Universidad EAN

Cuaderno de Investigación

Colección Ciencias Básicas

Guía de autoaprendizaje para un primer curso de matemáticas para administración y economía con énfasis en matemáticas financieras

Autores
Jairo Alberto Cuervo Grisales
Fernando Ibáñez Rincón

Catalogación en la fuente: Biblioteca Universidad EAN

Cuervo Grisales, Jairo Alberto
Guía de autoaprendizaje para un primer curso de matemáticas para administración y economía con énfasis en matemáticas financieras [Recurso electrónico] / Jairo Alberto Cuervo Grisales, Fernando Ibáñez Rincón. -- Bogotá: Universidad EAN, 2013. -- (Ciencias Básicas)

ISBN: 978-958-756-215-6

1. Matemáticas financieras 2. Administración
3. Economía
I. Ibáñez Rincón, Fernando

511.8 CDD 21

Ediciones EAN

Edición
Dirección Gestión del Conocimiento

Diagramación
Adriana Milena Rodríguez

ISBN: **978-958-756-215-6**

Primera edición 2013.

TABLA DE CONTENIDO

Introducción

La enseñanza de las matemáticas por competencias es un proceso que se ha venido implementando en Colombia, ya que se considera de gran impacto porque responde al reto de llevar a cabo una integración entre el proceso formativo, con las dinámicas sociales y políticas del país, y el proyecto de vida y de autorrealización personal.

La Universidad EAN tiene como misión "contribuir a la formación integral de la persona y estimular su aptitud emprendedora, de tal forma que su acción coadyuve al desarrollo económico y social de los pueblos" (EAN, 2011). Además, la formación de sus estudiantes está basada en el aprendizaje por competencias, lo cual implica que dentro del modelo pedagógico de la universidad EAN el estudiante:

- Es gestor de su propio aprendizaje.
- Aprende a pensar para construir su conocimiento.
- Construye nuevos significados, a partir de unos conocimientos previos.
- Plantea, resuelve problemas y busca distintas alternativas de solución.

Dentro del aprendizaje por competencias, los estudiantes deben ver un primer curso de matemáticas, como una de las unidades de estudio en las Carreras de Administración y Economía. Teniendo en cuenta el modelo educativo de la Universidad EAN, se encontró que los textos de matemáticas no responden del todo a los objetivos de aprendizaje por competencias que busca la institución, debido a que los contenidos no son desarrollados en nuestro país.

Además, es importante destacar que metodológicamente los primeros cursos son de fundamentación, sin embargo, los textos empleados no relaciona la aplicabilidad de las matemáticas desde un comienzo y tampoco exponen algunos fundamentos básicos de las Matemáticas Financieras, las cuales son primordiales en esta formación profesional.

Actualmente las universidades en Colombia están viviendo una transformación en sus programas de estudio, de manera que han incluido materias de matemática básica o precálculo, debido al bajo nivel académico con el que llegan los estudiantes de la formación básica y media. Aunque esto puede llevar a los estudiantes a pensar que están repitiendo un proceso que ya cursaron en el colegio, uno de los objetivos del presente trabajo es presentarles un enfoque aplicativo de las matemáticas a su carrera.

Por otra parte, la Universidad EAN maneja dos grupos de estudiantes: aquellos que no tienen compromisos laborales y quienes tienen que trabajar para pagar sus estudios, por lo cual dedican tiempo limitado a su aprendizaje. En ocasiones, esto hace que el acceso a una biblioteca física sea difícil y por ende, se busque con mayor frecuencia la información por medio de Internet. Por esto, se busca que el estudiante:

- Sea un autor de su propio conocimiento, de forma que consulte el contenido programático del *Syllabus* de la unidad de estudios de matemáticas, bien sea en textos, artículos o páginas *Web.*

- Aprenda a seleccionar la información de manera adecuada, con la orientación del docente y en el momento en que se genere la discusión del tema a tratar.

- Aplique el concepto adquirido, viendo la importancia y necesidad de aprender las matemáticas, apoyado en las guías de ejercicios previamente seleccionados.

De esta manera, es viable guiar al estudiante hacia el aprendizaje autónomo, con el fin de que este sea autor de su propio conocimiento, aprovechando las herramientas y recursos que tiene a su alcance. El diseño y elaboración de estas guías, es una estrategia-metodología que enriquece la experiencia docente en sus procesos de enseñanza y dinamizan el rol del estudiante es sus procesos de aprendizaje.

El proyecto plantea la puesta en marcha de una propuesta que fortalece la formación de los estudiantes desde un aprendizaje autónomo y significativo, basada en el desarrollo de sus competencias comunicativas y cognitivas. Es el estudiante el gestor de su propio conocimiento, quien aprende a través del contenido pragmático del *Syllabus* de la unidad de estudios de matemáticas para Administración y Economía en la universidad EAN.

El aprendizaje por competencias es un reto en la educación superior de Colombia. La Universidad EAN busca desde su misión, contribuir a la formación integral de los estudiantes fortaleciendo su formación desde la enseñanza de la matemática basada en el aprendizaje por competencias. Como modelo pedagógico pretende desarrollar en los estudiantes el saber ser, saber hacer y saber tener, a través de la potenciación de habilidades, destrezas, actitudes y conocimientos.

La propuesta presenta guías de autoaprendizaje para el primer curso de matemáticas en los programas de Administración y Economía de la Universidad EAN. Con ello se busca desarrollar y aplicar los conocimientos de esta disciplina, a través de estrategias de enseñanza que dinamicen el papel de los estudiantes, promoviendo el aprendizaje significativo y autónomo que genera un conocimiento contextualizado y aplicable a su cotidianidad.

El proyecto explora en principio, un marco referencial que sustenta teórica y contextualmente la propuesta, para luego mostrar sus resultados por medio de la presentación de las guías de autoaprendizaje.

1. Planteamiento del problema

En la actualidad, los estudiantes que ingresan a la universidad carecen de conceptos básicos en matemáticas los cuales se requieren para abordar un primer curso de esta área del conocimiento. Esto ocurre debido a la poca homogeneidad de la población estudiantil, ya que la fundamentación en esta disciplina no es la misma en todas las instituciones educativas de la formación básica y media.

Teniendo en cuenta lo anterior, se evidencia una baja producción académica por parte de los estudiantes siendo esta, una de las causas de la cancelación o pérdida de la asignatura. Además, el modelo pedagógico de la Universidad EAN promueve el aprendizaje autónomo en la formación de sus profesionales, lo que implica que estos tengan buenos hábitos de estudio.

Por lo tanto, es necesario un cambio en las herramientas y estrategias de enseñanza de los cursos de matemáticas y sobre todo, en la innovación de guías de aprendizaje que faciliten la adaptación de los estudiantes al trabajo autónomo y al autoaprendizaje. Dichas herramientas deben responder a las exigencias de las instituciones de educación superior, en especial de la Universidad EAN, donde deben estar en coherencia con su enfoque estratégico, mostrando cómo la investigación articulada fomenta la academia y la formación de profesionales en los diferentes programas del pregrado, logrando así, involucrar al educando en su modelo pedagógico.

2. Estado del arte

En su artículo *Las matemáticas por competencias* Villanueva (s.f.), muestra de donde nace o proviene el concepto de competencia. Este es propuesto originalmente por Noam Chomsky en el marco de su teoría de la Gramática Generativa Transformacional, donde aportó el concepto de *competencia lingüística* y en donde señala que “una persona es competente en el uso del lenguaje cuando lo emplea para interactuar en la comunidad” (Chomsky, 1970).

Otra de las fuentes en la construcción del concepto surgió en el mundo laboral, donde David McClelland (1987) afirmó que los test y cuestionarios tradicionales utilizados para predecir el rendimiento laboral (que están basados en la medición de conocimientos y aptitudes, así como las notas escolares), no predecían el éxito del desempeño en situaciones concretas de la vida y en ejercicio ocupacional. Por lo tanto, buscó y estableció nuevas variables que denominó: competencias. Estas variables se medían dentro del contexto de tareas laborales, teniendo como referencia a aquellos empleados que son particularmente exitosos en sus labores, frente a quienes tienen un rendimiento promedio.

El Programa para la Evaluación Internacional para Estudiantes (PISA, por sus siglas en inglés) (DeSeCo, s.f.), fue lanzado en 1997 por los países de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico. El objetivo de PISA es realizar un seguimiento a los estudiantes que se encuentran al final de la escolaridad obligatoria, para establecer si estos han adquirido los conocimientos y las destrezas necesarias para desenvolverse frente a una sociedad. Una de las motivaciones en su creación, fue trabajar el concepto de competencia el cual definen como: “la capacidad de los estudiantes de analizar, razonar y comunicarse efectivamente conforme se presentan, resuelven e interpretan problemas en una variedad de áreas” (DeSeCo, s.f.).

En otras definiciones de competencia dadas por algunos autores, se encuentran: “Una característica subyacente de un individuo, que está causalmente relacionada con un rendimiento efectivo o superior en una situación o trabajo, definido en términos de un criterio” (Spencer, 1993). Y, “Una habilidad o atributo personal de la conducta de un sujeto, que puede definirse como característica de su comportamiento, y bajo la cual, el comportamiento orientado a la tarea puede clasificarse de forma lógica y fiable” (Ansorena Cao, 1996).

Estas definiciones están enmarcadas dentro de un contexto y dependen de donde se quiera trabajar (un ambiente laboral, social, educativo, etc.). El interés del presente trabajo son los diferentes tipos de competencias en matemáticas, su definición y cómo estas deben estar enmarcadas en la construcción de las guías para que faciliten y promuevan el aprendizaje autónomo en los estudiantes de matemáticas I de la Universidad EAN.

Villanueva (s.f.) establece que las matemáticas por competencias, tomando como referencia el enfoque socio-formativo, “pretenden formar personas competentes para desempeñarse en la realización de tareas y resolución de problemas mediante algoritmos, procesos lógicos, estimación aproximada de resultados, construcción de modelos algebraicos, medición y procedimientos de cálculo numérico”.

El proyecto PISA 2006 define competencia matemática como: “una capacidad del individuo para identificar y entender la función que desempeñan las matemáticas en el mundo, emitir juicios fundados y utilizar y relacionarse con las matemáticas de forma que se puedan satisfacer las necesidades de la vida de los individuos como ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos” (PISA, 1997).

El Ministerio de Educación Nacional de Colombia, apoyado en Villaveces (2008), establece que las competencias genéricas en matemáticas para la educación superior, se deben abordar desde dos puntos de vista:

- Como saber instrumental.
- Como parte integral de nuestra cultura.

Como saber instrumental, todo profesional debe ser competente en:

- La habilidad para encontrar patrones.
- La facilidad para hacer conjeturas y someterlas a prueba.
- La capacidad de abstraer y encontrar las estructuras escondidas en muchas situaciones.
- La capacidad de construir modelos de diferentes sistemas físicos y sociales.
- La habilidad de usar distintos tipos de tecnologías matemáticas, tales como calculadoras, calculadoras gráficas y computadores. Deben usarlas con eficiencia y comprensión de su funcionamiento y principios básicos. Especialmente, deben tener claridad sobre cuándo será útil su uso y cuándo no.
- La facilidad de leer distintos tipos de gráficas, estadísticas, notaciones científicas, logarítmicas, etc.
- La comprensión del manejo espacial que incluya la capacidad de leer mapas, comprender gráficas tridimensionales y manejar las nociones fundamentales de la perspectiva y la geometría proyectiva.

- La capacidad de entender a grandes rasgos procesos de carácter algorítmico y de poder entender algo de código básico.

- La capacidad de entender terminología y conceptos probabilísticos generales.

Como parte integral de nuestra cultura, el profesional debe ser competente en comprender que:

- Las matemáticas son un lenguaje que expresa el contenido más abstracto de las ideas.

- Las matemáticas permiten formular teorías en las ciencias naturales y económico-administrativas.

- El profesional debe comunicarse de manera correcta, a través del lenguaje de las matemáticas.

De acuerdo con lo expresado anteriormente, es posible visualizar que en Colombia se ha empezado a trabajar sobre las competencias en distintas disciplinas y en particular, las afines a las matemáticas. Sin embargo, aún falta implementar y articular textos o documentación que permitan llevar a la práctica pedagógica un manejo constante de las competencias en esta área del conocimiento.

3. Objetivos

3.1 Objetivo general

Elaborar guías de autoaprendizaje para un primer curso de matemáticas en los programas de Administración y Economía de la Universidad EAN, las cuales lleven al aprendizaje autónomo y la facilitación de los conocimientos en esta disciplina.

