativa del teorema de retraso, encontramos que el impulso respuesta es:

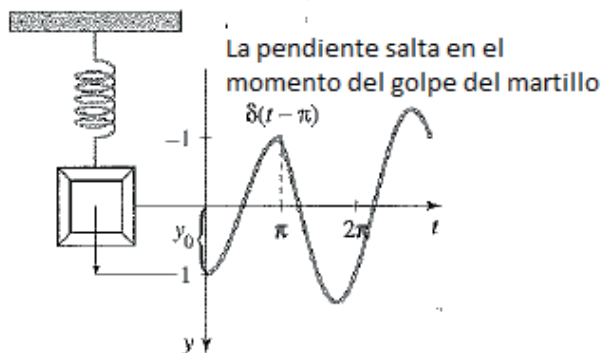
$$y(t) = \cos t + \underbrace{\sin(t - \pi)}_{-1} U(t - \pi)$$

Sen t

$$= \begin{cases} \cos t & \text{si } 0 \leq t < \pi \\ \cos t - \sin t & \text{si } \pi \leq t \end{cases}$$

La gráfica de $y(t)$ se muestra en la figura 173.

Figura 173. Gráfica de la función $y(t)$.



Fuente. Elaborado por el autor con el programa Derive.

La respuesta a $\delta(t - t_0)$ para esta ecuación diferencial de segundo orden provoca un salto de $+1$ en la primera derivada de la solución en $t = t_0$.

Ejemplo 49. Deltas y amortiguación:

Encontrar la respuesta impulso del sistema:

$$x'' + 2x' + 5x = \delta(t - \pi), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0.$$

Solución:

El objeto está en reposo en el momento cero, y permanece así hasta que el impulso se produce en el tiempo $t = \pi$. Tomando la transformada y simplificando, se tiene:

$$(s^2 + 2s + 5)X(s) = e^{-\pi s}$$

por lo tanto:

$$X(s) = e^{-\pi s} \frac{1}{(s+1)^2 + 2^2} = e^{-\pi s} \frac{1}{2} \frac{2}{(s+1)^2 + 2^2}$$

Entonces por el teorema del retraso y la tabla de transformaciones, tenemos:

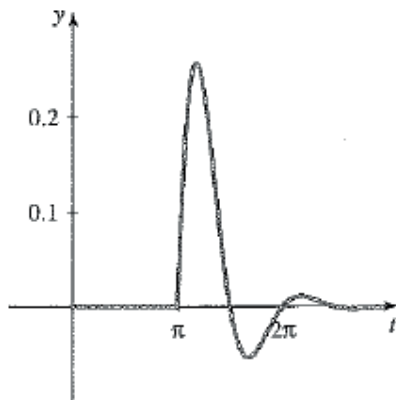
$$x(t) = \frac{1}{2} \mathcal{U}(t - \pi) e^{-(t-\pi)} \text{sen} 2(t - \pi)$$

Luego:

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < \pi \\ \frac{1}{2} e^{-t+\pi} \text{sen} 2t & \text{si } t \geq \pi \end{cases}$$

El impulso de respuesta está dada por la gráfica de la figura 174.

Figura 174. Gráfica de la función de impulso de respuesta.



Fuente. Elaborado por el autor con el programa Derive.

11.6 Ejercicios

Use la función escalonada para escribir la función en cada uno de los problemas del 1 al 7 como una sola expresión simple.

$$1. f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ a & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ b & \text{si } 1 \leq t < 2 \\ c & \text{si } t \geq 2 \end{cases} \quad 2. f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t < 2 \\ e^t & \text{si } 2 \leq t < 3 \\ 2 & \text{si } t \geq 3 \end{cases}$$

$$3. f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t < 1 \\ 4 - t^2 & \text{si } 1 \leq t < 4 \\ 1 & \text{si } t \geq 4 \end{cases} \quad 4. f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 2 \\ \text{sen}\pi t & \text{si } 2 \leq t < 4 \\ 2 & \text{si } t \geq 4 \end{cases}$$

$$5. f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < 2 \\ 3 & \text{si } 2 \leq t < 5 \\ t & \text{si } t \geq 3 \end{cases} \quad 6. f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ -1 & \text{si } 1 \leq t < 2 \\ 1 & \text{si } 2 \leq t < 3 \\ -1 & \text{si } t \geq 3 \end{cases}$$

$$7. f(t) = \begin{cases} \text{sen}t & \text{si } 0 < t \leq \pi \\ 0 & \text{si } \pi \leq t < 2\pi \\ \text{sen}t & \text{si } 2\pi \leq t \leq 3\pi \\ 0 & \text{si } t \geq 3\pi \end{cases}$$

Series geométricas. Es una serie en la cual cada término de la sucesión es obtenido multiplicando el término que le precede por una razón constante r . Si $|r| < 1$, el siguiente teorema permite encontrar la suma infinita.

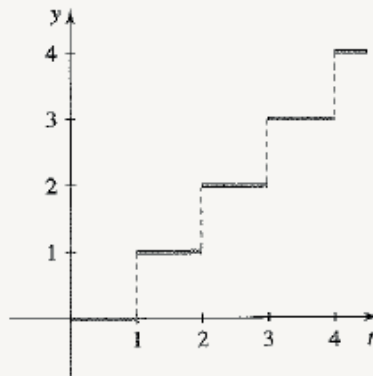
Teorema para las series geométricas

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$$

Podemos usar este resultado para escribir la transformada de Laplace en «forma cerrada» (sin el «...» al final de la expresión) para las funciones en el siguiente conjunto de funciones. En cada problema del 8 al 13, escriba las funciones como una suma de funciones escalonadas, tomando sus transformadas de Laplace, y luego escriba $\mathcal{L}\{f(t)\}$ en forma cerrada usando el teorema de la serie geométrica.

8. Encuentre la transformada de Laplace para la función escalera definida sobre $[0, \infty)$, definida por $f(t) = n$, $n \leq t < n + 1$, para cualquier natural n .

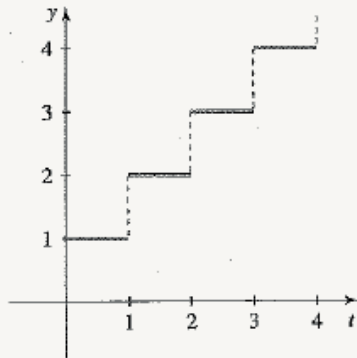
Figura 175. Gráfica de la función escalon.



Fuente. Elaborado por el autor con el programa Derive.

9. Encuentre la transformada de Laplace para la función escalera definida sobre $[0, \infty)$, definida por $f(t) = n + 1$, $n \leq t < n + 1$, para cualquier natural n .

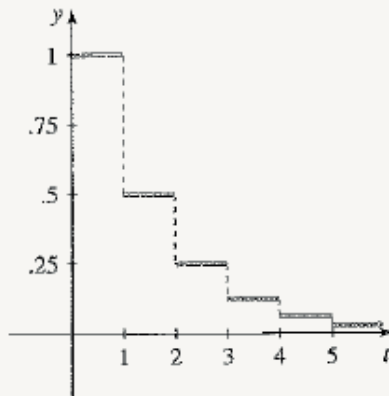
Figura 176. Gráfica de la función escalón para el ejercicio 9.



Fuente. Elaborado por el autor.

10. Encuentre la transformada de Laplace para la función escalera descendiente (disminuyendo) definida sobre $[0, \infty)$ definida por $f(t) = \frac{1}{2^n}$, $n \leq t < n + 1$, para cualquier natural n .

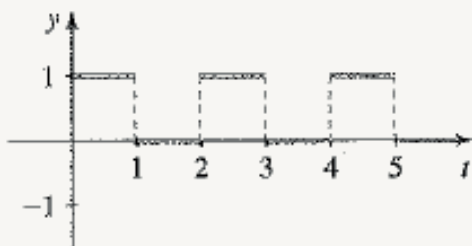
Figura 177. Gráfica de la función escalón para el ejercicio 10.



Fuente. Elaborado por el autor.

11. Encuentre la transformada de Laplace para la función de onda cuadrada f definida por la figura 178 sobre $[0, \infty)$.

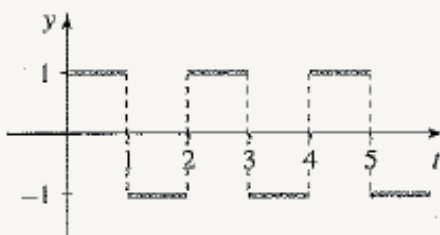
Figura 178. Gráfica de la función onda cuadrada.



Fuente. Elaborado por el autor.

12. Encuentre la transformada de Laplace para la función de onda cuadrada f , definida sobre el intervalo $[0, \infty)$.

Figura 179. Gráfica de la función onda cuadrada para el ejercicio 12.

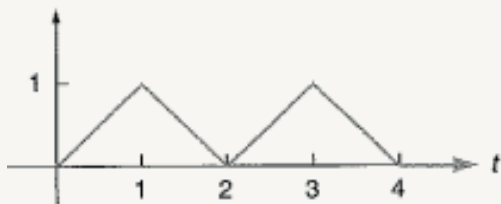


Fuente. Elaborado por el autor.

En los ejercicios 13 al 18, escribir la función definida sobre el intervalo $(0, \infty)$ en términos de la función escalón unitario.

13.

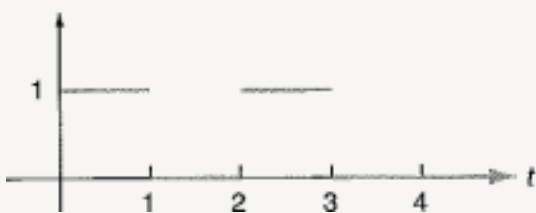
Figura 180. Gráfica de la función periódica.



Fuente. Elaborado por el autor.

14.

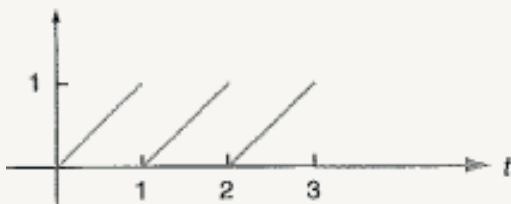
Figura 181. Gráfica de una función periódica.



Fuente. Elaborado por el autor.

15.

Figura 182. Gráfica de una función periódica.



Fuente. Elaborado por el autor.

16.

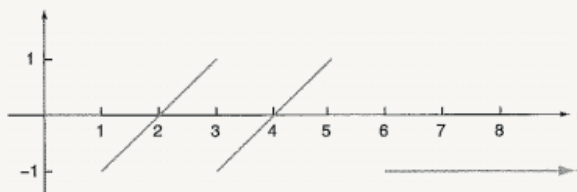
Figura 183. Gráfica de una función periódica



Fuente. Elaborado por el autor con el programa Derive.

17.

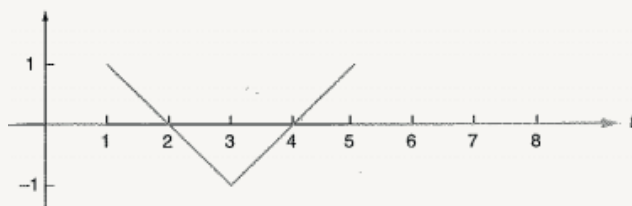
Figura 184. Gráfica de una función periódica.



Fuente. Elaborado por el autor.

18.

Figura 185. Gráfica de una función periódica.



Fuente. Elaborado por el autor.

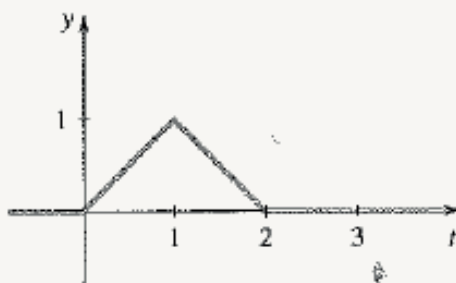
Funciones continuas a trozos. En algunas aplicaciones es necesario usar funciones continuas a trozos y combinarlas para formar nuevas funciones continuas a trozos. Para las funciones definidas en

los ejercicios 19 a 25, utilice la función de interrupción y la forma alternativa de la propiedad de retardo para encontrar la transformada de Laplace.