3.2 Objetivos específicos

- Enriquecer la experiencia docente en la enseñanza de las unidades de estudio de los primeros cursos de matemáticas, en los programas de Administración y Economía de la Universidad EAN, a partir del desarrollo de estas guías.

- Incorporar la tecnología en el proceso de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, específicamente los programas Derive, Excel y Winplot, para dinamizar el rol del estudiante, logrando un aprendizaje significativo dentro de un enfoque constructivista, a partir de las guías desarrolladas para tal fin.

- Involucrar algunas temáticas de la Matemática Financiera, como ejemplo de aplicabilidad de algunos conceptos en matemáticas.

4. Marco teórico

Con el transcurrir de los años, las instituciones educativas se han encaminado en propender por una educación que avance hacia una sociedad del conocimiento, capaz de mantener profesionales preocupados por el mejoramiento de su entorno y de generar un ambiente sostenible. Es por esto que a la educación superior le corresponde mantener un sistema de evaluación continuo que ayude a mejorar su calidad, con el fin de hacerla más pertinente, significativa y práctica, además de permitirle a las instituciones una retroalimentación para detectar fortalezas y debilidades dentro de los procesos educativos con el objetivo de desarrollar acciones específicas que optimicen los conocimientos y las competencias básicas.

Todas las personas se enfrentan a diario a tareas que generan un razonamiento cuantitativo, cualitativo o alguna noción matemática y se atreven a solucionar varios problemas con ideas matemáticas; por ello, es necesario desarrollar en los estudiantes competencias matemáticas que los preparen como ciudadanos capaces de enfrentar a su comunidad con apoyo de su propio conocimiento.

La Universidad EAN, en su Proyecto Educativo Institucional (PEI), expone dentro de su modelo pedagógico cuatro pilares fundamentales que se rigen por los siguientes aspectos pedagógicos: el aprendizaje significativo, el aprendizaje autónomo, el aprendizaje basado en problemas y el aprendizaje por comprensión. Las guías aquí presentadas, permiten la formación del educando desde un proceso cognitivo de carácter investigativo, donde una situación problema da lugar a un análisis, una resolución y una toma de decisiones. El contexto institucional y el proyecto, motivan al estudiante para que sea autor de su propio conocimiento y lo aplique en su entorno académico, social, cultural y laboral.

El PEI de la Universidad retoma y plantea una definición muy acertada y pertinente, en el capítulo de las competencias básicas:

Respecto al **aprendizaje autónomo** que plantea la Facultad de Estudios a Distancia mediante la activación cognitiva, se intenta que el estudiante vincule sus experiencias, conocimientos y vivencias al proceso de aprendizaje. Estos vínculos se pueden activar y orientar mediante la formulación de preguntas y la predicción de los aspectos que mostrará el desarrollo del tema objeto de estudio. Esto permite precisar la forma como están organizados los conocimientos que la persona posee sobre el tema y la forma como están relacionados (EAN, 2011).

Además la Universidad sustenta en su marco epistemológico-conceptual, la complejidad del sujeto desde los siete saberes para la educación del futuro (Morín, 1999). El conocimiento está amenazado por el error y la ilusión, debe ser pertinente y la enseñanza debe estar centrada en la condición humana, la identidad terrenal, la comprensión, la ética del ser humano y debe enfrentar las incertidumbres. La educación del siglo XXI exige nuevos planteamientos y retos. El conocimiento y la enseñanza deben asumir los riesgos, deben ser contextualizados y globalizados, deben ser dimensionales, de pensamiento universal y con una comunicación más humana.

Por otra parte, la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) tiene como misión promover políticas que contribuyan al desarrollo de la economía mundial y PISA es uno de sus proyectos destinados a evaluar la formación de los estudiantes, cuando llegan a una edad determinante en su vida laboral. La evaluación PISA obtiene información sobre la aplicabilidad de herramientas matemáticas de los ciudadanos a su contexto diario y la resolución de problemas como elemento del conocimiento.

Para el estudio PISA la alfabetización matemática es:

La capacidad individual para identificar y entender el papel que las matemáticas tienen en el mundo, hacer juicios bien fundados y usar e implicarse con las matemáticas en aquellos momentos en que se presenten las necesidades en la vida de cada individuo como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo (PISA, 1997).

El proyecto PISA se rige por un objetivo básico desde el marco curricular de las matemáticas. Los estudiantes deben aprender a *matematizar.* Se trata de un proceso de aprender a aprender desde las matemáticas; es el proceso de ser competentes desde la resolución de problemas. Por ello, PISA caracteriza la práctica de hacer matemáticas desde situarse en un problema real, plantearlo en esquemas matemáticos y hacer suposiciones sobre los datos del problema, para luego solucionarlo y proponerle un sentido al problema inicial. Entonces, lo que se plantea es cómo hacer matemáticas desde la vida diaria y el contexto social y cultural del estudiante.

Es necesario confrontar la pregunta desde los estándares curriculares ¿Por qué enseñamos matemáticas? PISA expone:

La evaluación PISA declara su finalidad cuando establece su foco en conocer como los estudiantes pueden utilizar lo que han aprendido en situaciones usuales de la vida cotidiana y no solo ni principalmente en conocer cuales contenidos del currículo han aprendido. El estudio PISA considera que el fin prioritario de la enseñanza de las matemáticas consiste en desarrollar competencia matemática de los escolares, la funcionalidad del conocimiento matemático, su potencialidad para dar respuestas a problemas y cuestiones, la competencia de los ciudadanos en el uso cotidiano, social y técnico es la finalidad que PISA considera y estudia (PISA, 1997).

La enseñanza de las matemáticas debe ir un poco más allá de unos contenidos, estrategias y metodologías, deben hacer parte inherente de la vida de los estudiantes. Como lo afirma PISA el modelo funcional sobre el aprendizaje matemático debe partir de tareas contextualizadas, herramientas conceptuales y un individuo cognitivo, ya que es desde ahí donde el estudiante aprende. Estas tareas deben situarse en ambientes personales, laborales, públicos y científicos (PISA 2006, 1997) que la evaluación PISA caracteriza como:

Utilizar y hacer matemáticas en una variedad de situaciones y contextos es un aspecto importante de la alfabetización o competencia matemática. Se reconoce que trabajar con cuestiones que llevan por sí mismas a un tratamiento matemático, a la elección de métodos matemáticos y a la organización por medio de representaciones, depende frecuentemente de las situaciones en las cuales se presentan los problemas… En las tareas de la evaluación PISA se considera la situación, que contextualiza y dota de significado la tarea propuesta (PISA 2006, 1997).

Es por eso que la propuesta del proyecto apunta al desarrollo de competencias matemáticas, a través de guías de autoaprendizaje como tareas contextualizadas hacia un individuo que aprende a partir de su vivencia social y cotidiana. Dichas guías dinamizan el papel del estudiante, permitiéndole un aprendizaje autónomo y significativo dentro de un enfoque constructivista y están diseñadas como material de apoyo que involucra a los estudiantes en procesos de metacognición con un sentido de contextualización de las mismas.

Además, la enseñanza de las matemáticas debe partir del desarrollo de competencias, como se ha implementado en los últimos años en el país. La propuesta apunta a la misión de la Universidad EAN, de contribuir a la formación integral de los estudiantes y coadyuvar al desarrollo económico y social de los pueblos, ya que son los estudiantes los gestores del conocimiento y de su propio aprendizaje.

Por lo anterior, el profesor Villanueva Aguilar en su ponencia *Las Matemáticas por competencias* afirma:

La orientación de las matemáticas por competencias, tomando como referencia el enfoque socio-formativo, pretende formar personas competentes para desempeñarse en la realización de tareas y resolución de problemas mediante algoritmos, procesos lógicos, estimación aproximada de resultados, construcción de modelos algebraicos, medición y procedimientos de cálculos numérico. En esta perspectiva, se enfatiza en la comprensión de los conceptos antes que en la acumulación de datos inconexos, como se ha dado con tanta frecuencia en el currículo tradicional (s.f.).

Al igual que el profesor Villanueva, la propuesta apunta al aprendizaje significativo. Un aprendizaje que promueva el desarrollo de las estructuras cognitivas de los estudiantes. Un aprendiz que tome el conocimiento y se apropie de él, que proyecte su formación y haga parte de su aprendizaje. La construcción de las guías de autoaprendizaje fortalece el proceso de aprender con sentido, es decir, aquello que les permita vivir y darle sentido, un conocimiento que se vuelve aplicable y relevante.

Villanueva expone el desarrollo de competencias propias del área de las matemáticas: la Competencia Lógica, Numérica, Geométrica, Métrica, Algebraica y Estadística, como generadoras de conocimientos, habilidades y actitudes.

Se puede afirmar, sin temor a equivocarse, que la enseñanza de las matemáticas por competencias es el instrumento para el desarrollo de las habilidades básicas y las destrezas de pensamiento que todo ser humano necesita ejercitar. Toda persona requiere desarrollar destrezas básicas, como la expresión oral y escrita del lenguaje matemático y a la vez hacer cálculos y razonamientos lógicos. Es por ello que la enseñanza por competencias involucra el desarrollo de habilidades básicas y de destrezas de pensamiento como planear, formular, resolver y analizar, entre otras (s.f.).

La Universidad EAN desde la facultad de Administración, Finanzas y Ciencias Económicas en su programa de Administración y Economía, propende por afianzar una comprensión sólida de las matemáticas, por medio del análisis de situaciones de empresa y el diseño de modelos matemáticos correspondientes, para determinar una adecuada toma de decisiones en los estudiantes de la institución, fortaleciendo las competencias básicas y transversales de las matemáticas aplicables al entorno y en especial a la empresa.

La institución de educación superior EAN desarrolla competencias básicas en sus estudiantes como: la competencia comunicativa y la cognitiva/metacognitiva; como competencias transversales: la empresarial, socio-humanística, tecnológica e investigativa. Estas son evaluadas por las actitudes (saber ser), el conocimiento (saber) y las habilidades (saber hacer), aplicadas por los estudiantes de la institución. Son sus comportamientos los que demuestran el alcance de las competencias matemáticas y el desarrollo de aprendizajes cognitivos.

Dentro del modelo educativo de la Universidad EAN competencia se entiende por:

La capacidad que tiene la persona en el **Ser, Saber y Saber Hacer** en situaciones reales, ante una tarea nueva, para resolver problemas, tomar decisiones, elaborar proyectos, desde una visión emprendedora y gerencial […] No se puede olvidar que el saber se adquiere durante el transcurso de la vida, a través de las experiencias y las relaciones que como sujetos van desarrollando dentro de una comunidad, como también las experiencias que se adquieren en el aprendizaje formal, el cual se define en la vida académica (EAN, 2011).

Las competencias son direccionadas desde diferentes niveles y significaciones sociales, culturales y educativas. Las guías de autoaprendizaje propuestas aquí, direccionan procesos desde la comprensión, análisis y explicación del mundo (competencia interpretativa); posibilitan procesos de argumentación y justificación en planteamientos de juicios que llevan a hipótesis (competencias argumentativas) y realizan proposiciones e interacciones, que generan el conocimiento de un mundo transformado (competencia propositiva).

Además, las competencias accionan dos campos del saber: la significación y la interiorización, de manera que se hace necesario perfeccionarlas y accionarlas como capacidades e interiorizarlas dentro de un contexto real.

5. Metodología

Para llevar a cabo la construcción de estas guías, se tuvieron en cuenta los siguientes parámetros:

- Análisis del modelo pedagógico de la Universidad EAN.
- Establecimiento de las pautas para la construcción de las guías, a partir de las competencias que se quieren desarrollar en el *Syllabus* propio de la asignatura.
- Consulta de diferentes fuentes bibliográficas y material de apoyo que se ajuste a las necesidades requeridas para desarrollar las competencias planteadas en el *Syllabus* de matemáticas de Administración y Economía.
- Construcción de las guías con la finalidad de promover el aprendizaje autónomo, sin abandonar las temáticas que semanalmente están en la unidad de estudios.

De acuerdo con las competencias que se deben desarrollar en matemáticas y en relación con las propuestas del *Syllabus* de la unidad de estudio: Matemáticas I de la Universidad EAN, se diseñaron nueve (9) guías de autoaprendizaje que involucran al estudiante en dos situaciones: la primera, ser autor de su propio conocimiento, puesto que las guías llevan únicamente ejercicios, de manera que él deberá consultar la teoría a desarrollar de acuerdo a la temática que se expresa en la guía. La segunda, es darle el sentido de aplicabilidad a la matemática, dentro un contexto o de forma interdisciplinar con otras materias de su carrera.