19. Encuentre $\mathcal{L}\{f\}$ para la función triangular que se muestra en la figura definida por:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ t & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 2 - t & \text{si } 1 \leq t < 2 \\ 0 & \text{si } t \geq 2. \end{cases}$$

Figura 186. Gráfica de la función definida a trozos.



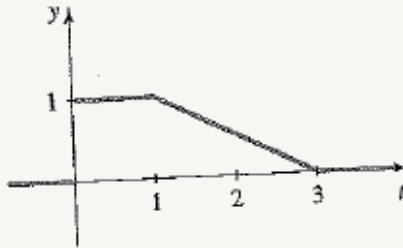
Fuente. Elaborado por el autor.

Podemos usar la función supresión para escribir:

$$F(t) = t[\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t - 1)] + (2 - t)[\mathcal{U}(t - 1) - \mathcal{U}(t - 2)]$$

20. Encuentre $\mathcal{L}\{f\}$ para la función que se muestra en la figura 187, note que $f(t) = 0$ para $t > 3$.

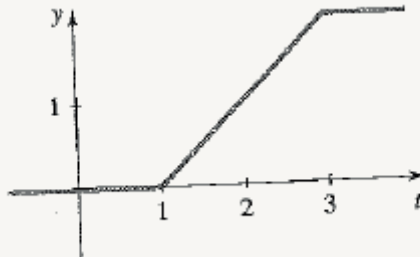
Figura 187. Gráfica de una función trazada a trozos.



Fuente. Elaborado por el autor.

21. Encuentre $\mathcal{L}\{f\}$ para la función que se muestra en la figura 188, note que $f(t) = 2$ para $t > 3$.

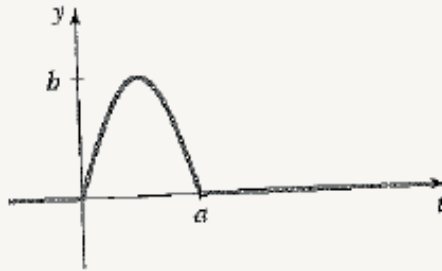
Figura 188. Gráfica de la función dada.



Fuente. Elaborado por el autor.

22. Encuentre $\mathcal{L}\{f\}$ para la función que se muestra en la figura 189. La función está compuesta de una sola joroba de la función seno y una línea recta.

Figura 189. Gráfica de la función dada.



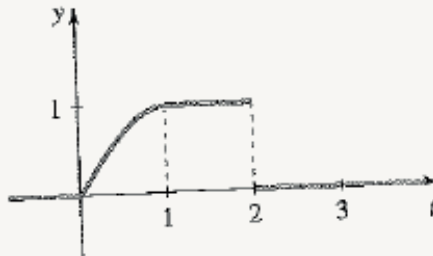
Fuente. Elaborado por el autor con el programa Derive.

Nota: la función seno de periodo P se puede expresar como:

$$f(t) = \text{sen}\left(\frac{2\pi t}{P}\right)$$

23. Encuentre $\mathcal{L}\{f\}$ para la función que se muestra en la figura 190. La función se compone de una pieza sinusoidal y líneas rectas.

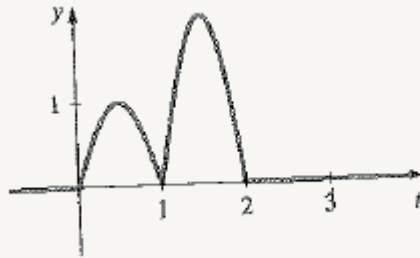
Figura 190. Gráfica de la función dada.



Fuente. Elaborado por el autor con el programa Derive.

24. Encuentre $\mathcal{L}\{f\}$ para la función que se muestra en la figura 191. La función se compone de dos piezas sinusoidales y líneas rectas.

Figura 191. Gráfica de la función dada.



Fuente. Elaborado por el autor con el programa Derive.

En los ejercicios 45 al 56, calcule la transformada de Laplace $Y(S)$ de $y(t)$:

45. $y(t) = 2 - 5u(t - 1) + 6u(t - 3)$

46. $y(t) = t u(t - 2)$

47. $y(t) = (t - 2)u(t - 2)$

48. $y(t) = (t^3 + 1)u(t - 1)$

49. $y(t) = e^{3t}u(t - 2) + 6u(t - 3)$

50. $y(t) = \sin t u(t - \pi)$

51. $y(t) = \sin t u(t - \pi/2)$

52. $y(t) = \cos t u(t - 2\pi)$

53. $y(t) = (t^3 + t)u(t - 2)$

54. $y(t) = e^{2t}u(t - 3)$

$$55. y(t) = t^2 e^{2t} \mathcal{U}(t - 1)$$

$$56. Y(t) = t e^{5t} \mathcal{U}(t - 2)$$

Determine la transformada de Laplace de las funciones en los problemas 57 al 60.

$$57. \delta(t - 1) + 2\delta(t - 2) + 3\delta(t - 3)$$

$$58. \delta(t) - 2\delta(t - \pi) + \delta(t - 2\pi)$$

59.

$$\delta(t) - \delta(t - 1) + \delta(t - 2) - \delta(t - 3) + \delta(t - 4) - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \delta(t - n)$$

60.

$$\delta(t) - \delta(t - \pi) + \delta(t - 2\pi) - \delta(t - 3\pi) + \delta(t - 4\pi) - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - n\pi)$$

Laplace paso a paso. Obtener la transformada de Laplace de las funciones de los problemas del 61 al 67.

$$61. 1 - \mathcal{U}(t - 1)$$

$$62. 1 - \mathcal{U}(t - 1) + \mathcal{U}(t - 2)$$

$$63. (t - 1)\mathcal{U}(t - 1)$$

$$64. \operatorname{sen} \mathcal{U}(t - \pi)\mathcal{U}(t - \pi)$$

$$65. e^t \mathcal{U}(t - 1)$$

$$66. \mathcal{U}(1 - e^{-t})$$

$$67. t^2 \mathcal{U}(t - 2)$$

Transformada inversa. Obtener la inversa de la transformada inversa de la función dada de los problemas 68 al 80.

$$68. \frac{e^{-s}}{s}$$

$$69. \frac{e^{-s}}{s^2}$$

$$70. \frac{e^{-2s}}{s-3}$$

$$71. \frac{e^{-4s}}{s+4}$$

$$72. \frac{e^{-s}}{s(s+1)}$$

$$73. \frac{e^{-s} - 2e^{-2s} + 2e^{-3s} - e^{-4s}}{s}$$

$$74. \frac{e^{-3s}}{s^3}$$

$$75. e^{-2s} \frac{1}{s^2+s} + e^{-3s} \frac{1}{s^2+s}$$

$$76. \frac{e^{-3s}}{s^2+2s+2}$$

$$77. \frac{e^{-2s}}{(s+4)^5}$$

$$78. \frac{e^{-s}}{s^2+s} - \frac{e^{-2s}}{s^2+s}$$

$$79. e^{-3s} \left[\frac{1}{s} + \frac{1}{s-2} \right]$$

$$80. e^{-s} \left[\frac{4}{s} + \frac{6s}{s^2+9} \right]$$

Soluciones de transformación. En cada uno de los problemas del 81 al resuelva el problema con valor inicial y grafique tanto la función forzada como la solución.

$$81. x' = 1 - \mathcal{U}(t - 1), x(0) = 0$$

$$82. x' = 1 - 2\mathcal{U}(t - 1) + \mathcal{U}(t - 2), x(0) = 0$$

$$83. x'' + x = \mathcal{U}(t - \pi) - 2\mathcal{U}(t - 2\pi), x'(0) = 1, x(0) = 0$$

$$84. x'' + x = \mathcal{U}(t - 3) \quad x'(0) = 1, x(0) = 0$$

$$85. x'' + x = g(t), x(0) = x'(0) = 0, \text{ donde:}$$

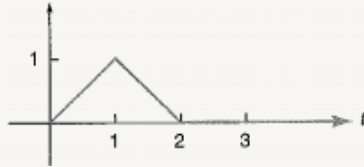
$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < 2 \\ 1 & \text{si } 2 \leq t < 5 \\ 0 & \text{si } 5 \leq t \end{cases}$$

$$86. x'' - x = g(t), x(0) = x'(0) = 0, \text{ donde:}$$

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq t < 3 \\ 0 & \text{si } 3 \leq t \end{cases}$$

$$87. x' - 3x = g(t), x(0) = 1, \text{ y } g(t) \text{ está dada por la figura 50.}$$

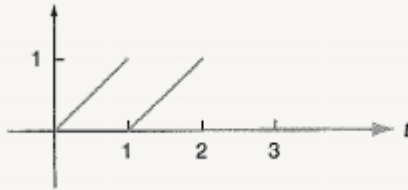
Figura 192. Gráfica de la función $g(t)$.



Fuente. Elaborado por el autor.

88. $x'' + x = g(t)$, $x(0) = 0$, y $g(t)$ está dada por la figura 193.

Figura 193. Gráfica de la función dada



Fuente. Elaborado por el autor.

89. $x'' + 2x' + 10x = g(t)$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$, donde:

$$g(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq t < 3 \\ 0, & \text{si } 3 \leq t \end{cases}$$

90. $x'' + 5x' + 6x = g(t)$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$, donde:

$$g(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq t < \frac{\pi}{2}, \\ \cos t, & \text{si } \frac{\pi}{2} \leq t < \frac{3\pi}{2} \\ 0, & \text{si } \frac{3\pi}{2} \leq t \end{cases}$$

91. $x'' - 2x' + x = g(t)$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 1$, donde:

$$g(t) = \begin{cases} t^2, & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 0, & \text{si } 1 \leq t \end{cases}$$

92. $x'' + 9x = g(t)$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$, donde:

$$g(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq t < 2 \\ e^{-t}, & \text{si } 2 \leq t \end{cases}$$

93. $x'' - 9x = g(t)$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$, donde:

$$g(t) = \begin{cases} e^{-t}, & \text{si } 0 \leq t < 4, \\ 1, & \text{si } t \geq 4. \end{cases}$$

94. $x' - 5x = g(t)$, $x(0) = 0$, donde:

$$g(t) = \begin{cases} e^{3t}, & \text{si } 0 \leq t < 4 \\ 0, & \text{si } 4 \leq t \end{cases}$$

95. $x' + 5x = g(t)$, $x(0) = 0$, donde:

$$g(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq t < 4 \\ e^{3t}, & \text{si } 4 \leq t \end{cases}$$

96. $x' + 3x = g(t)$, $x(0) = 0$, donde:

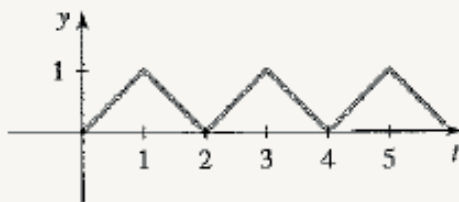
$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < \frac{\pi}{2} \\ \cos t, & \text{si } \frac{\pi}{2} \leq t \end{cases}$$

97. $x' - 4x = g(t)$, $x(0) = 0$, donde:

$$g(t) = \begin{cases} \cos t, & \text{si } 0 \leq t < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{si } \frac{\pi}{2} \leq t \end{cases}$$

98. Considere la onda triangular con $P = 2$, dada en la figura 194 para obtener la transformada de Laplace.

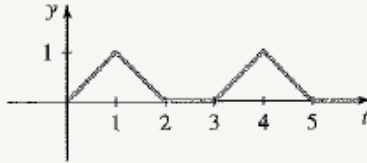
Figura 194. Gráfica de la función periódica dada.



Fuente. Elaborado por el autor.

99. Encuentre la transformada de Laplace de la nueva onda de tipo triangular dada en la figura 195.

Figura 195. Gráfica de la función de tipo triangular.



Fuente. Elaborado por el autor.

100. Encuentre la transformada de Laplace para la función dentada de la figura 196.

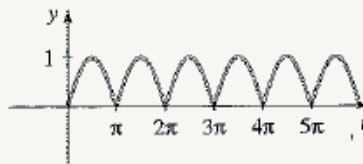
Figura 196. Gráfica de la función dentada



Fuente. Elaborado por el autor.

101. Encuentre la transformada de Laplace para $|\sin t|$ (llamada por los ingenieros: la rectificación de onda completa del $\sin t$), como se muestra en la figura 197.

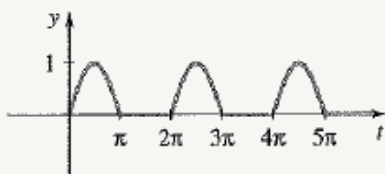
Figura 197. Gráfica de la rectificación de onda completa.



Fuente. Elaborado por el autor.

102. Encuentre la transformada de Laplace de la semionda rectificada del $\sin t$ (ignorando la parte negativa y reemplazándola por cero), como se muestra en la figura 198.

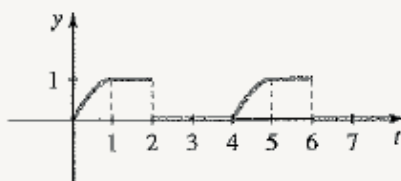
Figura 198. Gráfica de la función de semionda.



Fuente. Elaborado por el autor.

103. Encuentre la transformada de Laplace de la función periódica que se muestra en la figura 199 (sobre el intervalo $(0,1)$ la curva es sinusoidal).

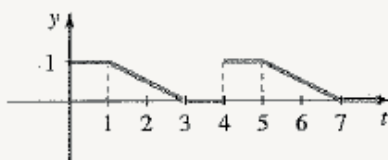
Figura 199. Gráfica de la función periódica de la figura (57).



Fuente. Elaborado por el autor.

104. Encuentre la transformada de Laplace para la función periódica que se muestra en la figura 200.

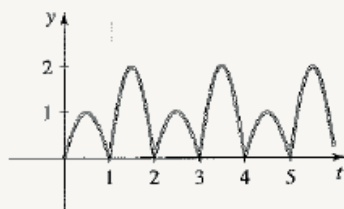
Figura 200. Diagrama trazado con herramientas de Word.



Fuente. Elaborado por el autor.

105. Encuentre la transformada de Laplace de la función periódica que se muestra en la figura 201 (la porción de curvas son pedazos de funciones sinusoidales).

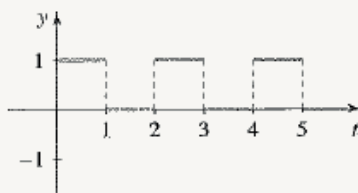
Figura 201. Gráfica de la función periódica para el ejercicio 105.



Fuente. Elaborado por el autor con el programa Derive.

106. Encuentre la transformada de Laplace para la onda cuadrada dada en la figura 202.

Figura 202. Gráfica de la ecuación de onda cuadrada.



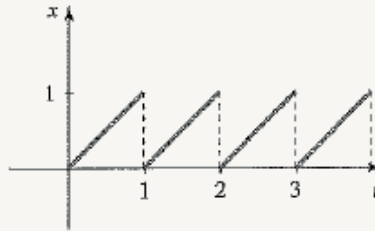
Fuente. Elaborado por el autor.

107. Hoja de Sierra. Resolver el problema con valor inicial $x' + x = f(t)$, $x(0) = 0$, donde la función forzada:

$$f(t) = t - \mathcal{U}(t-1) - \mathcal{U}(t-2) - \dots$$

es la función dentada triangular que se muestra en la figura 203.

Figura 203. Gráfica de la función Dentada.

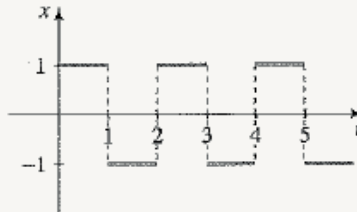


Fuente. Elaborado por el autor.

108. Entrada de onda cuadrada. Resuelva el problema con valor inicial $x'' + x = f(t)$, $x(0) = 0$, donde la onda rectangular está dada por la función forzada:

$$f(t) = 1 - u(t - 1) + 2u(t - 2) - \dots$$

Figura 204. Gráfica de la función de onda ciudad.



Fuente. Elaborado por el autor.

En los ejercicios 109 al 116 encuentre $g(t)$ dada $G(S)$.

$$109. G(S) = \frac{1}{1-e^{-S}} \left\{ \frac{1}{S^2} + \frac{1}{S^3} \right\} \quad 110. G(S) = \frac{1}{1-e^{-3S}} \left\{ \frac{2S}{S^2+6S+13} \right\}$$

$$111. G(S) = \frac{1}{1-e^{-S}} \left\{ \frac{S}{S^2+4} \right\} \quad 112. G(S) = \frac{1}{S} \tanh \frac{S}{2}$$

$$113. G(S) = \frac{1}{1-e^{-2S}} \left\{ \frac{1}{S^2} + \frac{e^{-S}}{S^3} \right\} \quad 114. G(S) = \frac{1}{S} \operatorname{sech} S$$

$$115. G(S) = \frac{1}{1-e^{-\pi S}} \left\{ \frac{1}{S} + \frac{e^{-\pi S/2}}{S^2+1} \right\} \quad 116. G(S) = \frac{1}{1-e^{-3S}} \left\{ \frac{1}{S} + \frac{e^{-S}}{S^2} + \frac{e^{-2S}}{S^3} \right\}$$

En los ejercicios 117 al 123, resuelva el problema con condición inicial, usando la transformada de Laplace.

$$117. x'' + x = g(t), x(0) = 0 \text{ y } g(t) = |\operatorname{sen} t|$$

$$118. x'' + x = |\operatorname{sen} 2t|, x(0) = 0, x'(0) = 0$$

$$119. x'' - x = \operatorname{sen} t - |\operatorname{sen} t|, x(0) = 0, x'(0) = 1$$

$$120. x'' + x = g(t), x(0) = 0, g(t) = e^t \text{ para } 0 \leq t < 1, \text{ de periodo } 1$$

$$121. x'' - 2x = g(t), x(0) = 0, g(t) = t, \text{ para } 0 \leq t < 1, \text{ de periodo } 1$$

$$122. x'' - 4x = g(t), x(0) = x'(0) = 0, g(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ -1 & \text{si } 1 \leq t < 2 \end{cases} \text{ de periodo } 2$$

$$123. x'' + 2x' + x = g(t), x(0) = x'(0) = -1, g(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq t < 2 \\ -1 & \text{si } 2 \leq t < 3 \end{cases} \text{ de periodo } 3$$

Resolver con la función impulso. Resolver los problemas con valor inicial del 124 al 128.

$$124. x' = \delta(t), x(0) = 0$$

$$125. x' = \delta(t) - \delta(t - 1); x(0) = 0.$$

$$126. x'' + x = \delta(t - 2\pi); x(0) = 0, x'(0) = 0.$$

$$127. x'' + x = -\delta(t - \pi) + \delta(t - 2\pi); x(0) = 0, x'(0) = 1.$$

$$128. x'' + x = \delta(t - 2\pi); x(0) = 1, x'(0) = 0$$

11.7 La convolución de funciones y la función de transferencia

La convolución

En la sección 11.1, encontramos que la transformada de Laplace de la suma de dos funciones es igual a la suma de sus transformadas. Este mismo hecho no se tiene para el producto. Así por ejemplo, tenemos que:

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}} \text{ y } \mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a} \text{ pero } \mathcal{L}\{t^n e^{at}\} = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$$

Este resultado no es el producto de las transformadas. Pero las ideas de las transformaciones de los factores se fusionan de alguna manera.

Antes de ver cómo podemos definir un producto especial para lograr nuestro objetivo, recordemos que la transformada de Laplace de la derivada de una función es obtenida multiplicando la transformación de la función por S , es decir:

$$\mathcal{L}\{g'(t)\} = S\mathcal{G}(S) - g(0) \quad (37)$$

Luego, no debe ser una sorpresa que la transformada de Laplace de una integral se obtiene dividiendo por S . Para ser precisos:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{F(S)}{S} \quad (38)$$

Prueba de (38)

Usando (38) con $g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$, se tiene que $g'(t) = f(t)$ y $g(0) = 0$:

$$\mathcal{L}\{g'(t)\} = F(S) = S G(S) - g(0) = S \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\}$$

ya que $g(0) = 0$. El resultado se tiene, despejando de:

$$F(S) = S \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\}$$

es decir:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{F(S)}{S}$$

Ejemplo 50. Inversa de la transformada de Laplace usando (38):

Aunque es mejor utilizar fracciones parciales, calcular $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{S(S+5)}\right\}$ usando (38).

Solución:

Tenemos que $F(S) = \frac{3}{S+5}$, luego $f(t) = 3e^{-5t}$. De acuerdo con (38):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(S)}{S}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{S(S+5)}\right\} = \int_0^t f(\tau) d\tau \\ &= \int_0^t 3e^{-5\tau} d\tau = 3 \left. \frac{e^{-5t}}{-5} \right|_0^t = \frac{3}{5}(1 - e^{-5t}) \end{aligned}$$

Encontrar la transformada inversa de Laplace de un producto de transformaciones es una cuestión que surge frecuentemente.

El eslabón perdido para la transformada de un producto es la convolución, es una generalización del producto. Definido como sigue, la convolución proporciona otra manera de representar las soluciones a los problemas de entrada-salida.

Convolución

Si $f(t)$ y $g(t)$ son funciones continuas a trozos sobre $[0, \infty)$, la convolución de f y g está definida por:

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-w)g(w)dw \quad (39).$$

La idea de la convolución lleva a un teorema útil relativo a las transformaciones de Laplace.

Teorema de la convolución

Si $f(t)$ y $g(t)$ son funciones continuas a trozos sobre $[0, \infty)$ de orden exponencial α entonces:

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t-w)g(w)dw\right\} = \mathcal{L}\{f(t)\} \cdot \mathcal{L}\{g(t)\} = F(S) \cdot G(S), S > \alpha \quad (40)$$

La forma inversa de (39) es:

$$= (f * g)(t), S > \alpha \quad (41)$$

Utilizaremos el teorema de la convolución de manera ventajosa cuando queramos encontrar la transformada inversa de Laplace de un producto de dos funciones $F(S)$ y $G(S)$, para las que conocemos individualmente $\mathcal{L}^{-1}\{F(S)\}$ y $\mathcal{L}^{-1}\{G(S)\}$ ⁷.

Ejemplo 51. Convolución:

Si $f(t) = e^t$ y $g(t) = e^{4t}$, calcular $(f * g)$.

Solución:

Usando (40), la convolución de $(f * g)$ es justamente otra función de t dada por:

$$(f * g) = (e^t * e^{4t}) = \int_0^t e^\tau e^{4(t-\tau)} d\tau$$

⁷ Para una demostración del teorema de la Convolución ver M. Braun. Differential Equations and Their applications. Tercera edición. Springer - Verlag (1983).

$$\begin{aligned}
 &= e^{4t} \int_0^t e^{-3\tau} d\tau = e^{4t} \left. \frac{e^{-3\tau}}{-3} \right|_{\tau=0}^{\tau=1} \\
 &= \frac{1}{3} e^{4t} (1 - e^{-3t}) = \frac{1}{3} (e^{4t} - e^t)
 \end{aligned}$$

Ejemplo 52. Transformada inversa de Laplace usando la Convención:

Use el teorema anterior parte (41) para evaluar $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+1)(s+2)} \right\}$.