Además, se elaboran una serie de preguntas tipo test que involucran las temáticas trabajadas durante el curso de Matemáticas I, lo cual funciona como modelo de autoevaluación para el estudiante.

5.1 Cuerpo de la guía

Las guías están estructuradas de la siguiente manera:

Encabezado

- Facultad.
- Unidad de estudio.
- Número de guía.

Temas

- Indica las temáticas a desarrollar de acuerdo a los ejercicios propuestos.

Competencia general: refleja la competencia global de la unidad de estudio, por lo tanto, aparece en todas las guías.

Competencias específicas: involucran las competencias propias de la guía, logros a alcanzar y sus respectivos indicadores de logros.

Ejercicios: se componen de dos clases, los ejercicios de tipo operacional y los de tipo aplicativo. Estos últimos, involucran la resolución de problemas y pensamiento crítico.

Referencias bibliográficas: se anexa la bibliografía de los textos consultados o de aquellos de donde se seleccionaron los ejercicios.

Es importante aclarar que la presente investigación tiene como objetivo general la construcción de las guías con los fundamentos que ya se han explicado con anterioridad. El posterior análisis del impacto de las guías dentro del modelo pedagógico de la Universidad EAN, queda sugerido para la continuación de este proyecto o como herramienta para investigaciones futuras.

6. Resultados

Se construyeron nueve guías basadas en el modelo pedagógico de la Universidad EAN, que servirán como herramienta al estudiante en su proceso de autoaprendizaje. A continuación se:

Tabla 1. Relación de los objetivos con los resultados esperados en la investigación.

Objetivos	Resultado esperado	Resultado obtenido	Indicador verificable del resultado
1. Elaborar guías de autoaprendizaje para un primer curso de matemáticas de los programas de Administración y Economía de la Universidad EAN, que lleven al aprendizaje autónomo y a la facilitación de los conocimientos en esta disciplina.	Diseño de guías enfocadas al autoaprendizaje y modelo pedagógico de la Universidad EAN.	Se construyeron nueve guías que involucran la temática a desarrollar según el Syllabus del curso de Matemáticas I para administración y Economía. Se diseñó un banco de preguntas tipo test como modelo autoevaluativo.	Ver anexos.
2. Enriquecer la experiencia docente en la enseñanza de las unidades de estudio de los primeros cursos de matemáticas, en los programas de Administración y Economía de la Universidad EAN, a partir del desarrollo de estas guías.	Por medio del desarrollo de las guías y los problemas planteados en estas, enriquecer la experiencia docente. Demostrar al estudiante la aplicabilidad de las matemáticas.	Todavía no se puede obtener un resultado hasta no conocer un concepto emitido por los docentes que vayan aplicar estas guías.	Aún no es verificable este resultado.

3. Incorporar la tecnología en el proceso de la enseñanza – aprendizaje de las matemáticas, específicamente los programas Derive, Excel y Winplot, para dinamizar el rol del estudiante, logrando un aprendizaje significativo dentro de un enfoque constructivista, a partir de las guías desarrolladas para tal fin.	El uso por parte del estudiante, de ciertas herramientas tecnológicas que aparecen en algunas guías, fortaleciendo de esta manera su aprendizaje autónomo.	Desarrollo de ejercicios que involucran el uso de herramientas tecnológicas.	Anexo 1. Anexo 2.
4. Involucrar algunos temas de la Matemática Financiera, como ejemplo de aplicabilidad de algunos conceptos en matemáticas.	El estudiante comprobará, a través de una serie de ejercicios, la aplicabilidad de la matemática desde el punto de vista financiero.	En la guía 2, se presentan una serie de ejercicios enfocados hacia la Matemática Financiera.	Anexo 3.

Fuente. Elaborado por los autores.

7. Conclusiones

- Se diseñaron nueve guías y un test, basados en el autoaprendizaje para un primer curso de matemáticas en los programas de Administración y Economía de la Universidad EAN.

- Al desarrollar las temáticas y aplicaciones planteadas en las guías, el docente tendrá una experiencia significativa que le permite enriquecer su labor educativa.

- Se logró implementar en las guías ejercicios que requieren el uso de *Software* (Derive, Excel y Winplot) que lleva al estudiante a una práctica constante del autoaprendizaje.

- Se logró diseñar una guía (Anexo 3. Guía 2) que demuestra al estudiante la aplicabilidad en el campo financiero, de algunos conceptos básicos de la matemática desarrollados durante el curso.

Referencias Bibliográficas

Ansorena Cao, A. (1996). 15 casos para la selección de personal con éxito (VII). Barcelona, España: Paidós Empresa.

Arya C, J. (2002). Matemáticas aplicadas a la Administración y la Economía. Pearson.

Chomsky, N. (1970). Aspectos de la teoría de la sintaxis. Madrid: Aguilar.

DeSeCo, P. (s.f.). Definition and Selection of Competencies Theoretical and Conceptual Foundations. Recuperado de http://www.deseco.admin.ch/bfs/deseco/en/index/03/02.parsys.78532.downloadList.94248.DownloadFile.tmp/2005.dscexecutivesummary.sp.pdf

Haeussler, E. (2008). Matemática para Administración y Economía. 12ª ed. Pearson.

Harshabarger, R. (2005). Matemáticas aplicadas a la Administración, Economía y Ciencias Sociales. 7ª ed. Mc Graw Hill.

Hoffmann, L. (2006). Cálculo aplicado: para Administración, Economía y Ciencias Sociales. MacGraw Hill.

McClelland, D. (1987). Human Motivation. CUP Archive.

Morín, E. (1999). Los siete saberes necesarios para la educación del futuro. UNESCO.

Núñez, R. (2008). Cálculo con aplicaciones. 1ª ed. Pearson.

PISA 2006, M. d. (1997). OECD. Programme for International Student Assessment (PISA). Recuperado de http://www.oecd.org/pisa/39732471.pdf

Spencer, L. M. (1993). Competence at work. Jonh Wiley and Sons.

Stewart, J. (2008). Cálculo de una variable: trascendentes tempranas. 6ª ed. Cengage Learning.

Tang Tan, S. (2005). Matemáticas para Administración y Economía. 3ª ed. Thomson.

Universidad EAN. (2011). Proyecto Educativo Institucional (PEI). 2011-2015. Bogotá: Universidad EAN.

Villanueva, G. (s.f.). Universidad Nacional Autónoma de México. Recuperado de http://dcb.fi-c.unam.mx/: http://dcb.fi-c.unam.mx/Eventos/Foro3/Memorias/Ponencia_67.pdf

Villaveces, J. L. (diciembre, 2008). Ministerio de Educación Nacional República de Colombia. Recuperado de http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-189357_archivo_pdf_matematica_1C.pdf

Anexos

Anexo 1

Facultad de Administración y Economía

Matemáticas I

Guía 0

Temas:

- Repaso Aritmética
- Repaso Álgebra
- Ecuaciones
- Resolución de ecuaciones

Competencia general

Conoce, maneja y aplica adecuadamente los conceptos, métodos y procedimientos del Cálculo diferencial en una y varias variables y los aplica adecuadamente a situaciones de su entorno, en especial en la empresa.

Competencias específicas

Tabla 1. Descripción de competencia, logros e indicadores

Competencia	Logros	Indicadores de logros
Comunicativa: maneja adecuadamente el lenguaje matemático.	Utilizar el lenguaje matemático, notaciones y estructuras para representar ideas, describir relaciones y modelar situaciones.	Reconoce símbolos matemáticos y los usa adecuadamente.
Cognitiva: desarrollo de estructuras conceptuales de los temas de matemática básica.	Resuelve problemas de aplicación, utilizando herramientas matemáticas dadas en clase.	. Analiza situaciones para hallar propiedades y estructuras comunes. . Resuelve, comprueba e interpreta problemas.
Disciplinar: resuelve ecuaciones lineales, cuadráticas y desigualdades de tipo lineal.	. Identifica y resuelve ecuaciones lineales y cuadráticas. . Aplica de manera correcta las propiedades de la potenciación y resuelve problemas relacionados con porcentajes.	X
Tecnológica: utiliza de forma correcta el programa Derive, para factorizar polinomios y hallar raíces de ecuaciones.	Comprende el concepto de factorización y el número de raíces de un polinomio, según su grado.	Resuelve ecuaciones de primer y segundo grado, indicando su solución y numero de raíces.
Socio-humanística: X	Desarrolla trabajos en grupo y se desempeña como constructor y facilitador de metas colectivas.	. Respeta la opinión y el trabajo de los demás. . Es un líder positivo frente al grupo.

Empresarial e investigativa: Reconoce la importancia de la aplicación de las ecuaciones lineales y cuadráticas en la solución de problemas económicos, dentro de un contexto dado.	. Pregunta, indaga y consulta en diferentes fuentes, con el fin de incrementar su espíritu investigativo. . Interpreta los conceptos de matemáticas desde un punto de vista económico.	. Interpreta la solución de un problema lineal y cuadrático en el contexto económico. . Relaciona las demás áreas del conocimiento con las matemáticas. . Analiza y resuelve modelos matemáticos sencillos, aplicados en la solución de problemas relacionados con la administración y la economía.

Fuente. Elaborado por los autores

Reglas básicas para las operaciones aritméticas

Para llevar a cabo las operaciones aritméticas básicas, es necesario seguir las reglas y metodología apropiada. En esta sección, cada regla se presenta con un ejemplo numérico.

✓ Propiedad conmutativa de la suma

$$a + b = c \rightarrow b + a = c$$

✓ No conmutatividad de la resta

$$a - b = c \rightarrow b - a \neq c$$

✓ Propiedad conmutativa del producto

$$a \times b = c \rightarrow b \times a = c$$

✓ Distributiva del producto con relación a la suma

$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$$

✓ Regla para el cociente de dos expresiones

$$a \div b \neq b \div a$$

✓ Suma de fracciones con igual denominadores

$$\frac{a+c}{b} = \frac{a}{b} + \frac{c}{b}$$

✓ Fracción con una suma o resta en el denominador

$$\frac{a}{b+c} \neq \frac{a}{b} + \frac{a}{c}$$

✓ Suma de fracciones con distintos denominadores

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$$

✓ Producto de fracciones

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

✓ Cociente (división) de fracciones

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Reglas del álgebra: exponentes y radicales

A continuación, se presenta un resumen de algunas de las reglas básicas que deben tenerse en cuenta al trabajar con raíces o radicales.

- $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$
- $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$
- $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$
- $(x^m)^n = x^{m \cdot n}$
- $(xy)^n = x^n y^n$
- $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y}$
- $\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$
- $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$

Repaso de álgebra

Expresión algebraica:

Es cualquier símbolo o combinación de símbolos *(a ,bx ,c ,tw , etc.)* que representan números.

3ax + 2xy - 5z *donde cada grupo de símbolos es un término*

Monomio:

Es una expresión algebraica que consta de un sólo término.

4ax, 7w

Binomio:

Es una expresión algebraica que consta de dos términos.

6xy - 8zw, 89x + 16y

Trinomio:

Es una expresión algebraica que consta de tres términos.

3xyz + 4xy - z

En general, una expresión algebraica que consta de dos o más términos se llama un polinomio. Tenga en cuenta que cada término de un polinomio consta de una parte numérica con su signo (coeficiente numérico) y una parte literal o de letras con sus exponentes.

Ecuación:

Una ecuación se define como la igualdad entre dos expresiones algebraicas.

5x + 4 = 9

Cada lado de la ecuación se denomina miembro. La variable cuyo valor se determinará al solucionar la ecuación se denomina incógnita.

- La solución de una ecuación o raíz, es el valor de la variable que satisface esa ecuación. O sea, el valor de la variable para el cual ambos miembros son iguales.

- El exponente de la incógnita en una ecuación me indica el grado de esa ecuación. Así, en la ecuación anterior el exponente de la variable x es 1 y por lo tanto la ecuación es de primer grado.

- Las ecuaciones pueden clasificarse en condicionales o en identidades.

- Una ecuación condicional es aquella para la cual un sólo valor de la variable satisface la ecuación.

$$5x + 4 = 9$$
$$5x = 9 - 4$$
$$5x = 5$$
$$x = 1$$

x = 1 es el único valor que satisface la ecuación, por lo tanto, es una ecuación condicional.