Solución:

Sea $F(s) = \frac{1}{(s+1)}$ y $G(s) = \frac{1}{(s+2)}$. Entonces:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s+1} \right\} = e^{-t},$$

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s+2} \right\} = e^{-2t}$$

Por lo tanto, por (41) nos da:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}^{-1}\{F(s) \cdot G(s)\} &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+1)(s+2)} \right\} = e^{-t} * e^{-2t} \\
 &= \int_0^t e^{-\tau} e^{-2(t-\tau)} d\tau = e^{-2t} \int_0^t e^{\tau} d\tau \\
 &= e^{-2t} (e^t - 1) = e^{-t} - e^{-2t}
 \end{aligned}$$

Por supuesto que este ejemplo también se puede resolver utilizando la expansión en fracciones parciales.

Identidades trigonométricas útiles

$$\text{Sen } A \text{ sen } B = \frac{1}{2} [\text{Cos}(A - B) - \text{Cos}(A + B)]$$

$$\text{Cos } A \text{ Cos } B = \frac{1}{2} [\text{Cos}(A + B) + \text{Cos}(A - B)]$$

$$\text{Sen } A \text{ Cos } B = \frac{1}{2} [\text{Sen}(A + B) + \text{Cos}(A - B)]$$

Propiedades de la convolución

Si $f(t)$ y $g(t)$ son funciones continuas a trozos sobre $(0, \infty)$, entonces:

- I. $f * g = g * f$ (propiedad conmutativa).
- II. $f * (g * h) = (f * g) * h$ (propiedad asociativa).
- III. $f * (g + h) = f * g + f * h$ (propiedad distributiva).
- IV. $f * 0 = 0$ (multiplicación por cero).

Prueba de la propiedad conmutativa

Por definición se tiene que:

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-w)g(w)dw$$

Haciendo un cambio de variable, tomando $u = t - w$, la ecuación anterior se transforma en:

$$\begin{aligned} (f * g)(t) &= \int_0^t f(t-w)g(w)dw = \int_t^0 f(u)g(t-u)(-du) \\ &= \int_0^t g(t-u)f(u)(du) = g * f \end{aligned}$$

por definición de la convolución.

Aplicaciones de la convolución a la solución de ecuaciones diferenciales

Ejemplo 53. Resonancia:

Considere el caso en el cual la frecuencia de la función forzada es la frecuencia natural del sistema, tal como el problema con valor inicial:

$$x'' + x = \sin t, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0, \quad x(\infty) = 1$$

Resolver la ecuación diferencial.

Solución:

Tomando la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación diferencial y resolviendo para $X(S) = \mathcal{L}\{x(t)\}$, se tiene:

$$X(S) = \frac{S}{S+1} + \frac{1}{(S^2+1)^2}$$

La transformada inversa de Laplace de esta ecuación es:

$$x(t) = \cos t + \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(S^2+1)^2}\right\}}_{\text{Sen } t * \text{sent}}$$

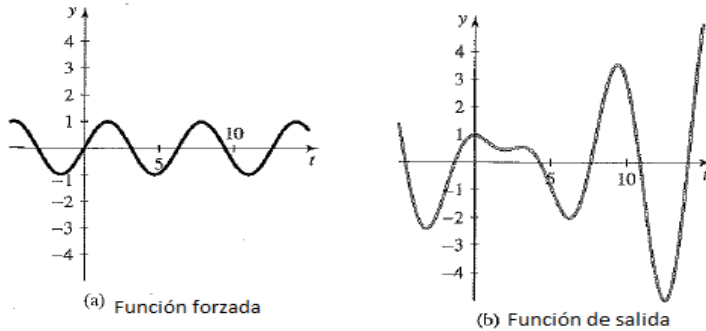
Podemos completar esta respuesta usando la convolución, como sigue:

$$\begin{aligned} \text{Sen } t * \text{sent} &= \int_0^t \text{sen}(t-w)\text{sen}(w)dw \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t [\cos(t-2w) - \cos t]dw \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{\text{sen}(t-2w)}{2} \right]_0^t - \frac{1}{2} t \cos t \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\text{sen } t}{2} + \frac{\text{sen } t}{2} \right] - \frac{1}{2} t \cos t \\ &= \frac{\text{sen } t - \cos t}{2} \end{aligned}$$

Luego la solución para el problema con valor inicial es:

$$x(t) = \cos t + \frac{\text{sen } t - \cos t}{2}$$

La figura 63 a y b muestra la gráfica de la función forzada y la función de salida.

Figura 205. Gráfica de la función forzada y la función de salida.

Fuente. Elaborado por el autor.

La función de transferencia

En el capítulo 6 resolvimos ecuaciones diferenciales lineales de primer orden $x' + a x = f(t)$ usando el método del factor integrante. Encontramos que la solución de esta ecuación es:

$$x(t) = \int_0^t e^{-a(t-w)} f(w) dw$$

La cual se puede reorganizar como una convolución, haciendo $x = e^{-at} * f(t)$, en efecto, toda solución de la ecuación diferencial con coeficientes constantes son convoluciones.

Consideremos un sistema físico con dos términos forzados diferentes $\delta(t)$ y $f(t)$, modelados por la misma ecuación diferencial de segundo orden:

$$a h'' + b h' + c h = \delta(t) \quad h(0) = h'(0) = 0$$

$$a x'' + b x' + c x = f(t) \quad x(0) = x'(0) = 0 \quad (42)$$

En este caso decimos que los sistemas están en estado inicial cero porque todas las condiciones son cero. En este caso podemos demostrar que todas las soluciones están relacionadas.

Forzar con una función Delta

El sistema:

$$a_n h^{(n)} + a_{n-1} h^{(n-1)} + \dots + a_1 h' + a_0 h = \delta(t)$$

$$h(0) = h'(0) = \dots = h^{(n-1)}(0) = 0$$

Tiene una solución $h(t)$, la cual es **función de respuesta de impulso**, como la introducida en la sección anterior. Su transformada de Laplace es:

$$H(S) = \mathcal{L}\{h(t)\} = \frac{1}{a_n S^n + a_{n-1} S^{n-1} + \dots + a_1 S + a_0} \quad (43)$$

Esta es llamada la función de transferencia del sistema.

Retornando a la ecuación (42), y con la estrategia para resolver el problema con condición inicial nos da:

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \frac{1}{aS^2 + bS + c} \mathcal{L}\{f(t)\}.$$

Por lo tanto, tenemos que:

$$\mathcal{L}\{x\} = \mathcal{L}\{h\} \mathcal{L}\{f\}$$

En consecuencia, por el teorema de la convolución, tenemos para (42) la solución:

$$x(t) = h(t) * f(t) = \int_0^t h(t-w) f(w) dw \quad (44)$$

La ecuación (44) nos da un importante resultado:

La salida de un sistema lineal es la convolución de la función de respuesta de impulso y la función de entrada del sistema. En otras palabras, una vez que sabemos cómo reacciona un sistema lineal a una función delta, sabemos cómo reacciona a cualquier entrada. Resumimos esta situación con el siguiente teorema.

Solución de un problema con valor inicial lineal con una convolución

Sea a_0, a_1, \dots, a_n números reales y $h(t)$ la respuesta de impulso definida por:

$$h(0) = h'(0) = \dots = h^{(n-1)}(0) \quad (45)$$

Si la convolución $h * f$ existe para alguna función forzada f sobre el intervalo $0 < t < T$, entonces el problema con valor inicial:

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + a_1 x' + a_0 x = f(t)$$

$$x(0) = x'(0) = \dots = x^{(n-1)}(0) \quad (46)$$

Tiene la solución: $X(t) = (h * f)(t) = \int_0^t h(t-w)f(w)dw$,
 $t \in (0, T)$ (47)

Ejemplo 54. Problema con valor inicial de segundo orden en estado inicial cero:

Encontrar la solución de:

$$x'' + x = f(t), \quad x(0) = 0, x'(0) = 0 \quad (48)$$

Usando la respuesta de impulso $h(t)$ para escribir la solución de este problema con valor inicial como una convolución.

Solución:

Primero encontramos la respuesta de impulso resolviendo:

$$h'' + h = \delta(t), \quad h(0) = 0, h'(0) = 0$$

Para tener $h(t) = \sin t$. Luego, la solución de (48) es la convolución:

$$X(t) = \sin t * f(t) = \int_0^t \sin(t-w)f(w)dw$$

Ejemplo 55. Problema con valor inicial de tercer orden en estado inicial cero:

Encontrar la solución de:

$$x''' + 6x'' + 12x' + 8x = f(t), \quad x(0) = 0, x'(0) = 0, x''(0) = 0 \quad (49)$$

Usando la respuesta de impulso $h(t)$ para escribir la solución de este problema con valor inicial como una convolución.

Solución:

Tomando la transformada de Laplace de la función:

$$h''' + 6h'' + 12h' + 8h = \delta(t), \quad h(0) = 0, h'(0) = 0, h''(0) = 0.$$

Tenemos:

$$\mathcal{L}\{h''' + 6h'' + 12h' + 8h\} = 1$$

y la función de transferencia:

$$H(S) = \frac{1}{S^3 + 6S^2 + 12S + 8}$$

La solución de (49) tiene la transformada de Laplace:

$$X(S) = H(S) F(S) = \frac{1}{S^3 + 6S^2 + 12S + 8} F(S) = \frac{1}{(S+2)^2} F(S)$$

Entonces por el teorema de la convolución:

$$x(t) = \frac{1}{2} t^2 e^{-2t} * f(t)$$

El uso de la función de impulso unitario y de la integral de convolución no suele ahorrar tiempo de cálculo, debido a que la integral debe ser calculada, aunque las integrales de convolución pueden a menudo ser evaluadas por medio de sistemas de álgebra computacional. La principal ventaja de la función de transferencia es

que $H(S)$ contiene toda la información del problema de valor inicial, excepto la función de forzamiento, y $H(S)$ puede multiplicarse por $F(S)$ para cualquier función de forzamiento apropiada $g(t)$. Entonces, tomando la transformada inversa de Laplace de este producto vía la convolución, obtenemos la solución.

Ejemplo 56. Prendido/apagado por transferencia:

Retomemos el ejemplo 14 de la sección 11.3, para el problema con valor inicial:

$$x'' + x = 1 - \mathcal{U}(t - \pi), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0$$

utilizar la convolución para resolver el problema con valor inicial.

Solución:

Como todas las condiciones iniciales son cero, podemos usar la ecuación (46), con coeficientes $a = c = 1$ y $b = 0$, para encontrar la función de transferencia:

$$H(S) = \mathcal{L}\{h(t)\} = \frac{1}{s^2 + 1}$$

y su transformada inversa de Laplace $h(t) = \sin t$.

Por la ecuación (47), conocemos que:

$$x(t) = h(t) * f(t), \text{ donde } f(t) = 1 - \mathcal{U}(t - \pi)$$

Por lo tanto, la solución del problema con valor inicial es la convolución:

$$x(t) = \sin t * [1 - \mathcal{U}(t - \pi)]$$

La cual podemos evaluar como sigue:

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \int_0^t \text{sen}(t-w) [1 - \mathcal{U}(t-\pi)] \\
 &= \begin{cases} \int_0^t \text{sen}(t-w) dw & \text{si } 0 \leq t < \pi \\ \int_0^\pi \text{sen}(t-w) dw + \int_\pi^\infty 0 dw & \text{si } t \geq \pi \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \int_0^t (\text{sent} \cos w - \text{cost} \text{sen} w) dw & \text{si } 0 \leq t < \pi \\ \int_0^\pi (\text{sen} t \cos w - \text{cost} \text{sen} w) dw & \text{si } t \geq \pi \end{cases} \\
 &= \begin{cases} 1 - \text{cost} & \text{si } 0 \leq t < \pi \\ -2 \text{cost} & \text{si } t \geq \pi \end{cases}
 \end{aligned}$$

Para ver la gráfica de la solución, examine la figura 25 de la unidad 11.3.

Aplicaciones

La integral de la convolución no tiene una aplicación muy intuitiva, hasta que se vea algunos ejemplos para ver cómo surge en la vida cotidiana.

En general, una convolución:

$$x(t) = h(t) * f(t) = \int_0^t h(t-w)f(w)dw$$

puede interpretarse como la cantidad total de alguna «sustancia» (dinero, material radiactivo, calor, energía, concentración, cualquier cosa) en el tiempo t , si la sustancia es adicionada a una razón $f(t)$, y $h(t)$ es la cantidad a la cual la sustancia cambia (crece o se desintegra) como resultado de la dinámica del sistema.

Además, la integral de convolución es práctica porque da una fórmula para la salida de un sistema lineal con coeficientes constantes que pueden aplicarse a diferentes entradas $f(t)$.

En el laboratorio se puede utilizar la función δ , o más bien una función escalonada de muy corta duración, para probar un sistema desconocido en estado inicial cero que se supone lineal. La función solución resultante $h(t)$, la función de transferencia, se encuentran usando una aproximación continua para obtener soluciones para una variedad de términos forzantes.

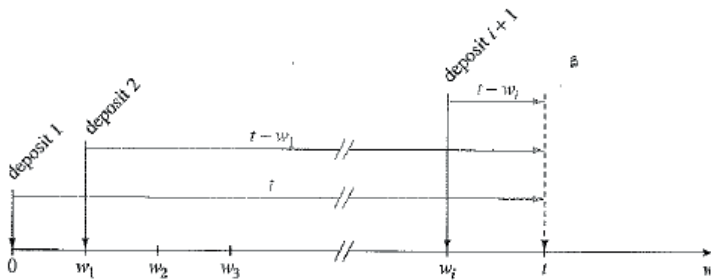
Ejemplo 57. Ahorros:

Supongamos que hacemos depósitos continuos en una cuenta de ahorros a una tasa no constante de $R(t)$ dólares por unidad de tiempo, y que el banco paga intereses a una tasa anual del 60 %. ¿Cuánto dinero estará en la cuenta en cualquier momento t ?

Solución:

La respuesta es, de hecho, una convolución, y la cuestión no es trivial porque los diferentes depósitos devengan intereses por diferentes periodos de tiempo. Para resolver este problema, lo simplificamos subdividiendo el intervalo de tiempo en pequeños subintervalos y haciendo depósitos periódicos en los extremos de estos intervalos, como se ilustra en la figura 206.

Figura 206. Gráfica de los depósitos.



Fuente. Elaborado por el autor.

Debido a que queremos conocer el valor futuro de la cuenta en el tiempo t , lo mejor es denotar la escala de tiempo por la nueva variable w , y pensar en t como un punto arbitrario en el eje w . Bajo esta convención, si depositamos $R(w_i)$ dólares en el tiempo w_i , este depósito crecerá en valor, debido al interés compuesto, al valor $R(w_i) e^{0.06(t-w_i)}$ en el tiempo t . El $t - w_i$ en la expresión, se debe al hecho de que la longitud de tiempo que el depósito recoge interés es $t - w_i$. Sumando los depósitos y los intereses de los depósitos $n + 1$, la cantidad total en el banco será:

$$\text{Importe total de los pagos finitos} = \sum_{i=0}^n R(w_i) e^{0.06(t-w_i)}$$

Ahora dejamos que los intervalos de tiempo entre depósitos se aproximen a cero y lleguen al monto total de la cuenta a partir de pagos continuos a la tasa $R(t)$, o la convolución:

$$\text{Cantidad total} = \int_0^t R(w) e^{0.06(t-w)} dw = e^{0.06t} * R(t)$$

Donde $e^{0.06t}$ es el impulso respuesta a la función delta de entrada a un dólar depositado en el tiempo $t = 0$.

Ejemplo 58. Polución en un lago:

Supongamos que un contaminante se vierte en un lago a una velocidad $f(t)$, después de lo cual empieza inmediatamente a degradarse exponencialmente a una velocidad $h(t) = e^{-kt}$. ¿Cuál es la cantidad de contaminante en el momento t ?

Solución:

En el ejemplo anterior, hicimos depósitos en una cuenta bancaria y luego el dinero creció. Aquí, añadimos algo que disminuye en lugar de crecer. Por lo tanto, la cantidad futura $y(t)$ del contaminante en el lago en el tiempo t viene dada por:

$$y(t) = h(t) * f(t) = \int_0^t e^{-k(t-w)} f(w) dw$$

11.8 Ejercicios

Propiedades de la convolución. Verifique las propiedades de la convolución en los problemas 1 al 3, para funciones en las cuales los teoremas de la convolución se aplican.

$$1. f * (g * h) = (f * g) * h$$

$$2. f * (g + h) = f * g + f * h$$

$$3. f * \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

Calculando convoluciones. Encuentre las convoluciones en los problemas 4 al 10, desde la definición integral de una convolución.

$$4. 1 * 1$$

$$5. 1 * 1 * 1$$

$$6. 1 * t$$

$$7. t * t$$

$$8. t * t * \dots * t \text{ (k factores)}$$

$$9. e^t * e^t$$

$$10. e^{at} * e^{at}$$

$$11. t * e^t$$

$$12. \cos t * e^t$$

$$13. \text{Use la fórmula 41, para encontrar } \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2}, \frac{1}{(s^2+1)} \right\}$$

$$14. \text{Use la fórmula 41, para encontrar } \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{(s^2+1)^2} \right\}$$

15. Ecuación de convolución de primer orden. En

la medida en que la convolución se denomina a veces multiplicación «generalizada», ¿cuál es la solución de la ecuación para $a * t = b$, para $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$? ¿Es igual a $t = b / a$, como lo es para $at = b$?

En los ejercicios 16 al 31, resuelva el problema con valor inicial, usando el teorema de la convolución de la transformada de Laplace. Aquí $f(t)$ es una función especificada, la cual tiene transformada de Laplace.

$$16. x' = f(t) \quad x(0) = 0$$

$$17. x' = f(t) \quad x(0) = 1$$

$$18. x' + x = f(t), \quad x(0) = 0$$

$$19. x' + x = f(t), \quad x(0) = 1$$

$$20. x'' + x = f(t), \quad x(0) = 1, x'(0) = 0$$

$$21. x'' + 3x' + 2x = f(t); \quad x(0) = 0, x'(0) = 0$$

$$22. x'' - 5x' + 4x = f(t); \quad x(0) = 0, x'(0) = 0$$

$$23. x'' + 7x' + 10x = f(t); \quad x(0) = 0, x'(0) = 0$$

$$24. x'' - 9x = f(t); \quad x(0) = 0, x'(0) = 0$$

$$25. x'' - 16x = f(t); \quad x(0) = 0, x'(0) = 0$$

$$26. x'' + 4x = f(t); \quad x(0) = 0, x'(0) = 7$$

$$27. x'' + 25x = f(t); \quad x(0) = 3, x'(0) = 0$$

$$28. x'' + 7x = f(t); \quad x(0) = 0, x'(0) = 2$$

$$29. x'' - 2x' + 10x = f(t); \quad x(0) = 0, x'(0) = 0$$

$$30. x'' + 6x' + 25x = f(t); \quad x(0) = 0, x'(0) = 0$$

$$31. x'' + 4x' + 13x = f(t); \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0$$

Un ejemplo de una ecuación integral es:

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t h(t-w)x(w)dw + g(t) \\ &= (h * x)(t) + g(t) \end{aligned}$$

Donde h y g son funciones conocidas y $x(t)$ es una función desconocida. Esta ecuación integral se puede resolver, tomando la transformada de Laplace, resolviendo para $X(S)$, y luego calculando $\mathcal{L}^{-1}\{X(S)\}$.

En los ejercicios 32 a 39, resuelva la ecuación integral dada usando la transformada de Laplace.

$$32. x(t) = \frac{1}{2} \int_0^t x ds + 1$$

$$33. x(t) = \int_0^t \cos(t-w)x(w)dw + \text{sent}$$

$$34. x(t) = \int_0^t (t-w)x(w)dw + 1$$

$$35. x(t) = \int_0^t e^{-t+w}x(w)dw + 2$$

$$36. 6x(t) = \int_0^t (t-w)^3x(w)dw + t$$

$$37. x(t) = \int_0^t 2\text{sen}(2t-2w)x(w)dw + \text{sent}$$

$$38. x(t) = \int_0^t \cos(2t-2w)x(w)dw + e^{3t}$$

$$39. x(t) = - \int_0^t \text{sen}(t-w)x(w)dw + 3$$

Funciones de respuesta de transferencia y de impulso.

En cada problema del 40 al 43 determine la función de respuesta de la transferencia y de impulso de la entrada y salida del sistema (tome todas las condiciones iniciales como cero).

$$40. x' = f(t)$$

$$41. x'' + 40x = f(t)$$

$$42. x'' + x = f(t)$$

$$43. x'' + 4x' + 5x = f(t)$$

Inversa del teorema de la convolución. Para los problemas 44 al 50 encuentre la transformada inversa de Laplace en términos de la convolución y evalúe la convolución.

$$44. \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \right\}$$

$$45. \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^3} \right\}$$

$$46. \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s+1)} \right\}$$

$$47. \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2(s-2)} \right\}$$

$$48. \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s^2+1)} \right\}$$

$$49. \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s^2+1)^2} \right\}$$

$$50. \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s^2+k^2)^2} \right\}$$

51. **Estado inicial cero.** Supongamos que $h(t)$, la función unidad de respuesta de impulso, es la solución para:

$$a h'' + b h' + c h = \delta(t)$$

En el estado inicial cero, use $h(t)$ para encontrar la transformada de Laplace de la solución del problema con condición inicial:

$$a x'' + b x' + c x = f(t), \quad x(0) = x_0 \quad x'(0) = x_1$$

Práctica diferente de cero. Resuelva el siguiente problema usando el método del problema 51:

$$52. x'' + x' + x = \delta(t - 2)$$

$$x(0) = 1, \quad x'(0) = 0$$

$$53. x'' + 4x = 4 \cos t,$$

$$x(0) = 1, \quad x'(0) = -1.$$

Cálculo fraccional. Aunque los estudiantes de cálculo aprenden a integrar y diferenciar funciones una, dos, tres veces, etc., existe una teoría del cálculo fraccional que define integrales y derivadas de cualquier orden real (o incluso complejo). Los problemas 54 y 55, proporcionan una introducción a este tema.

54. Usando la siguiente definición, encuentre la mitad de las integrales de a – c.

La mitad de la integral

La mitad de una integral (o semi-integral) de una función $f(t)$ está definida como la convolución:

$$I_{1/2}(f) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}(t^{-1/2} * f)$$

a. $I_{1/2}(1)$

b. $I_{1/2}(t)$

c. $I_{1/2}(at^2 + bt + c)$

55. Verifique que dos semi-integrales son iguales a la integral total:

$$I_{1/2}(I_{1/2}(f))(t) = \int_0^t f(w)dw$$

Ayuda: $\mathcal{L}\{t^{-1/2}\} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$

56. Usando la definición de la mitad de la integral dada en el problema 55, tenemos la siguiente definición.

La mitad de la derivada

La mitad de la derivada (o semiderivada) de una función, está definida por:

$$\frac{d^{1/2}}{dt^{1/2}} f(t) = \frac{d}{dt} I_{1/2}(f)$$

Como la derivada total, la derivada fraccionaria puede o no existir. Encuentre las siguientes semi derivadas y compárelas con la primera derivada.

$$\text{a. } \frac{d^{1/2}}{dt^{1/2}}(1) \quad \text{b. } \frac{d^{1/2}}{dt^{1/2}}(t) \quad \text{c. } \frac{d^{1/2}}{dt^{1/2}}(at^2 + bt + c)$$

Aplicaciones

57. **Ahorros.** Una corporación utiliza un modelo continuo para las comisiones de las ventas de un modelo que está de moda, utilizando una función $f(t) = 10^6 te^{-t}$. Estos ingresos se depositan inmediatamente en la cuenta de ahorro que acumula un interés del 8 %, compuesto continuamente.