Por su parte, en una identidad existe un número infinito de valores que satisfacen la ecuación.

$$2x + 3x = 5x$$

Es una identidad, porque hay un número infinito de valores que hacen válida esa ecuación. Por ejemplo, 1,2,3,…..,10,…

Propiedades básicas para la solución de una ecuación

a. Si en ambos miembros de una ecuación sumamos o restamos la misma cantidad, el resultado no se altera.

b. Si ambos miembros de la ecuación se multiplican o se dividen por la misma cantidad, el resultado no se altera.

Ejercicios

1. Simplificar la siguiente expresión:

$$\frac{y^2-4y+4}{y^2-4}$$

2. Las edades de 3 personas, están en la relación 2, 6, 7 respectivamente. ¿Si el del medio tiene 72 años la edad del mayor es?

3. Si se pagan $897.624 que corresponden a los 3/5 del saldo de una deuda. E inicialmente se habían cancelado 8/9 de la deuda inicial. ¿La deuda era?

4. Simplificar la siguiente expresión:

$$\left(\frac{q^{-1}rs^{-2}}{r^{-5}sq^{-8}}\right)+\left(\frac{sr^{-5}}{3}\right)$$

5. En el ejercicio anterior si q= 1, s= 2 y r= -1

6. Si $\frac{2x}{3}-4=0$ entonces el valor de x es:

7. Si $\frac{2x}{3}-(4+x)=0$ el valor de x es:

8. La población de cierta bacteria es de 2`500.000 y crece por hora en un 8%. Después de 180 minutos la población total es:

9. Del ejercicio anterior se puede afirmar que la población aumentó en:

10. Calcular el producto de $\left(\frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{2}{5}\right)\left(2 - \frac{1}{3}x\right)$.

11. Halle la solución de $\left(2x - \sqrt{5}\right)^2$

12. El resultado de simplificar $2x - 3\{x + 2[x - (x + 5)] + 1\}$ es:

13. Factorizar $x^{2n} + x^{n+2}$

14. Resolver la ecuación $5y^3 - 45y^2 + 90y = 0$

15. Hallar el M.C.M de los siguientes polinomios:

$$x^2 - 10x + 25; \quad x^2 - 25; \quad x^2 + 10x + 25$$

16. Simplificar la siguiente expresión:

$$\frac{1 - \frac{1}{3x}}{1 - \frac{1}{9x^2}}$$

17. Hallar el M.C.D de los siguientes polinomios:

$$x^2 - 1; \; x^2 - 25; \; x^2 + x$$

18. Calcular el valor numérico de la siguiente expresión:

$$\frac{x^3 - 2x^2y + 5xy^2 - y^3}{x + y^2} \quad para \quad x = 5; y = 2$$

19. Calcular los binomios que son factores del polinomio:

$$2x^3 - 3x^2 - 29x + 60$$

20. Un comerciante compra artículos con un descuento del 25% sobre el precio de lista y lo vende en un 25% más que el precio de lista. ¿Cuál es su porcentaje de ganancia sobre el costo?

21. Se incendia una casa que estaba asegurada por el 86% de su valor y se cobran $4.300 por el seguro. ¿Cuál era el valor de la casa?

22. Patricia es mayor que Claudia y menor que Cristina, quién tiene la misma edad de Gloria. Entonces, ¿quién es la menor?

23. Si un caracol recorre 3 metros en 5 minutos, ¿cuántos metros recorrerá en 3 cuartos de hora?

24. ¿Cuál es el número que sumado con el doble del mismo da 18?

25. Cuáles son los 2/3 de los 3/4 de 20?

26. Andrés tiene en su tienda los botones metidos en bolsas. En la caja A tiene bolsitas de 24 botones cada una y no sobra ningún botón. En la caja B tiene bolsitas de 20 botones cada una y tampoco sobra ningún botón. El número de botones que hay en la caja A es igual que el que hay en la caja B. ¿Cuántos botones como mínimo hay en cada caja?

27. A qué es igual:

a. Los $\frac{3}{5}$ de 2000

b. Los $\frac{4}{3}$ de 12690

c. Los $\frac{5}{6}$ de 120

d. $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{2}$ de 12

e. $\frac{5}{6}$ de $\frac{7}{6}$ de 84

28. Si empleo 5/8 del día para trabajar, ¿qué parte del día y cuántas horas descanso?

29. Una persona gana mensualmente \$800.000. Gasta los 2/5 en alimentación, \$260.000 en vivienda y 3/8 de lo que le queda en otros gastos. ¿Cuánto puede ahorrar mensualmente?

30. Tenía \$60.000, de ese capital pagué los 3/8 , y gasté los 5/12 de lo que tenía inicialmente. Si después recibo los 13/4 de \$20.000, ¿cuánto tengo ahora?

31. Si una llave vierte $8\frac{1}{4}$ litros de agua por minuto, ¿Cuánto tiempo empleará en llenar un depósito de $90\frac{3}{4}$ litros de capacidad?

32. Catalina tiene caballos y vacas. En total tiene 100 animales. Si se duplicaran los caballos y triplicaran las vacas, en total serían 260 animales. ¿Cuántos caballos y vacas tiene Catalina?

33. Resuelva las siguientes ecuaciones:

a. $9y - 11 = -10 + 12y$

b. $21 - 6x = 27 - 8x$

c. $11x + 5x - 1 = 65x - 36$

d. $15x - 10 = 6x - (x + 2) + (-x + 3)$

e. $(5 - 3x) - (-4x + 6) = (8x + 11) - (3x - 6)$

f. $\sqrt{2x - 3} = x - 3$

g. $\frac{3}{x-4} + \frac{x-3}{x} = 2$

h. $(x - 5)^2 + 7(x - 5) + 10 = 0$

i. $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

34. Dividir 254 en tres partes, tales que la segunda sea el triplo de la primera y 40 unidades mayor que la tercera.

35. Se ha comprado un traje, un bastón y un sombrero por $259. El traje costó 8 veces lo que el sombrero y el bastón $30 menos que el traje. Halle los precios respectivos.

36. Allison Bennett descubre que tiene $1257 en una cuenta de ahorros que no ha usado por un año. La tasa de interés fue de 7.3% compuesto mensualmente. ¿Cuánto interés ganó por esa cuenta a lo largo del último año?

37. Una compañía fraccionada compra un terreno en $7200. Después de vender todo, excepto 20 acres, con una ganancia de $30 por acre sobre su costo original, recuperó el costo total de la parcela. ¿Cuántos acres se vendieron?

38. Una raíz de la ecuación proveniente de la economía

$$\hat{M} = \frac{Q(Q+10)}{44}$$

Es $-5 + \sqrt{25 + 44\hat{M}}$ Verifíquela utilizando la fórmula cuadrática para despejar Q en términos de $\hat{M}$.

39. Resuelva las siguientes desigualdades lineales:

a. $5x - 11 \leq 9$

b. $3x > 12$

c. $\frac{9y+1}{4} \leq 2y - 1$

d. $-3x + 1 \leq -3(x-2) + 1$

e. $\frac{3y-2}{3} \geq \frac{1}{4}$

f. $\frac{3(2t-2)}{2} > \frac{6t-3}{5} + \frac{t}{10}$

40. Una estudiante tiene \$360 para gastar en un sistema estereofónico y algunos discos compactos. Si compra un estéreo que cuesta \$219 y el costo de los discos es de \$18.95 cada uno, determine el mayor número de discos que puede comprar.

41. La compañía Davis fabrica un producto que tiene un precio unitario de venta de \$20 y un costo unitario de \$15. Si los costos fijos son de \$600.000, determine el número mínimo de unidades que deben venderse para que la empresa tenga utilidades.

42. Suponga que los consumidores comprarán q unidades de un producto al precio de $\frac{100}{q} + 1$ dólares por cada una. ¿Cuál es el número mínimo que deben venderse para que el ingreso por las ventas sea mayor que \$5.000?

Referencias bibliográficas

- Arya, J. y Lardner, R. (2002). Matemáticas aplicadas a la Administración y la Economía. Editorial Pearson.
- Haeussler, E. (2002). Introductory Mathematical Analysis for Business, Economics, and the life and Social Sciences. 10ª ed. Prentice Hall.
- _______. y Paul, R. (2008). Matemática para Administración y Economía. 12ª ed. Editorial Pearson.
- Harshbarger, R. (2005). Matemáticas aplicadas a la Administración, Economía y Ciencias Sociales. 7ª ed. Editorial Mc Graw Hill.
- ______. (2004). Mathematical Aplications for the Management, life, and Social Sciencies. 9ª ed. Cengage Learning.
- Hoffmann, L. y Prieto, V. (2006). Cálculo Aplicado: para Administración, Economía y Ciencias Sociales. 3ª ed. Editorial Mac Graw Hill.
- Lial, M., Hungerford, T. y Miller, C. (1999). Mathematics with aplications. Pearson education limited.
- Núñez, R., Soler, F. y Aranda, M. (2008). Fundamentos de Cálculo con aplicaciones a Ciencias Económicas y Administrativas. 1ª ed. Editorial Pearson.
- Portafolio. (2013). Recuperado de http://www.portafolio.co/indicadores/monedas
- Richardson, C. y Miller, I. (1996). Financial Mathematics. D Van Nostrand Company.

- Stewart, J. (2008). Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas. 6ª ed. Editorial Cengage Learning.

- Tang Tan, S. (2005). Matemáticas para Administración y Economía. 3ª ed. Thomson.

- _______. Tan´s College Mathematics for the Managerial, Life, and Social Sciencies. Brooks/cole.

- Wahidudin, A. (2011). Financial Mathematics and its Applications. Ventus Publishing Aps.

Anexo 2

Facultad de Administración y Economía

Matemáticas I

Guía 1

Temas:

- Funciones.
- Rectas y parábolas.
- Funciones lineales y cuadráticas.
- Funciones exponenciales y logarítmicas.
- Trasformaciones de funciones.
- Modelos matemáticos.

Competencia general

Conoce, maneja y aplica adecuadamente los conceptos, métodos y procedimientos del cálculo diferencial en una y varias variables, empleándolos en situaciones de su entorno en especial, en la praxis empresarial.

Competencias específicas

Tabla 2. Descripción de competencia, logros e indicadores

Competencia	Logros	Indicadores de logros
Comunicativa: maneja adecuadamente el lenguaje matemático.	Utilizar el lenguaje matemático, notaciones y estructuras, para representar ideas, describir relaciones y modelar situaciones.	Reconoce símbolos matemáticos y los usa adecuadamente.
Cognitiva: Desarrolla estructuras conceptuales (funciones-tipos de funciones) del curso de Matemáticas I	Aplicar el concepto de función en diferentes contextos.	. Analiza situaciones para hallar propiedades y estructuras comunes. . Interpreta, resuelve y comprueba problemas del contexto.
Disciplinar: Comprende el concepto de función.	Identificar funciones: Lineales, cuadráticas, exponenciales, logarítmicas para emplearlas dentro de un contexto. Utilizar de manera correcta las propiedades de la potenciación y de los logaritmos.	. Encuentra el dominio y el rango de una función. . Diferencia los tipos de funciones en el momento de analizar y construir sus gráficas.
Tecnológica: Utiliza de forma correcta el graficador Winplot para analizar funciones.	Comprender los conceptos de traslaciones y reflexiones de las funciones.	Grafica en el plano cartesiano funciones lineales, cuadráticas, exponenciales y logarítmicas aplicando las transformaciones de funciones.
Socio-humanística: X	Participar en actividades de aprendizaje colaborativo como constructor y facilitador de metas colectivas	. Respeta la opinión y el trabajo de los demás. . Es un líder positivo frente al grupo.

Empresarial e investigativa: Reconoce la importancia de la aplicación de las funciones lineales, cuadráticas, exponenciales y logarítmicas, en la solución de problemas de un determinado contexto.	. Consultar en diferentes fuentes sobre la temática asignada, con el fin de incrementar su espíritu investigativo. . Interpretar los conceptos de matemáticas desde un punto de vista económico.	. Interpreta gráficas de funciones. . Construye funciones para modelar una situación problema dentro de un contexto. . Relaciona las demás áreas del conocimiento con las matemáticas. . Analiza y resuelve modelos matemáticos sencillos aplicados en la solución de problemas relacionados con la administración y la economía.

Fuente. Elaborado por los autores

Funciones

1. Se da la gráfica de una función f.

a. Establezca el valor de $f(1)$.

b. Estime el valor de $f(2)$.