- Establezca un problema con valor inicial para la cantidad A en la cuenta de ahorros en el momento t , dado que $A(0) = 0$.
 - Escriba la solución $A(t)$ como una convolución.
 - Mediante un sistema de álgebra computacional (CAS), evalúe la integral de convolución para determinar la solución. En un gráfico, trace la función solución que surge.
-

58. **Inversión y ahorro.** Al graduarse de la universidad, John hace una inversión de depósitos continuos dado por $r(t) = 10000 e^{0.01t}$ dólares en una cuenta de ahorros. Si el banco paga intereses anuales del 4 %, compuesto continuamente, encuentre y evalúe la integral de convolución que se aproxima al valor de su cuenta. ¿Cuál es el valor de los ahorros de John después de 20 años de ahorro?

59. **Contaminación de un lago.** Un contaminante es vertido en un lago a una tasa $r(t) = 2e^{0.05t}$ kg/día. Una vez en el lago, el contaminante se degrada según la ley $e^{-0.10t}$.

Escriba la integral de convolución que da la cantidad $y(t)$ de contaminante en el lago en el tiempo t y evalúe esta integral.

60. **Cadena de decaimiento radiactivo.** Una sustancia radioactiva es creada a partir de otra sustancia radioactiva a la razón $r(t) = e^{0.001t}$ (gramos/año). La sustancia creada decrece entonces a la razón de $e^{0.01t}$. Escriba la integral de convolución que da el aumento $y(t)$ de la sustancia presente en un tiempo t y evalúe esta integral.

Ecuación integral de Volterra. Una ecuación del tipo:

$$y(t) = g(t) + \int_0^t k(t-w)y(w)dw$$

Donde g y k son conocidas y la función y que aparece dentro de la integral es desconocida, es llamada **la ecuación integral de Volterra**. Debido a que la integral en esta ecuación es la convolución $k * y$, es posible resolver esta ecuación usando la transformada de Laplace. Para los problemas 60 al 64 resolver la ecuación de Volterra.

$$61. y(t) = 1 + \int_0^t y(w)dw$$

$$62. y(t) = t - \int_0^t (t-w)y(w)dw$$

$$63. y(t) = t^3 + \int_0^t \text{sen}(t-w)y(w)dw$$

$$64. y(t) = e^t [1 + \int_0^t e^{-w}y(w)dw]$$

$$65. y(t) = \cos t + \int_0^t \text{sen}(t-w)y(w)dw$$

66. **Solución general de la ecuación de Volterra.** Muestre que la solución general de la ecuación de

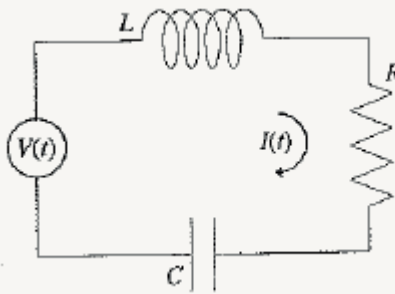
Volterra está dada por:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{G(S)}{1 - K(S)} \right\}$$

Donde $G(S)$ y $K(S)$ son las transformadas de Laplace de $g(t)$ y $k(t)$, respectivamente.

67. **Mirando los circuitos.** Considere el circuito en serie, mostrado en la figura 65, para el cual $L = 1$ Henry, $R = 10$ ohms y $C = 1/25$ farad.

Figura 207. Circuito LRC para el problema 66.



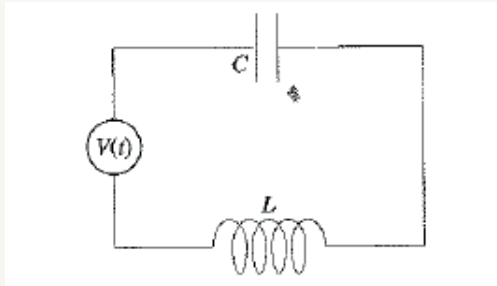
Fuente. Elaborado por el autor.

- Escriba la ecuación integro diferencial para la corriente como una función del tiempo para $v(t) = 12 - 24 \mathcal{U}(t - 1)$.
 - Asumiendo que $I(0) = 0$ y que $I'(0) = 0$, use la función de transferencia para encontrar la solución del problema con valor inicial, escrito como una convolución.
 - Use un programa de computador para evaluar la convolución integral.
-

Función de transferencia para circuitos. Para los siguientes dos circuitos, en estado inicial cero, determine la función de transferencia e indique la solución para la función desconocida de t como una convolución.

68. Encuentre $H(S)$ y $Q(t)$ para el circuito en la figura 208.

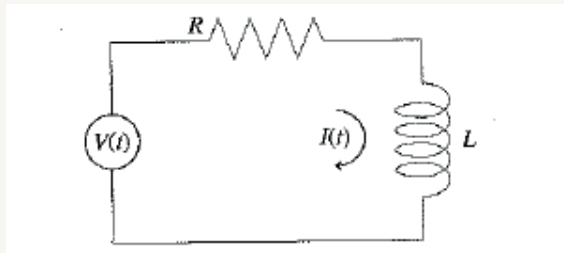
Figura 208. Circuito LC.



Fuente. Elaborado por el autor.

69. Encuentre $H(S)$ y $I(t)$ para el circuito de la figura 209.

Figura 209.



Fuente. Elaborado por el autor.

70. **Una convolución interesante.** Muestre que $y(t) = \sin t * \sin t$ es la solución de:

$$y'' + y = \sin t. \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

71. **Principio de Duhamel**⁸. Considere el problema con valor inicial:

$$a y'' + b y' + c y = f(t) \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

8 Frechaman Jean-Marie Duhamel (1797-1872), es conocido por su gran producción en matemática y física, y particularmente por su teoría general del calor, de donde proviene el principio de Duhamel.

El principio de Duhamel establece que la solución de este problema con valor inicial puede ser expresado como:

$$y(t) = \int_0^t f(t-w)z'(w)dw$$

Donde $z(t)$ satisface los mismos valores del problema inicial pero $f(t)$ reemplazado por 1. Es decir:

$$a z'' + b z' + c z = 1 \quad z(0) = z'(0) = 0$$

Verifique el problema de Duhamel.

72. Usando el principio de Duhamel. Úselo para encontrar la solución del problema con valor inicial:

$$y'' - y = f(t). \quad y(0) = y'(0) = 0$$

73. Ecuación integral interesante. Resuelva la ecuación integral:

$$\int_0^t y(w)dw = y(t) * y(t)$$

Y verifique su resultado.

11.9 Solución de un sistema lineal de ecuaciones mediante la transformada de Laplace

Introducción

Hemos visto que la transformada de Laplace es una herramienta poderosa para resolver ecuaciones diferenciales lineales en una variable con coeficientes constantes, mediante la transformación en una ecuación algebraica y transformándolo de nuevo para obtener la solución de la ecuación diferencial. La transformada de Laplace puede también ser usada para resolver un sistema de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, tomando la transformada de Laplace a cada componente del sistema y transformándola en un sistema lineal de ecuaciones algebraicas.

Estrategia de la transformada de Laplace para un sistema de ecuaciones diferenciales lineales

El problema con valor inicial:

$$\vec{x}' = A\vec{x} + \vec{f}(t), \quad \vec{x}(0) = \vec{x}_0, \quad (50)$$

Donde A es una $n \times n$ matriz de los coeficientes constantes reales y $\vec{f}(t)$ es un vector $n \times 1$ de funciones de t , puede ser resuelta mediante la siguiente estrategia:

Paso 1. Usando la transformada de Laplace \mathcal{L} , transformamos el problema con valor inicial con variable desconocida $\vec{x}(t)$, en un problema algebraico con variable desconocida $\vec{X}(s)$.

$$S\vec{X}(S) - \vec{x}_0 = A\vec{X}(S) + \vec{F}(S) \quad (51)$$

O de forma equivalente:

$$(SI - A)\vec{X}(S) = \vec{x}_0 + \vec{F}(S) \quad (52)$$

Donde $\vec{X}(S) = \mathcal{L}\{\vec{x}(t)\}$ y $\vec{F}(S) = \mathcal{L}\{\vec{f}(t)\}$ son los vectores de transformación de las entradas de $\{\vec{x}(t)\}$ y $\vec{f}(t)$, respectivamente.

Paso 2. Resuelva el sistema algebraico para $\vec{X}(S)$:

$$\vec{X}(S) = (SI - A)^{-1}(\vec{x}_0 + \vec{F}(S)) \quad (53)$$

Paso 3. Manipulando algebraicamente a $\vec{X}(S)$ si es necesario, use la transformada inversa de Laplace \mathcal{L}^{-1} para transformar $\vec{X}(S)$ en la solución del problema con valor inicial $\vec{x}(t)$.

La solución de Laplace para el sistema de ecuaciones diferenciales se puede escribir:

$$\begin{aligned} \vec{x}(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{(SI - A)^{-1}(\vec{x}_0 + \vec{F}(S))\right\} \\ &= \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\{(SI - A)^{-1}\vec{x}_0\}}_{\vec{x}_h} + \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\{(SI - A)^{-1}\vec{F}(S)\}}_{\vec{x}_p} \end{aligned}$$

Ejemplo 59. Sistema lineal homogéneo:

Resolver el problema con valor inicial:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + x_2 & x_1(0) &= 1, \quad x_2(0) = 0 \\ x_2' &= 4x_1 + x_2 & & \end{aligned} \quad (54)$$

en forma de componente, usando transformadas de Laplace.

Solución:

Paso 1. Llamando $X_1(S) = \mathcal{L}\{x_1\}$ y $X_2(S) = \mathcal{L}\{x_2\}$, y usando la derivada y las propiedades de la transformada, encontramos la forma de las componentes de (51):

$$S X_1(S) - x_1(0) = X_1(S) + X_2(S)$$

$$S X_2(S) - x_2(0) = 4X_1(S) + X_2(S) \quad (55)$$

Sustituyendo en (55) la condición inicial $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$, con esto escribimos la ecuación en la forma (52):

$$(S - 1)X_1(S) - X_2(S) = 1.$$

$$-4X_1(S) + (S - 1)X_2(S) = 0$$

Paso 2. Resolvemos este sistema de ecuaciones algebraicas:

$$X_1(S) = \frac{S-1}{S^2-2S-3} = \frac{1}{2(S-3)} + \frac{1}{2(S+1)} \quad (56)$$

$$X_2(S) = \frac{4}{S^2-2S-3} = \frac{1}{S-3} - \frac{1}{S+1}$$

Paso 3. La solución de la ecuación (54) es la inversa de la transformada de (56):

$$x_1(t) = \frac{1}{2}(e^{3t} + e^{-t}) \quad (57)$$

$$x_2(t) = e^{3t} - e^{-t}$$

Ejemplo 60. Sistema lineal no autónomo:

La transformada de Laplace puede ser usada también para resolver el problema con condición inicial no homogéneo:

$$x_1' = -2x_1 + x_2 + 1 \quad x_1(0) = 0, \quad x_2(0)$$

$$x_2' = x_1 - 2x_2 \quad (58)$$

Solución:

Paso 1. La transformada de Laplace de (58) es:

$$S X_1(S) = -2X_1(S) + X_2(S) + \frac{1}{S}$$

$$S X_2(S) - 1 = X_1(S) - X_2(S)$$

O:

$$(S + 2)X_1(S) - X_2(S) = \frac{1}{S} \quad (59)$$

$$X_1(S) + (S + 2) X_2(S) = 1$$

Paso 2. Resolviendo (59) para $X_1(S)$ y $X_2(S)$, tenemos:

$$X_1(S) = \frac{2}{S(S+3)} = \frac{2}{3S} - \frac{2}{3(S+3)}$$

$$X_2(S) = \frac{S+1}{S(S+3)} = \frac{1}{3S} + \frac{2}{3(S+3)} \quad (60)$$

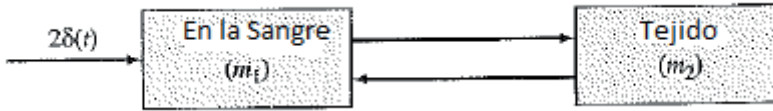
Paso 3. La inversa de la transformada de Laplace de nos da las soluciones:

$$x_1(t) = \frac{2}{3}(1 - e^{-3t})$$

$$x_2(t) = \frac{1}{3}(1 + 2e^{-3t})$$

Ejemplo 61. Metabolismo de Lidocaína:

La droga Lidocaína se utiliza comúnmente en el tratamiento de las arritmias ventriculares (ritmo cardíaco irregular). El modelo esquemático que se muestra en la figura 210, es ampliamente utilizado de cinética de la Lidocaína.