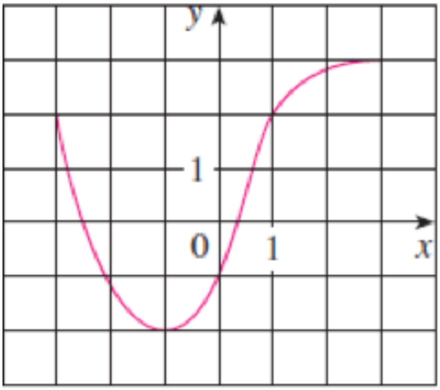
c. ¿Para cuáles valores de x se tiene $f(2)$?

d. Estime los valores de x tales que $f(x)=0$.

e. ¿En qué intervalo es f creciente?

f. Establezca el dominio y el intervalo de f.

Figura 1. Funciones



Fuente. Stewart, 2008, p. 20.

2. Si $f(x) = 3x^3 + 2x - 2$, encuentre $f(1)$, $f(-1)$, $f(b)$, $f(-b)$, $f(b - 1)$, $3f(b)$, $f(3b)$, $f(b^2)$, $[f(b)]^2$ y $f(b + h)$.

3. Encuentre el dominio de las siguientes funciones definidas como:

a. $f(x) = \frac{x}{5x+2}$

b. $f(y) = \sqrt{y} + \sqrt[5]{y}$

c. $y = \sqrt{x} + \sqrt{x+5}$

d. $f(x) = \frac{6x-1}{x^2 + 2x + 1}$

e. $g(t) = 7t + \frac{1}{t}$

f. $f(x) = |3x - 1|$

Rectas

4. Encuentre la ecuación de la recta tal que:

a. Pasa por los puntos (1,4) y (3,-3).

b. Pasa por el punto (-1,- 5) y tiene pendiente 4.

c. Corta al eje x en 5 y al eje y en 6.

d. Pasa por los puntos (-1,6) y (-3,-3).

e. Pasa por (1,-2) y tiene pendiente 0.

f. Pasa por el punto (1,5) y es paralela a 2x - 7y = 8

g. Pasa por el punto (0,5) y es perpendicular a 2x + y = 8

h. Pasa por los puntos (-5,7) y (7,-3).

i. Pasa por el punto (1,0) y tiene pendiente 7.

j. Corta al eje x en 6 y al eje y en -2.

k. Pasa por los puntos (1,1/2) y (3,-1).

l. Pasa por (0,- 2) y tiene pendiente 0.

m. Pasa por el punto (-1,-3) y es paralela a y - 3x = 10

n. Pasa por el punto (1,4) y es perpendicular a 2x - 3y = 5

Gráficas de funciones

5. Graficar las siguientes funciones lineales:

a. $f(x) = 3x - 4$

b. $f(x) = \frac{2}{3}x + 3$

c. $f(x) = 5 - x$

d. $f(x) = 6$

e. $f(x) = -\frac{4}{3}x + 3$

f. $f(x) = 3 + x$

6. Graficar las siguientes funciones cuadráticas, teniendo en cuenta el eje de simetría, vértice de la parábola y puntos de cortes con los

a. $y + 49 = x^2$

b. $y = x^2 - x - 30$

c. $y = 4x^2$

d. $y = 8x - x^2$

e. $y = -x^2 + 25$

f. $y = x^2 + 2x + 1$

7. Deduzca una función cuadrática, $f(x) = ax^2 + bx + c$, que cumpla con las siguientes condiciones:

a. f tiene los valores $f(0) = 5$, $f(1) = 10$ y $f(-1) = 4$
b. Corta al eje x en x = -2 y x = 6

Propiedades de los logaritmos

8. Si log2 = a, log3 = b y log5 = c. Exprese el logaritmo indicado en términos de logaritmos más sencillos.

a. $\log 30$

b. $\log 16$

c. $\log \frac{2}{3}$

d. $\log \frac{5}{2}$

e. $\log \frac{8}{3}$

f. $\log \frac{6}{25}$

g. $\log 150$

h. $\log 54$

9. Determine el valor de la expresión sin el uso de la calculadora:

a. $\log_7 7^{48}$

b. $\log_5 (5\sqrt{5})^5$

c. $\ln e$

d. $\log \frac{1}{10} - \ln e^3$

e. $\ln \frac{1}{e^2}$

f. $\log_4 (16)^5$

g. $\ln e^4 + \ln \frac{1}{e}$

10. Escriba la expresión en términos de ln x, ln (x+1) y ln (x+2):

a. $\ln(x(x+1)^2)$

b. $\ln\left(\frac{x^2}{(x+1)^3}\right)$

c. $\ln\left(\frac{\sqrt{x}}{x+1}\right)$

d. $\ln\left(x(x+1)\right)^3$

e. $\ln\left(\frac{\sqrt{x}}{(x+1)^2(x+2)^3}\right)$

f. $\ln\sqrt{x(x+1)(x+2)}$

11. Grafique las siguientes funciones exponenciales:

a. $f(x) = 2^x$

b. $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

c. $f(x) = (4)^x$

d. $f(x) = e^x$

e. $f(x) = e^{-x}$

f. $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$

12. Grafique las siguientes funciones logarítmicas:

a. $f(x) = \log x$

b. $f(x) = \ln x$

c. $f(x) = \log_2 x$

d. $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

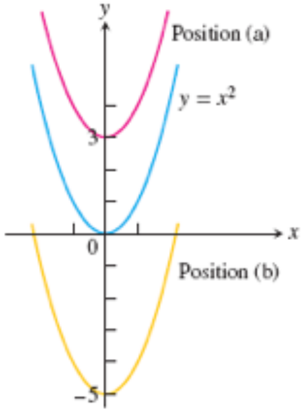
e. $f(x) = \log_5 x$

f. $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$

Transformaciones de funciones

13. La figura siguiente muestra la gráfica de $y = x^2$ desplazada a dos posiciones nuevas. Determine las funciones para las gráficas nuevas.

Figura 2. Transformación de funciones

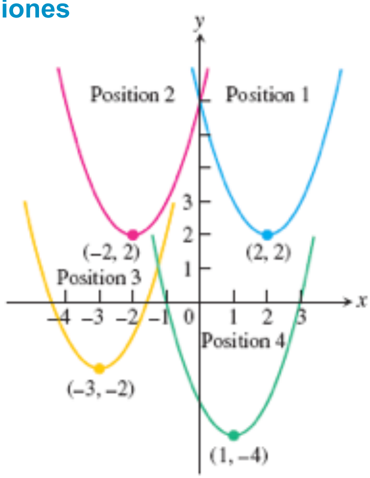


Fuente. Thomas, 2006, p. 46.

14. Relacione las funciones listadas en los incisos **a-d** con las gráficas de la siguiente figura.

$y = (x - 1)^2 - 4$
$y = (x + 2)^2 + 2$
$y = (x - 2)^2 + 2$
$y = (x + 3)^2 - 2$

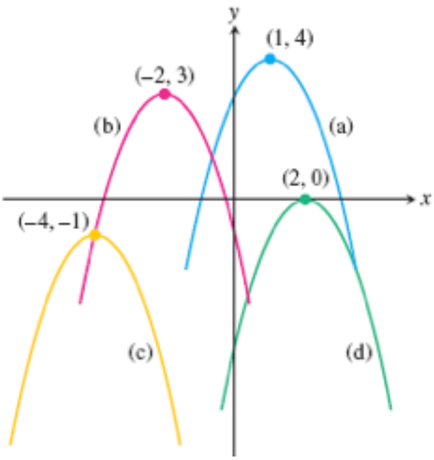
Figura 3. Relación de funciones



Fuente. Thomas, 2006, p. 46.

15. La figura siguiente muestra la gráfica de y = $-x^2$ desplazada a cuatro posiciones nuevas. Determine la función para cada nueva gráfica.

Figura 4. Posición de funciones



Fuente. Thomas, 2006, p. 46.

16. En los siguientes ejercicios se establece cuántas unidades y en qué direcciones se trasladan, comprimen y reflejan las gráficas de las ecuaciones dadas. Determine una ecuación para la gráfica desplazada; después, con la ayuda del Winplot trace en un mismo plano cartesiano, la gráfica de la ecuación original y la gráfica de la ecuación desplazada, etiquetando cada gráfica con la ecuación que corresponda.

a. $y = |x|$, reflejada con respecto al eje x.

b. $y = \frac{1}{x}$ Abajo 3, izquierda 5.

c. $y = \sqrt{-x}$, reflejada con respecto al eje y.

d. $y = \frac{1}{x^2}$, izquierda 2, arriba 3.

e. $y = \frac{1}{2}(x + 1) + 5$, abajo 5, derecha 1.

17. Utilice las transformaciones de funciones para graficar (verifique sus respuestas utilizando Winplot):

a. $f(x) = e^x + 1$

b. $f(x) = 2e^x - 1$

c. $f(x) = e^{x-2}$

d. $f(x) = e^{x+2} - 3$

e. $f(x) = \ln(x-1)$

f. $f(x) = \ln(x+2)$

g. $f(x) = \ln(x) + 3$

Modelos matemáticos

18. Se muestra el número *N* (en millones) de usuarios de teléfonos celulares en el mundo (tabla 3).

Tabla 3. Usuarios de teléfonos celulares

T	1990	1992	1994	1996	1998	2000
N	11	26	60	160	340	650

Fuente. Stewart, 2008, p. 22.

a. Mediante los datos, trace una gráfica de *N* en función de *t.*

b. Utilice la gráfica para estimar la cantidad de usuarios de teléfono celular a mediados de año en 1995 y 1999.

19. Un recipiente rectangular para almacenamiento, con su parte superior abierta, tiene un volumen de $10m^3$. La longitud de su base, es el doble de su ancho. El material para la base cuesta 10 dólares por metro cuadrado, y el material para los lados cuesta 6 dólares por metro cuadrado. Exprese el costo del material como función del ancho de la base.

20. El gerente de una fábrica de muebles encontró que cuesta 2.200 dólares fabricar 100 sillas en un día y 4.800 dólares producir 300 en un día.

a. Exprese el costo como una función del número de sillas que se producen, suponiendo que es lineal. Luego trace la gráfica.
b. ¿Cuál es la pendiente de la gráfica y qué representa?
c. ¿Cuál es la intersección de y de la gráfica y que representa?

21. Una compañía de *Marketing* estima que *n* meses después de la introducción del nuevo producto de un cliente, $f(n)$ miles de familias lo usarán, donde $f(n) = 10/9\ n\ (12 - n)$, $0 \leq n \leq 12$. Estime el número máximo de familias que usarán el producto.

22. Un fabricante vende un producto en $10 por unidad. Los costos fijos del fabricante son de $1.200 por mes y los costos variables son de $2.50 por unidad. ¿Cuántas unidades debe producir el fabricante cada mes, para alcanzar su punto de equilibrio?

23. La utilidad diaria proveniente de la venta de cierto artículo está dada por $U(x) = -x^2 + 18x + 144$, donde x es el número de unidades. Determine para qué cantidad de artículos se alcanzará la máxima utilidad.

24. Un joyero incurre en costos por un collar de acuerdo con $C(x) = 35x + 1650$. Si la función de ingreso de los collares es $R(x) = 85x$. ¿Cuántos collares se deben vender para obtener el punto de equilibrio?

25. Si definimos la funciones de ingreso R, de costo C y de utilidad U, como $R(x) = 250x$, $C(x) = 150x + 200.000$ y $U(x) = R(x) - C(x)$, tenemos que $U(x) = 100x - 200.000$, donde x es el número de unidades producidas y vendidas. Determinar:

a. ¿Cuántas unidades se deben vender para obtener un ingreso $2’ 000.000?

b. ¿Cuántas unidades se producen con un capital de $1’ 850.000?

c. ¿Cuántas unidades se deben producir y vender para obtener una utilidad de $500.000?

26. Suponga que en un mercado monopólico, el costo total por semana para producir un producto de alta tecnología está dado por $C(x) = 3600 + 100x + 2x^2$. Suponga también que la función de la demanda semanal de este producto es $p = 500 - 2x$. Encuentre el número de unidades que darán el punto de equilibrio para este producto.

27. El fabricante de cierto artículo, puede vender todo lo que produce a $60.000 cada artículo. Gasta $40.000 en materia prima y mano de obra al producir cada artículo, y tiene costos fijos de $3’000.000 a la semana en la operación de la planta. Encuentre el número de unidades que debería producir y vender para obtener una utilidad de al menos $ 1’000.000 a la semana.