Figura 210. Lidocaína modelo de dos componentes.

Fuente. Elaborado por el autor.

Muestra un modelo de dos compartimentos que predice la cantidad de Lidocaína en la sangre (m_1) y en el tejido (m_2) resultante de una inyección de 2 mg de Lidocaína en el torrente sanguíneo. Asumimos que 2 mg de Lidocaína se inyectan en el torrente sanguíneo, y que luego se mueven en los tejidos del corazón. Dado que la inyección de un fármaco es a menudo representada matemáticamente por una función delta, el problema con condición inicial que describe la cantidad (en miligramos) de Lidocaína en el torrente sanguíneo es m_1 y en el tejido m_2 está dado por:

$$\begin{aligned} m_1' &= -m_1 + 2\delta(t) & m_1(0) &= 0, & m_2(0) &= 0 \\ m_2' &= -m_1 - m_2 & & & & (61) \end{aligned}$$

Donde $\delta(t)$ es la función delta. Encuentre la cantidad futura de Lidocaína en el torrente sanguíneo y en el tejido.

Solución:

Si llamamos $M_1(S) = \mathcal{L}\{m_1\}$ y $M_2(S) = \mathcal{L}\{m_2\}$, tomando la transformada de Laplace de (61), se tiene:

$$S M_1(S) = -M_1(S) + 2$$

$$S M_2(S) = -M_1(S) - M_2(S)$$

Resolviendo para $M_1(S)$ y $M_2(S)$, tenemos:

$$M_1(S) = \frac{2}{(S+1)}$$

$$M_2(S) = \frac{2}{(S+1)^2}$$

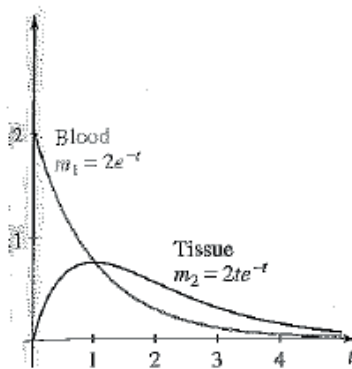
Luego:

$$m_1 = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(S+1)}\right\} = 2e^{-t}$$

$$m_2 = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(S+1)^2}\right\} = 2te^{-t}$$

La figura 211 nos muestra la gráficas de las dos soluciones.

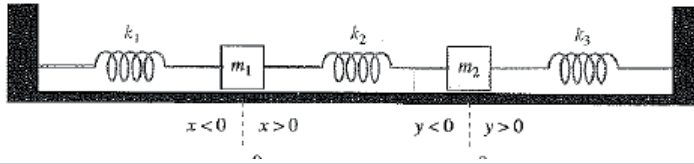
Figura 211. Gráficas de las dos soluciones.



Fuente. Elaborado por el autor.

Ejemplo 62. Sistema masa resorte acoplado:

Dos masas m_1 y m_2 están conectadas entre sí por dos paredes y por tres resortes (k_1, k_2, k_3), como se muestra en la figura 212. Las masas se deslizan en una recta sobre una superficie sin fricción. Los sistemas se ponen en movimiento sosteniendo los mástiles izquierdos en su posición de equilibrio, mientras que al mismo tiempo tiran de la masa derecha una distancia p a la derecha de su equilibrio. ¿Cuál es el movimiento subsiguiente de las masas?

Figura 212. Resortes Acoplados.

Fuente. Elaborado por el autor.

Solución:

Denotando por $x(t)$ y $y(t)$ las posiciones de las masas m_1 y m_2 con respecto a las posiciones de equilibrio, la ley de Hooke nos dice lo siguiente acerca de las fuerzas que actúan sobre las masas debido a los resortes de conexión:

- La fuerza sobre m_1 debido al resorte izquierdo es $-k_1x$.
- La fuerza sobre m_1 debido al resorte central es $k_2(y-x)$.
- La fuerza sobre m_2 debido al resorte central es $k_2(y-x)$.
- La fuerza sobre m_2 debido al resorte de la derecha es $-k_3y$.

Entonces, tenemos el siguiente problema con condición inicial:

$$m_1 x'' = -k_1 x + k_2 (y - x), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0$$

$$m_2 y'' = -k_2 (y - x) - k_3 y, \quad y(0) = p, \quad y'(0) = 0$$

Tomando la transformada de Laplace de las ecuaciones anteriores, se tiene:

$$m_1 [X(S) - Sx(0) - x'(0)] = -k_1 X(S) + k_2 [Y(S) - X(S)]$$

$$m_2 [S^2 X(S) - Sy(0) - y'(0)] = -k_2 [X(S) - Y(S)] - k_3 Y(S)$$

Haciendo $m_1 = m_2 = m$, y $k_1 = k_2 = k_3 = k$ y sustituyendo en las condiciones iniciales, tenemos:

$$(mS^2 + 2k)X(S) - kY(S) = 0,$$

$$-kX(S) + (mS^2 + k)Y(S) = mSp$$

Resolviendo para $X(S)$ y $Y(S)$, encontramos:

$$\begin{aligned} X(S) &= \frac{kmpS}{(mS^2 + k)(mS^2 + 3k)} \\ &= \frac{mpS}{2(mS^2 + k)} - \frac{mpS}{2(mS^2 + 3k)} \\ &= \frac{pS}{2(S^2 + k/m)} - \frac{pS}{2(S^2 + 3k/m)} \end{aligned}$$

Y:

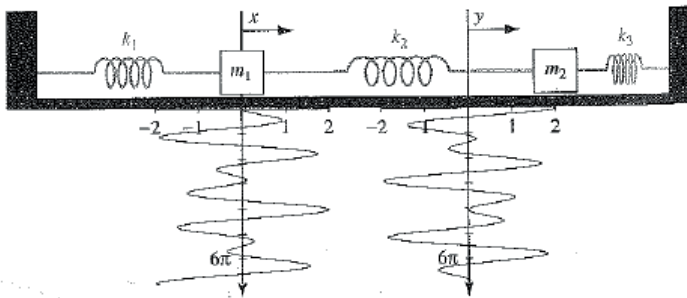
$$\begin{aligned} Y(S) &= \frac{mps(mS^2 + 2k)}{(mS^2 + k)(mS^2 + 3k)} \\ &= \frac{mpS}{2(mS^2 + k)} + \frac{mpS}{2(mS^2 + 3k)} \\ &= \frac{pS}{2(S^2 + k/m)} + \frac{pS}{2(S^2 + 3k/m)} \end{aligned}$$

Luego la solución es:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{p}{2} \left(\cos \sqrt{\frac{k}{m}} t - \cos \sqrt{\frac{3k}{m}} t \right) \\ y(t) &= \frac{p}{2} \left(\cos \sqrt{\frac{k}{m}} t + \cos \sqrt{\frac{3k}{m}} t \right) \end{aligned}$$

La figura 213, muestra la gráfica de la solución cuando $p = 2$ y $k = m = 1$.

Figura 213. Gráfica para $p = 2$ y $k=m=1$.



Fuente. Elaborado por el autor.

Resolviendo la ecuación de segundo orden correspondiente, podemos llegar a la misma solución.

Matriz exponencial

Recordemos que la transformada de Laplace para la función exponencial:

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$$

Esto nos puede sugerir que en la transformada de Laplace para la matriz exponencial, se debe cumplir que:

$$\mathcal{L}\{e^{At}\} = (SI - A)^{-1}$$

Se puede demostrar que esto es verdadero tomando la transformada de Laplace de la definición formal de la matriz exponencial:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{e^{At}\} &= \mathcal{L}\left\{I + At + A^2 \frac{t^2}{2!} + \dots\right\} \\ &= \frac{1}{s}I + \frac{1}{s^2}A + \frac{1}{s^3}A^2 + \dots \\ &= (SI - A)^{-1} \end{aligned}$$

Es fácil verificar este resultado mostrando que

$$(SI - A)\left(\frac{1}{s}I + \frac{1}{s^2} + \dots\right) = I$$

Luego, se sigue que la expresión de la matriz exponencial es:

Matriz exponencial como la inversa de una transformada de Laplace

La matriz exponencial de la función e^{aT} de una matriz A puede ser escrita como:

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}(SI - A)^{-1}$$

Ejemplo 63. Matriz exponencial desde Laplace:

Usar la transformada de Laplace para encontrar la función exponencial matricial e^{At} de la matriz $A = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$.

Solución:

Primero calculamos:

$$sI - A = \begin{bmatrix} s - 6 & -1 \\ 4 & s - 2 \end{bmatrix}$$

Su determinante es:

$$|sI - A| = (s - 6)(s - 2) + 4 = s^2 - 8s + 16 = (s - 4)^2$$

Entonces, usamos este hecho para calcular:

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{(s - 4)^2} \begin{bmatrix} s - 2 & 1 \\ -4 & s - 6 \end{bmatrix}$$

Luego, usando fracciones parciales para cada entrada de la matriz tenemos:

$$\begin{aligned} e^{At} &= \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\begin{bmatrix} \frac{1}{s-4} + \frac{2}{(s-4)^2} & \frac{1}{(s-4)^2} \\ \frac{-4}{(s-4)^2} & \frac{1}{(s-4)} - \frac{2}{(s-4)^2} \end{bmatrix}\right\} \\ &= \begin{bmatrix} e^{4t} + 2te^{4t} & te^{4t} \\ -4te^{4t} & e^{4t} - 2te^{4t} \end{bmatrix} \\ &= e^{4t} \begin{bmatrix} 1 + 2t & t \\ -4t & 1 - 2t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

11.10 Ejercicios

Transformada de Laplace para sistemas lineales. Para los problemas 1 al 10 resuelva el problema con valor inicial usando la transformada de Laplace.

$$1. \begin{cases} x' = y, \\ y' = -x \end{cases} \quad x(0) = 0, y(0) = 1$$

$$2. \begin{cases} x' = x - y, \\ y' = 2x + 4y \end{cases} \quad x(0) = -1, y(0) = 1$$

$$3. \begin{cases} x' = y \\ y' = -2x + 3y + 12e^{4t} \end{cases} \quad x(0) = 1, y(0) = 1$$

$$4. \begin{cases} x' = y \\ y' = -x + 2\cos t \end{cases} \quad x(0) = 0, y(0) = 0$$

$$5. \begin{cases} x' = y + e^{2t} \\ y' = -2x + 3y \end{cases} \quad x(0) = 0, y(0) = 0$$

$$6. \begin{cases} x' = -y + t \\ y' = 3x + 4y - 2 - 4t \end{cases} \quad x(0) = 0, y(0) = 0$$

$$7. \vec{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} -10 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$8. \vec{x}' = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$9. \vec{x}' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} e^{5t} \\ e^{5t} \end{bmatrix} \quad \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$10. \vec{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} t \\ -4t - 2 \end{bmatrix} \quad \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Soluciones generales de sistemas lineales. Es posible encontrar la solución general de un sistema de ecuaciones lineales permitiendo

que las condiciones iniciales sean constantes arbitrarias. Para los problemas 11 y 12 encuentre las soluciones generales del sistema lineal dado.

$$11. \begin{cases} x' = x + y \\ y' = 4x + y \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} x' = -x - 4y \\ y' = x - y \end{cases}$$

13. **Sistemas lineales más complicados.** Usando $\vec{x} = x \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

y $\vec{x}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$, escriba el siguiente sistema lineal en forma matricial. Luego encuentre la transformada de Laplace $\vec{X}(S)$ y resuelva el sistema:

$$\begin{cases} x' + 4x + y' = 0, \\ x' - 2x + y = 0 \end{cases} \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 1$$

Ayuda: los coeficientes de \vec{x} y \vec{x}' son matrices.