28. Un fabricante puede vender todas las unidades de un artículo que produce a $ 7.600 cada una. Si tiene unos costos fijos de $ 4.700.000, y unos costos variables por unidad de $4.400 ¿cuántos artículos debe producir para obtener utilidad?

29. El costo C de producir x artículos, incluyendo los costos fijos y los costos variables, está dado por la fórmula $C(x) = 20x + 16.000$. ¿Cuántos artículos se pueden producir si el costo debe ser menor que $ 17.100?

30. Una compañía vende un producto al precio unitario $p = 600 - 0,5x$ pesos, donde x es el número de unidades del producto vendido. ¿Cuántas unidades se deben vender para que el ingreso por la venta de este producto sea mayor que $100.000?

31. Los costos fijos de un producto son de \$ 5'000.000 mensuales y los costos variables por unidad son \$ 6.000. Si el precio unitario de venta es \$10.000:

a. Exprese el costo total y el ingreso en función del número de unidades.
b. Halle el punto de equilibrio.
c. ¿Cuántas unidades se deben producir y vender para obtener una utilidad de \$ 2'000.000?
d. Exprese la utilidad en función del número de unidades vendidas e interprete los coeficientes.

32. Cuando se producen y venden 500 unidades de un producto, se tiene una pérdida de \$ 400.000 y cuando se producen y venden 1.000 unidades, se tiene una ganancia de \$ 600.000. Si los costos variables por unidad son \$ 1.000:

a. Exprese el costo total y el ingreso en función del número de unidades.
b. Halle el punto de equilibrio.
c. ¿Qué utilidad tengo cuando vendo 2.500 unidades?
d. ¿Cuántas unidades se deben producir y vender para obtener una utilidad de \$ 500.000?

33. Una máquina que se compra por un valor de \$18'000.000, se deprecia linealmente en 15 años.

a. Exprese el valor de la máquina en función del tiempo.
b. Calcule el valor de la máquina a final del cuarto año.
c. ¿En cuántos años la maquinaria tendrá un costo de \$ 12' 000.000?

34. Se invierte x dólares al 4% de interés compuesto anual, por lo tanto la cantidad $A(x)$ de la inversión después de un año es $A(x) = 1,04x$. Hallar $A \circ A$, $A \circ A \circ A$ y $A \circ A \circ A \circ A$. ¿Qué representan estas composiciones? Encontrar una fórmula para la composición de n copias de A.

35. Suponga que la ganancia de la producción y la venta de x unidades de un producto se determina por medio de $P(x)=180x - \frac{x^2}{100} -200$. Además, suponga que en cierto mes, el número de unidades producidas en el día t del mes es $x=q(t)=1000+10t$.

a. Encuentre $(P \circ q)(t)$ para expresar la ganancia como una función del día del mes.
b. Encuentre el número de unidades producidas y las ganancias en el quinceavo día de mes.

36. Si se invierten $10.000 con una tasa de interés del 5% compuesto semestralmente, entonces el valor futuro de la inversión S después de t años está dado por $S = 10000(1.05)^t$. Encuentre el valor futuro de la inversión después de:

a. 5 años
b. 30 años

37. El poder adquisitivo P de un ingreso fijo de US$30000 anuales (como una pensión), después de t años con una inflación del 4%, puede modelarse por medio de la fórmula $P=30000e^{-0.04t}$.

a. Encuentre el poder adquisitivo después de 5 años y 20 años. Redondee al dólar más cercano.
b. ¿Cuál es la relación que existe entre la inflación y el poder adquisitivo de las personas que viven de un ingreso fijo con el transcurso de los años?

38. Para una compañía, el costo por producir q unidades de un producto, está dado por la ecuación $c = (3q \ln q) + 12$. Evalúe el costo cuando q=6. Redondee su respuesta a dos decimales.

39. La ecuación de oferta de un fabricante es $p = \log (10+ \frac{q}{2})$ donde q es el número de unidades ofrecidas al precio unitario p. ¿A qué precio el fabricante ofrecerá 1980 unidades?

40. En un análisis de penetración de mercados de nuevos productos, Hurter y Rubenstein hacen referencia a la función:

$$F(t) = \frac{q - e^{-(t+C)(p+q)}}{q[1 + e^{(t+C)(p+q)}]}$$

Donde p, q y C son constantes. Aseguran que si *F*(0) = 0 entonces:

$$C = -\frac{1}{p+q}\ln\frac{q}{p}$$

Pruebe que esta afirmación es cierta.

41. Una suma de $400.000 se invierte a un interés compuesto anual del 3%. Calcule el valor de la inversión en:

a. t años.
b. Un año.
c. Tres años.

42. Pedro invierte $50.000 pesos en un fondo de ahorros, que paga a un interés simple del 8% anual. ¿Cuál es el valor de la inversión?

a. Después de t años?
b. Al cabo de 5 años?

Anexo 3

Facultad de Administración y Economía

Matemáticas I

Guía 2

Temas:

- Operaciones entre funciones.
- Composición de funciones.
- Problemas de aplicación de composición de funciones.
- Problemas aplicados a la Matemática Financiera.

Competencia general

Conoce, maneja y aplica adecuadamente los conceptos, métodos y procedimientos del Cálculo diferencial en una y varias variables y los aplica adecuadamente a situaciones de su entorno, en especial en la empresa.

Competencias específicas

Tabla 4. Descripción de competencia, logros e indicadores

Competencia	Logros	Indicadores de logros
Comunicativa: maneja adecuadamente el lenguaje matemático.	Utiliza el lenguaje matemático, notaciones y estructuras para representar ideas, describir relaciones y modelar situaciones.	Reconoce símbolos matemáticos y los usa adecuadamente.
Cognitiva: desarrolla estructuras conceptuales como son las operaciones entre funciones, la composición de funciones y los conceptos básicos de Matemática Financiera.	Aplica los conceptos de composición de funciones y Matemática Financiera en diferentes contextos.	. Analiza situaciones para hallar propiedades y estructuras comunes. . Resuelve, comprueba e interpreta problemas.
Disciplinar: Comprende de manera asertiva, los conceptos clave de la Matemática Financiera.	. Identifica la diferencia entre interés simple e interés compuesto, en un determinado contexto.	. Resuelve problemas de aplicación relacionados con Matemática Financiera.
Tecnológica: Utiliza de forma correcta el programa Excel, en la solución de problemas relacionados con Matemática Financiera.	Comprende el concepto de interés simple e interés compuesto.	Resuelve problemas, de Matemática Financiera, usando la herramienta tecnológica.
Socio-humanísticas: X	Desarrolla trabajos en grupo y se desempeña como constructor y facilitador de metas colectivas.	. Respeta la opinión y el trabajo de los demás. . Es un líder positivo frente al grupo.
Empresarial e investigativa: Reconoce la importancia de la aplicación de la Matemática Financiera en la solución de problemas económicos en un contexto dado.	Pregunta, indaga y consulta en diferentes fuentes, con el fin de incrementar su espíritu investigativo.	. Relaciona las demás áreas del conocimiento con las matemáticas. . Analiza y resuelve modelos matemáticos sencillos, aplicados en la solución de problemas y relacionados con la administración y la economía.

Fuente. Elaborado por los autores

Ejercicios

Operaciones entre funciones; composición de funciones:

1. Si $f(x) = x + 3$ y $g(x) = x + 5$,encuentre:

a. $(f+g)(x)$
b. $(f+g)(0)$
c. $(f-g)(x)$
d. $(f-g)(x)$
e. $(fg)(0)$
f. $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$
g. $f(g(x))$
h. $f(g(3))$
i. $g(f(x))$

2. Si $f(x) = x^2+1$ $g(x) = x^2 - x$, encuentre:

a. $(f+g)(x)$
b. $(f-g)(x)$
c. $(f-g)\left(-\frac{1}{2}\right)$
d. $(fg)(x)$
e. $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$
f. $\left(\frac{f}{g}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)$
g. $f(g(x))$
h. $g(f(x))$
i. $g(f(-3))$

3. Si $f(x) = x^2+1$ $g(x) = 5$, encuentre:

a. $(f+g)(x)$
b. $(f+g)\left(\frac{2}{3}\right)$
c. $(f-g)(x)$
d. $(fg)(x)$
e. $(fg)(7)$
f. $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$
g. $g)f(g(x))$
h. $f(g(12\,003))$
i. $g(f(x))$

4. si $f(v) = \frac{1}{v^2+1}$ $y\ g(v) = \sqrt{v+2}, encuentre\ f\big(g(v)\big) y\ g\big(f(v)\big)$

Ejercicios de aplicación

5. Un expendio de café vende una libra de café por $9,75. Los gastos mensuales son $4.500 más $4,25 por cada libra vendida.

a. Escriba una función r(x) para el ingreso mensual total, como una función del número de libras vendidas.
b. Escriba una función e(x) para los gastos mensuales totales, como una función del número de libras de café vendidas.
c. Escriba una función (r - c) (x) para la utilidad total mensual, como una función del número de libras vendidas.

6. Un fabricante determina que el número total de unidades de producción por día q, es una función del número de empleados, m , donde

$$q = f(m) = \frac{(40m - m^2)}{4}$$

El ingreso total r, que recibe por la venta de q unidades, está dado por la función g, donde r = g (q) = 40q. Determine g (f(m)). ¿Qué es lo que describe esta función compuesta?

7. La demanda de x artículo está dado por x = 2000 -15 p, donde p es el precio por unidad del artículo. El ingreso mensual de *I* obtenido de las ventas de este artículo está dado por *I* = 2000 p – 15p^2 ¿Cómo depende *I* de X?

8. Un fabricante puede vender q unidades de un producto al precio p por unidad, donde 20p +3q = 600, como una función de la cantidad q demandada en el mercado. El ingreso semanal total está dado por

$$R = 30q - 0{,}15q^2.$$

¿En qué forma depende R del precio?

9. El número de viviendas construidas por año, N, depende de la tasa de interes hipotecaria r de acuerdo con la fórmula:

$$N(r) = \frac{50}{100 + r^2}$$

Donde N está en millones. La tasa de interés actualmente es 12% y se predice que disminuirá a 8% en los siguientes dos años, de acuerdo con la fórmula:

$$r(t) = 12 - \frac{8t}{t + 24}$$

Donde t es el tiempo medido en meses, a partir de ahora. Exprese N como una función del tiempo t. Calcule el valor de N cuando t = 6.

Matemática Financiera

A continuación, se plantean una serie de ejercicios en los cuales se recomienda el uso de la calculadora o del programa Excel.

10. Determine el interés simple correspondiente a una inversión de \$500 a dos años, con una tasa de interés de 8% por año. ¿Cuál es la cantidad acumulada?

11. Halle el interés simple correspondiente a una inversión de \$1.000 a tres años, con una tasa de interés simple de 5% por año. ¿Cuál es la cantidad acumulada?

12. Determine la cantidad demanda al final de nueve meses, para un depósito de \$800 en un banco, el cual pasa un interés simple con una tasa de 6% por año.

13. Si la cantidad acumulada es de \$1.160 al final de dos años y la tasa de interés simple es de 8% por año. ¿Cuál es el capital?

14. ¿Cuántos días se requieren para que una suma de \$1.000 genere un interés de \$20, depositada en un banco que paga un interés simple con tasa de 5% por año? (utilice un año de 365 días.)

15. Un depósito bancario que paga un interés simple, creció desde una suma inicial de \$1.000 hasta \$1.025 en nueve meses. ¿Cuál es la tasa de interés?

16. En los siguientes ejercicios, determine la cantidad acumulada A, si el capital P se invierte con una tasa de interés de r durante t años.

a. P = \$1000, r = 7%, t = 8, compuesto anualmente.
b. P = \$1000, r = 8 1/2%, t = 6, compuesto anualmente.
c. P = \$2500, r = 7%, t = 10, compuesto semestralmente.
d. P = \$12000, r = 8%, t = 10.5, compuesto trimestralmente.

e. P = \$150000, r = 14%, t = 4, compuesto mensualmente.
f. P = \$150000, r = 12%, t = 3, compuesto anualmente.

17. En los siguientes ejercicios, determine el valor presente de \$40.000 que se recibirá en cuatro años, a la tasa de interés dada.

a. 8% compuesto semestralmente.
b. 8% compuesto trimestralmente.
c. 7% compuesto mensualmente.
d. 9% compuesto diariamente.

18. Determine la cantidad acumulada después de cuatro años, si se invierten \$ 5.000 a 8%, por año compuesto en forma continua.