14. **Sistemas de orden superior.** Use la transformada de Laplace para resolver el sistema lineal:

$$\begin{cases} x_1' = x_2 + t^2, & x_1(0) = 1 \\ x_2' = x_3 & x_2(0) = 1. \\ x_3' = x_4 & x_3(0) = 1. \\ x_4' = x_1 & x_4(0) = -1 \end{cases}$$

15. **Encontrando soluciones generales.** Considere el sistema lineal:

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + f_1(t), & x(0) = c_1 \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + f_2(t), & y(0) = c_2 \end{cases}$$

Donde $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, c_1$ y c_2 son constantes. Use la transformada de Laplace para mostrar que la solución puede ser escrita en la forma:

$$\begin{cases} x(t) = x_h(t) + x_p(t) \\ y(t) = y_h(t) + y_p(t) \end{cases}$$

donde $x_h(t), y_h(t)$ dependen de c_1, c_2 y $x_p(t), y_p(t)$ dependen de $f_1(t), f_2(t)$.

16. Metabolismo de la droga. Un fármaco de liberación sostenida se toma solo a intervalos prescritos para mantener una tasa de entrada constante r . Si la masa del fármaco en el tracto gastrointestinal y el torrente sanguíneo se denotan x_1 y x_2 respectivamente, entonces las tasas de cambio x_1' y x_2' se muestran como:

$$\begin{aligned}x_1' &= -k_1x_1 + r \\x_2' &= k_1x_1 - k_2x_2\end{aligned}$$

Las constantes positivas k_1 y k_2 , son constantes de velocidad que varían de persona a persona. Tomando las condiciones iniciales para $x_1(0) = 1, x_2(0) = 0$ utilice la transformada de Laplace para resolver este problema de valores iniciales $k_1 = k_2 = k$, y $r = 0$.

Variaciones en el sistema masa resorte. Use el resultado del ejercicio 33 para encontrar las soluciones del problema 17 y 18. Asuma que $x(0) = 0, x'(0) = 1, y(0) = 0$ y $y'(0) = 0$.

17. $m_1 = m_2 = 2, k_1 = k_2 = k_3 = 1$

18. $m_1 = m_2 = 2, k_1 = 0, k_2 = 1, k_3 = 0$.

19. Un modelo de tres componentes. Una persona ingresa un producto químico semitóxico, que entra en el torrente sanguíneo a la tasa constante R , después de lo cual se distribuye en el torrente sanguíneo, tejido y hueso. Se excreta en la orina y el sudor a las tasas u y s , respectivamente. Las variables x_1, x_2 y x_3 definen las

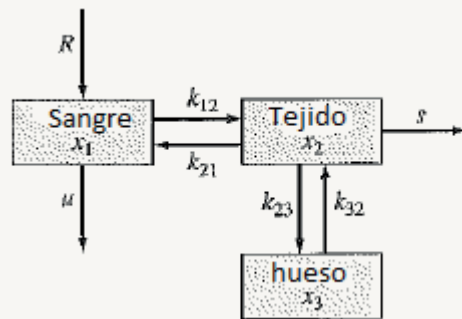
concentraciones del producto químico en las tres áreas.

La ecuación para x_1 está dada por:

$$\frac{dx_1}{dt} = R - ux_1 - k_{12}x_1 + k_{21}x_2$$

Encuentre las ecuaciones para x_2 y x_3 .

Figura 214. Gráfica de un modelo de tres componentes.

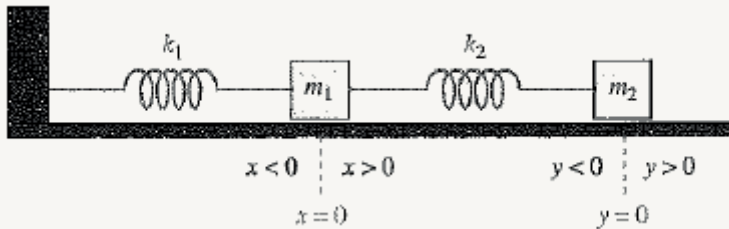


Fuente. Elaborado por el autor.

20. **Vibración con un extremo libre.** Dos resortes y dos masas vibran sobre una superficie sin fricción, como se ilustra en la figura 73. El sistema se ajusta en proporciones tales que se mantiene la masa m_1 en su posición de equilibrio y tirando la masa m_2 a la derecha de su posición de equilibrio en 1 pie, y luego soltando ambos. Asuma que $m_1 = 1$ Slug, $m_2 = 2$ slugs, $k_1 = 4$ lb/pie, y $k_2 = 2$ lb/pie.

- Determine las ecuaciones del movimiento de las masas.
- Encuentre la transformada de Laplace de las soluciones de las ecuaciones encontradas en la parte a.
- Si tiene acceso a un programa de computador (CAS), encuentre la solución.
- Discuta el significado de sus resultados.

Figura 215. Gráfica de la vibración con extremo libre.



Fuente. Elaborado por el autor.

Comparando Laplace. En los problemas 21 a 23, utilice las transformadas de Laplace para volver sobre los problemas previamente resueltos, trabajados en la sección 10-7, mediante la matriz exponencial en los problemas 11-13, y compare el método de la transformada de Laplace con los métodos previos. En cada caso suponemos $\vec{x}(0) = \vec{0}$.

$$21. \vec{x}' = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$22. \vec{x}' = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$23. \vec{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Referencias bibliográficas

Bell, E. T. (2002). *Historia de las Matemáticas*. Editorial Fondo de Cultura Económica. p. 304, 416 y 441.

Blanchard, P., Devaney, R. y Hall, G. (1999). *Ecuaciones Diferenciales*. Thomson Editores, p. 313, 314, 315, 316.

Campell, S. y Haberman, R. (2008). *Introduction to Differential equations With Dynamical Systems*. Princeton University Press. p. 125, 126, 127; 352, 354, 355, 358, 360.

Farlow, J., Hall, J., McDill, J. M. y West, B. (2007). *Differential Equations and Linear Algebra*. Editorial Pearson Prentice Hall. Second Edition. p. 386-388; 390-393; 397, 412-415; 423-427; 431-433; 435, 436, 438, 440.

Enciclopedia Británica. (año). *Joseph Lagrange*. Recuperado de <https://bdbiblioteca.universidadean.edu.co:2078/levels/academica/article/LAGRANGE-JOSEPH-LOUISConde-de-1736-1813/592780>

_____. (año). *Jean Baptiste Fourier*. Recuperado de <https://bdbiblioteca.universidadean.edu.co:2078/levels/academica/search/articles?query=Jean-Batista+Fourier>.

_____. (año). *Karl Weierstrass*. Recuperado de <https://bdbiblioteca.universidadean.edu.co:2078/levels/academica/article/WEIERSTRASS-KARL-THEODOR-WILHELM-1815-97/598408>

_____. (año). *Robert Hooke*. Recuperado de <https://bdbiblioteca.universidadean.edu.co:2078/levels/academica/article/Hooke-Robert/417169>

_____. (año). *Gustav Robert Kirchhoff*. Recuperado de <https://bdbiblioteca.universidadean.edu.co:2078/levels/academica/article/Kirchhoff-Gustav-Robert/418914>

_____. (año). *Andrey Kolmogorov*. Recuperado de <https://bdbiblioteca.universidadean.edu.co:2142/search/Kolmogorov>

- _____. (año). *David Hilbert*. Recuperado de <https://bdbiblioteca.universidadean.edu.co:2078/levels/academica/article/HILBERT-DAVID-1862-1943/591722>
- _____. (año). *Edward Lorenz*. Recuperado de <https://bdbiblioteca.universidadean.edu.co:2142/search/lorenz-edward>
- _____. (año). *Henry Poincaré*. Recuperado de <https://bdbiblioteca.universidadean.edu.co:2078/levels/academica/article/Henri-Poincar%C3%A9/425346>
- _____. (año). *Pierre-Simon de Laplace*. Recuperado de <https://bdbiblioteca.universidadean.edu.co:2078/levels/academica/article/LAPLACE-PIERRE-SIMONMarqu%C3%A9s-de-1749-1827/592846>
- _____. (año). *Oliver Heaviside*. Recuperado de <https://bdbiblioteca.universidadean.edu.co:2078/levels/academica/article/HEAVISIDE-OLIVER-1850-1925/591545>
- _____. (año). *Paul Adrien Maurice Dirac*. Recuperado de <https://bdbiblioteca.universidadean.edu.co:2078/levels/academica/article/DIRAC-PAUL-ADRIEN-MAURICE-1902-84/589289>
- Katz, V. (2002). *A History of Mathematics. An Introduction*. Addison Wesley. Segunda Edición. p. 546.
- Lomen, D. y Lovelock, D. (2000). *Ecuaciones Diferenciales a través de gráficas, modelos y datos*. Editorial CECSA.
- Wikipedia. *Edward Routh*. Recuperado de https://en.wikipedia.org/wiki/Edward_Routh
- Zill, D. (2009). *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado*. Editorial Cengage Learning. Novena edición. p. 209.

Bibliografía

- Arnold, V. (1983). *Geometrical Method in the Theory of Ordinary Differential Equations*. Springer Verlag.
- _____. (1978). *Methods of Classical Mechanics*. Springer Verlag.
- _____. (1973). *Ordinary Differential Equations*. MIT Press.
- Barbu, V. (2016). *Differential Equations*. Springer.
- Birkhoff, G. & Rota, G. C. (1978). *Ordinary Differential Equations*. Wiley.
- Borrelli, R. y Coleman C. (2002). *Ecuaciones diferenciales. Una perspectiva de modelación*. Editorial Oxford.
- Boyce, W. & DiPrima, R. (1992). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. Editorial Pearson Fifth Edition.
- Cengel, Y. y Palm, W. (2014). *Ecuaciones diferenciales para ingeniería y ciencias*. Editorial McGraw-Hill.
- Coodidington, E. A. & Levinson, N. (1955). *Theory of Ordinary Differential Equations*. Mcgraw-Hill.
- Edwards, H. & Penney, D. (2009). *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*. Editorial Pearson. Cuarta Edición.
- Guckenheimer, J. & Holmes, P. (1983). *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Filds*. Springer Verlag.
- Hale, J. & Kocak, H. (1991). *Dynamical and Bifurcations*. Springer Verlag.
- Hirsch, M., Smale, S. & Devaney, R. (2004). *Differential Equations, Dynamical Systems and Introduction to Chaos*. Editorial Academic Press. Second Edition.
- Nagle, K., Saff, E. y Snider, A. (s.f.). *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*.

- Pérez, C., Vásquez F., y Vegas J. (2003). *Ecuaciones diferenciales y en diferencias*. Editorial Thomson.
- Perko, L. (2006). *Differential Equations and Dynamical Systems*. Editorial Springer Verlag. Second Edition.
- Polking, J., Bogges, A., & Arnold, D. (2006). *Differential Equations with Boundary Value Problems*. Editorial Pearson.
- Ricardo, H. (2003). *Ecuaciones diferenciales. Una introducción moderna*. Editorial Reverté.
- Robinson, C. (2004). *An Introduction to Dynamical Systems Continuous and Discrete*. Editorial Pearson.
- Robinson, C. (1999). *Dynamical Systems, Stability, Symbolic Dynamical and Chaos*. Editorial CRC Press. Second Edition.



Teléfono: 5936464
Calle 79 # 11 - 45
Bogotá D.C. - Colombia - Sur América
www.universidadean.edu.co



<http://editorial.universidadean.edu.co>