19. ¿Cuánto tiempo se requiere para que una inversión inicial de \$5.000 llegue hasta \$6.500, si la inversión genera interés a una tasa de 12% anual compuesto mensualmente?

20. ¿Cuánto tiempo se requiere para que una inversión inicial de \$2.000 se duplique, si la inversión genera un interés a una tasa de 9% anual compuesto mensualmente?

21. ¿Cuánto tiempo tarda una inversión de \$6.000 en llegar hasta \$7.000 si la inversión genera un interés de $7\frac{1}{2}$ % compuesto en forma continua?

22. A fin de ayudar al financiamiento para adquirir una nueva casa, los Abdullah han decidido solicitar un préstamo durante un corto plazo (préstamo puente) por la cantidad de \$120.000 a 3 meses. Si el banco cobra un interés simple con una tasa de 12% anual, ¿Cuánto deberán los Abdullah al banco al final de los 3 meses?

23. Maya pagó \$10.000 por un bono con vencimiento a 7 años, emitidos por una ciudad. Recibió intereses por la cantidad de \$3.500 durante la vida de los bonos ¿Qué tasa de interés (simple) pago el bono?

24. Los Brennan planean comprar una casa dentro de cuatro años. Los expertos de su área han estimado que el costo de los inmuebles aumentará a razón de 5% por año durante este periodo. Si las predicciones económicas son validas ¿Cuánto tendrán que pagar los Brennan por una casa que ahora cuesta $210.000?

25. Los administradores de un fondo de jubilación han invertido $1.5 millones en certificados de depósito del gobierno de Estados Unidos, los cuales pagan un interés a razón de 5.5% por año, compuesto semestralmente, durante un periodo de 10 años. Al final de ese periodo, ¿a cuánto ascenderá la inversión?

26. Indique la cantidad que se debe depositar en un banco que paga intereses a razón de 8.5% por año compuesto trimestralmente, de modo que al final de cinco años la cantidad acumulada sea de $40.000.

27. En los últimos 5 años, el fondo mutuo Bendix creció a una tasa de interés de 10.4% anual compuesto trimestralmente. Durante el mismo periodo, el fondo mutuo Acme creció a una tasa de interés de 10.6% compuesto semestralmente. ¿Cuál fondo tiene la mejor tasa de rendimiento?

28. Utilizando el programa de Excel resuelva los siguientes ejercicios:

a. Determinar la cantidad acumulada después de 10 años si se invierten $5.000, a una tasa de 10% de interés anual compuesto mensualmente.
b. Determinar la tasa efectiva de interés, correspondiente a una tasa nominal de 10% anual compuesto trimestralmente.
c. Determinar el valor presente de una inversión de $20.000 con vencimiento de 5 años, si la tasa de interés es de 7.5% anual compuesta diariamente.
d. Calcule el monto total acumulado A si se invierte $327.35, con una tasa de interés de 5 1/3% anual compuesto diariamente durante 7 años.

e. Calcule el monto total acumulado A si se invierte $327.35 con una tasa de interés de 6 7/8% anual compuesto diariamente durante 8 años.

f. Calcule la tasa efectiva correspondiente a 8 2/3% anual compuesta trimestralmente.

g. Calcule la tasa efectiva correspondiente a 44% anual compuesta trimestralmente.

h. Calcule el valor presente de $38.000, con vencimiento en 3 años a 8 1/4% anual compuesto trimestralmente.

i. Calcule el valor presente de $150.000 con vencimiento en 5 años a 9 3/8% anual compuesto mensualmente.

29. Determine el monto (valor futuro) de cada anualidad ordinaria.

a. $1.000 al año, durante 10 años, a 10% por año compuesto anualmente.

b. $1.500 al año, durante 8 años, a 9% por año compuesto semestralmente.

c. $1.800 al año, durante 6 años, a 8% por año compuesto trimestralmente.

d. $600 al trimestre, durante 9 años, a 12% por año compuesto trimestralmente.

e. $200 al mes, durante 20 1/4 años, a 9% por año compuesto mensualmente.

30. Encuentre el valor presente de cada anualidad ordinaria en los siguientes ejercicios:

a. $5.000 al año, durante 8 años, a 8% por año compuesto anualmente.

b. $4.000 al año, durante 5 años, a 9% por año compuesto anualmente.

c. $800 al trimestre, durante 6 años, a 12% por año compuesto trimestralmente.

31. Si un comerciante deposita $ 1.500 anualmente al final de cada año fiscal, en una cuenta de retiro que paga intereses a una tasa de 8% por año compuesto anualmente, ¿Cuánto dinero tendrá en su cuanta al final de 25 años?

32. Linda se ha inscrito en un club de fondos para navidad en su banco. Al final de cada mes, de diciembre, hasta octubre inclusive, realizará un depósito de $40 a su fondo. Si el dinero gana intereses a una tasa de 7% por año compuesto mensualmente, ¿Cuánto dinero tendrá en su cuenta el primero de diciembre del próximo año?

33. Karen ha estado depositando $150 al final de cada mes en una cuenta de retiro libre de impuestos desde que tenía 25 años. Matt, que tiene la misma edad que Karen, comenzó a depositar $250 al final de cada mes en una cuenta de retiro libre de impuestos desde que tenía 35 años. Suponiendo que ambas cuentas han estado generando y generarán un interés a una tasa del 5% anual compuesto trimestralmente, ¿Quién tendrá más dinero en su cuenta cuando tengan 65 años?

34. El señor y la señora Betancourt han arrendado un auto durante dos años a $450 por mes. Si el dinero tiene un valor de 9% por año compuesto mensualmente ¿Cuál es el pago en efectivo equivalente (el valor presente) de esta anualidad?

35. La editorial Pierce vende enciclopedias con dos planes de pago: efectivo y a plazos. En el plan a plazos, el cliente paga $22 por mes durante 3 años, con intereses sobre saldos insolutos con una tasa de 18% por año compuesto mensualmente. Determine el precio en efectivo de una enciclopedia y si este equivale al precio pagado por un cliente mediante el plan a plazos.

36. Resuelva los siguientes ejercicios, utilizando el programa Excel:

a. Determine la cantidad de una anualidad ordinaria de 36 pagos trimestrales de $220 cada uno, que genera intereses con una tasa de 10% anual compuesto trimestralmente.

b. Determine el valor presente de una anualidad ordinaria de 48 pagos mensuales de $300 cada uno, que generan intereses con una tasa de 9% anual compuesto mensualmente.

c. Calcule el monto de una anualidad ordinaria de 20 pagos de $2.500 al trimestre a 7 1/4% anual compuesto trimestralmente.

d. Calcule el monto de una anualidad ordinaria de 24 pagos de $1.790 al trimestre a 8 3/4% anual compuesto trimestralmente.

e. Calcule el monto de una anualidad ordinaria de $120 al mes, durante 5 años, a 6 3/8% anual compuesto mensualmente.

f. Calcule el monto de una anualidad ordinaria de $225 al semestre, durante 6 años, a 7 5/8% anual compuesto mensualmente.

g. Calcule el valor presente de cada anualidad ordinaria de $4.500 al semestre, durante 5 años, con intereses de 9% anual compuesto semanalmente.

h. Calcule el valor presente de cada anualidad ordinaria de $2.100 al trimestre, durante 7 años, con intereses de 7 1/8% anual compuesto trimestralmente.

i. Calcule el valor presente de cada anualidad ordinaria de $245 al mes, durante 6 años, con intereses de 8 3/8% anual compuesto mensualmente.

j. Calcule el valor presente de cada anualidad ordinaria de $185 al mes, durante 12 años, con intereses de 6 5/8% anual compuesto mensualmente.

Anexo 4

Facultad de Administración y Economía

Matemáticas I

Guía 3

Temas:

- Límites, límites laterales.
- Propiedades de los límites.
- Cálculo de límites algebraicos.
- Límites al infinito e infinitos.
- Continuidad en un punto.
- Aplicaciones de los límites.
- Derivada.
- Reglas de diferenciación.

Competencia general

Conoce, maneja y aplica adecuadamente los conceptos, métodos y procedimientos del cálculo diferencial en una y varias variables para emplearlos en situaciones de su entorno, en especial en el ámbito de la empresa.

Competencias específicas

Tabla 5. Descripción de competencia, logros e indicadores

Competencia	Logros	Indicadores de logros
Comunicativa: maneja adecuadamente el lenguaje matemático.	Utiliza el lenguaje matemático, notaciones y estructuras para representar ideas, describir relaciones y modelar situaciones.	. Reconoce símbolos matemáticos y los usa adecuadamente. . Interpreta de forma correcta la notación utilizada en los límites.
Cognitiva: Desarrolla estructuras conceptuales (límites, continuidad, derivada) del curso de Matemáticas I.	Comprende y aplica el concepto de límite y continuidad en situaciones diversas.	Establece diferencias entre los conceptos de límite, continuidad y derivadas.
Disciplinar: comprende el concepto de límite continuidad y derivada.	. Utiliza las tres condiciones para analizar la continuidad en un punto. . Aplica el álgebra y las propiedades de los límites para calcular diferentes tipos de límites. . Identifica la regla de diferenciación adecuada para calcular una derivada.	. Calcula de manera correcta distintos tipos de límites. . Analiza la continuidad en un punto desde la perspectiva gráfica y analítica. . Aplica las reglas de diferenciación para encontrar derivadas.
Tecnológica: . Maneja de forma correcta la calculadora científica para realizar y estimar límites, al igual, que para calcular la derivada en un punto. . Utiliza Winplot para graficar rectas tangentes a la curva en un punto.	. Comprende los conceptos de límite lateral derecho e izquierdo. . Interpreta la derivada desde el punto de vista geométrico, como la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto.	. Construye tablas de valores para hacer estimaciones de límites. . Utiliza los límites laterales para determinar la existencia del límite sobre una función en x=a. . Encuentra rectas tangentes a la curva en un punto.

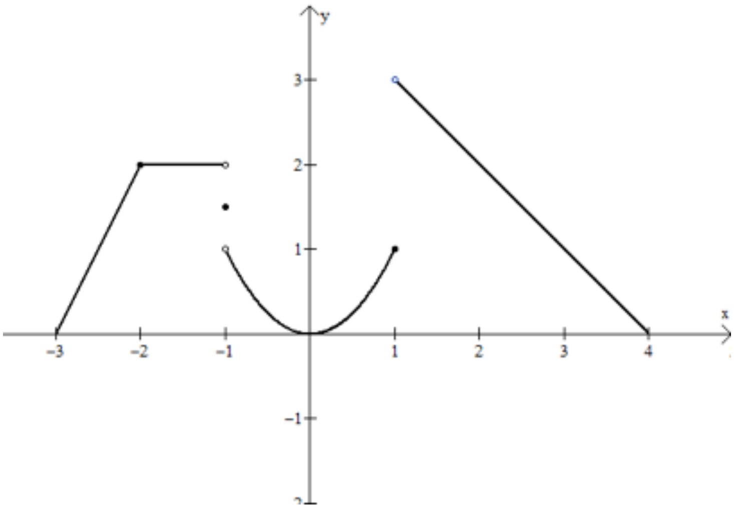
Socio-humanísticas: X	Participa en actividades de aprendizaje colaborativo como constructor y facilitador de metas colectivas.	. Respeta la opinión y el trabajo de los demás. . Es un líder positivo frente al grupo.
Empresarial e investigativa: Reconoce la importancia de la aplicación de los límites y la continuidad a la solución de problemas en un contexto dado.	. Consulta en diferentes fuentes sobre la temática asignada, con el fin de incrementar su espíritu investigativo. . Interpreta los conceptos de matemáticas desde un punto de vista económico.	. Interpreta las discontinuidades que pueden existir sobre una función. . Construye funciones para modelar una situación problema dentro de un contexto. .Relaciona las demás áreas del conocimiento con las matemáticas. . Analiza y resuelve modelos matemáticos sencillos aplicados en la solución de problemas y relacionados con la administración y la economía.

Fuente. Elaborado por los autores.

Límites y continuidad

1. Dada la función y = f(x) que se muestra a continuación,

Figura 5. Función y = f(x)



Fuente. Elaborado por los autores

Encuentre:

a. $\lim_{x\to 3^-} f(x)$

b. $\lim_{x\to -2^-} f(x)$

c. $\lim_{x\to -2^+} f(x)$

d. $\lim_{x\to -2} f(x)$

e. $\lim_{x\to -1^-} f(x)$

f. $\lim_{x\to -1^+} f(x)$

g. $\lim_{x\to -1} f(x)$

h. $\lim_{x\to 0} f(x)$

i. $\lim_{x\to 1^+} f(x)$

j. $\lim_{x\to 1^-} f(x)$

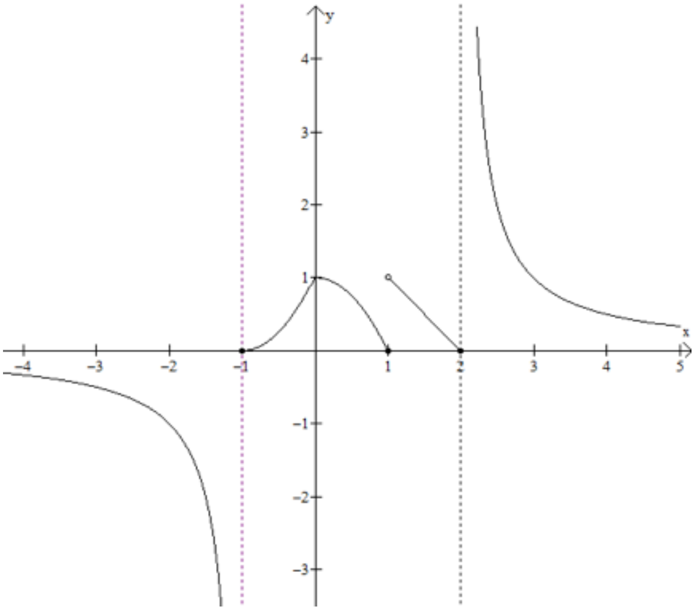
k. $\lim_{x\to 1} f(x)$

l. Determine si la función es continua en los puntos

$$x = -1,\ x = 0 \text{ y } x = 1$$

2. Dada la función y = g(x) que se muestra a continuación,

Figura 6. Función y = g(x)



Fuente. Elaborado por los autores

Encuentre:

a. $\lim_{x\to-\infty} g(x)$

b. $\lim_{x\to-1^-} g(x)$

c. $\lim_{x\to-1^+} g(x)$

d. $\lim_{x\to-1} g(x)$

e. $\lim_{x\to 0} g(x)$

f. $\lim_{x\to 1^+} g(x)$

g. $\lim_{x\to 1^-} g(x)$

h. $\lim_{x\to 1} g(x)$

i. $\lim_{x\to 2^+} g(x)$

j. $\lim_{x\to 2^-} g(x)$

k. $\lim_{x\to 2} g(x)$

l. $\lim_{x\to \infty} g(x)$

m. Determine si la función es continua en los puntos

$$x = -1,\ x = 0,\ x = 1 \text{ y } \ x = 2$$

3. Complete la tabla 6, encontrando $f(x)$ en los valores dados de x. Utilice estos resultados para estimar el límite, si existe.

a. $f(x) = \frac{x^2-25}{x-5}$; $\lim_{x\to 5} f(x)$

Tabla 6. $f(x)$

x	4.9	4.99	4.99	5.001	5.01	5.1
$f(x)$						

Fuente. Elaborada por el autor

b. $g(x) = \frac{\log x}{x}$; $\lim_{x\to \infty} g(x)$

Tabla 7. g(x)

x	10	100	1000	10000	100000	1000000
g(x)						

Fuente. Elaborada por el autor

c. $h(t) = \frac{1}{t+3}$; $\lim_{t\to -3} h(t)$

Tabla 8. h(t)

t	-3,1	-3.001	-3,0001	-2.999	-2.99	-2.9
h(t)						

Fuente. Elaborada por el autor

4. Si el $\lim_{x\to 2} f(x) = 5$, $\lim_{x\to 2} g(x) = -2$ y $\lim_{x\to 2} h(x) = \sqrt{3}$, encuentre:

a. $\lim_{x\to 2}[f(x) + 3g(x)]$

b. $\lim_{x\to 2}[f(x) - g(x)]$

c. $\lim_{x\to 2}(h(x))^2$

d. $\lim_{x\to 2}\left[\frac{f(x)}{h(x)}\right]$

e. $\lim_{x\to 2}[f(x)g(x)h(x)]$

5. Evalúe los siguientes límites:

a. $\lim_{x\to 2}(3x - 7)^{2011}$

b. $\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{4-3x}$

c. $\lim_{x\to 1}\frac{x}{x-1}$

d. $\lim_{x\to 0}\frac{x^2+3x-1}{x^3+2x-8}$

e. $\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{h}}{h+1}$

f. $\lim_{x\to 3}\frac{x}{x-1}$

g. $\lim_{x\to 4} -5$

h. $\lim_{x\to -1}\frac{x^3-x+5}{3-5x}$

i. $\lim_{x\to 1}\sqrt[3]{\frac{2x-3}{x+7}}$

j. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{x-1}$

6. Evalúe los siguientes límites:

a. $\lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{x-5}$

b. $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{x-1}$

c. $\lim_{x\to -3}\frac{x^2-2x-15}{x^2+11x+24}$

d. $\lim_{x\to 6}\frac{x^2-2x-24}{x^2-13x+42}$

e. $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

f. $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^3-8}$

g. $\lim_{x\to -3}\frac{2x+6}{x^2+12x+27}$

h. $\lim_{x\to 3}\frac{x^3-x}{x^2-3x-4}$

i. $\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x^2-81}$

j. $\lim_{x\to -2}\frac{x^2-x-6}{x^2+x-2}$

k. $\lim_{x\to 3}\frac{x}{x-1}$

l. $\lim_{x\to \frac{1}{2}}\frac{2x^2+9x-5}{8x-4}$

m. $\lim_{y\to -3}\frac{y-1}{y+3}$

n. $\lim_{x\to 5}\frac{x^2-2x-45}{x^2-11x+30}$

o. $\lim_{x\to 8}\frac{x-8}{x-8}$

7. Si $f(x) = x^2 - 3x + 1$, encuentre:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

8. Si $f(x) = \frac{1}{x}$, encuentre $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

9. Evalúe los siguientes límites:

a. $\lim_{x\to\infty} \frac{3x-2}{4x+5}$

b. $\lim_{x\to\infty} \frac{3x-2}{4x+5}$

c. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^4+2x^2+5}{x^3-3}$

d. $\lim_{x\to-\infty} \frac{-x^5+4x^3-3x+1}{2-x^6}$

e. $\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^4+6}{3-2x^4}\right)\left(\frac{4-5x}{2x+5}\right)$

f. $\lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{2-3x-16x^3}{4-9x^3}}$

g. $\lim_{x\to-\infty} \frac{5}{x^4-3} + 6$

h. $\lim_{x\to\infty} e^{-x}$

i. $\lim_{x\to 0^+} \ln x$

j. $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{4x+7}{2x-1}\right)\left(\frac{3+x^3}{x^2+2x-5}\right)$

10. Un mayorista en estuches para Blackberry vende cajas por 24 a sus clientes, de acuerdo con la siguiente lista de precios:

- $45.000 por caja en la compra de 20 cajas o menos.
- $40.000 por caja en la compra de más de 20 cajas, pero menos de 50.
- $38.000 por caja para órdenes que incluyen más de 50 pero menos de 100 cajas.
- $35.000 por caja para órdenes de más de 100 cajas.

Si y es el precio total y x es la cantidad de cajas, construya la función de precios y represéntela gráficamente.

11. El costo promedio por disco compacto de video (en dólares), cubierto por la compañía grabadora Herald al imprimir x discos está dado por la función de costo promedio

$$\bar{C}(x) = 2.2 + \frac{2500}{x}$$

Evalúe $\lim_{x\to\infty} \bar{C}(x)$ e interprete el resultado.

12. Un estudio de los costos de uso de los automóviles subcompactos del año 1992 (cuatro cilindros) halló que el costo promedio (pagos del automóvil, gasolina, seguro, mantenimiento y depreciación) medido en centavos por milla, da un valor cercano a

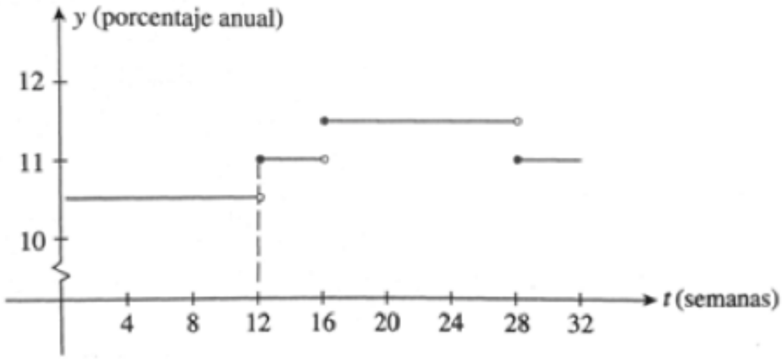
$$C(x) = \frac{2010}{x^{2.2}} + 17.80$$

Donde x denota el número de millas (en miles) recorridas por el automóvil en un año.

a. ¿Cuál es el costo promedio de uso de un automóvil subcompacto que recorre 5.000, 10.000, 15.000, 20.000 y 25.000 millas por año?
b. Utilice (a) como apoyo para trazar la gráfica de la función C(x).
c. ¿Qué le ocurre al costo promedio cuando las millas recorridas aumentan sin límite?

13. La función P (figura 7), proporciona la tasa líder (la tasa de interés que cobran los bancos a sus mejores clientes empresariales) como función del tiempo durante las 32 primeras semanas de 2012. Determine los valores de t para los que P es discontinua e intérprete los resultados.

Figura 7. Función P



Fuente. Tang Tan, 2005, p. 525.

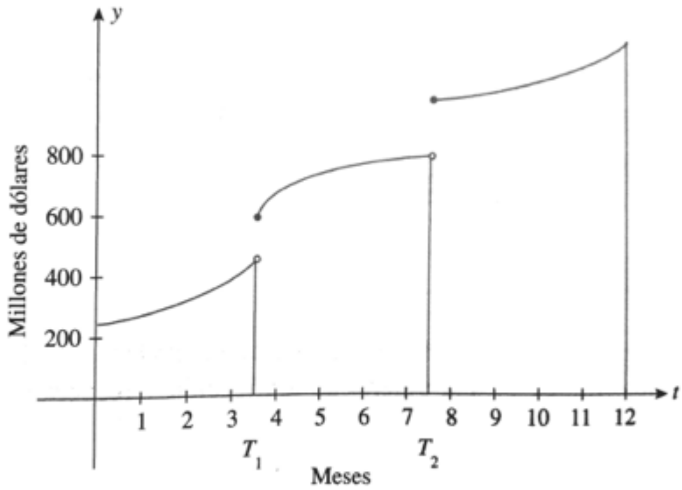
14. En un parqueadero cerca de la Universidad EAN, se cobran \$3.000 pesos por la primera hora o fracción y \$2.000 pesos por cada hora o fracción adicional, hasta un máximo diario de \$10.000.

a. Dibuje el costo de estacionar un automóvil en ese lote, como función del tiempo en que permanezca allí.

b. Analice las discontinuidades de esta función y su significado para alguien que estacione su automóvil en el parqueadero.

15. La compañía de ahorro y préstamos Franklin adquirió dos instituciones financieras con problemas en 1992, una en el instante $t = T_1$ y la otra en el instante $t = T_2$ ($t = 0$ corresponde al inicio de 1992). La siguiente figura muestra la cantidad total de dinero depositada con Franklin. Explique el significado de las discontinuidades de la función en T_1 y T_2.

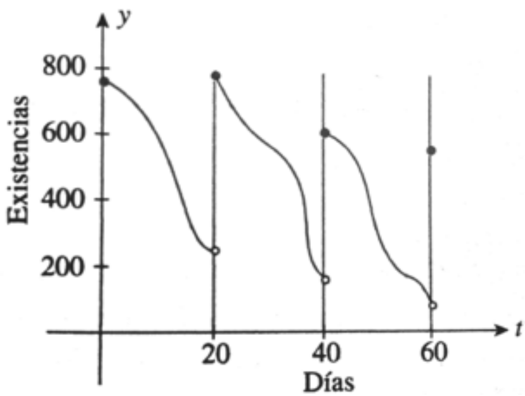
Figura 8. Dinero depositado en la compañía de ahorro y préstamos Franklin



Fuente. Tang Tan, 2005, p. 525.

16. Como parte de una política de inventarios óptimos, el gerente de una compañía proveedora de oficinas ordena 500 resmas de papel para fotocopias cada 20 días. La figura que se muestra a continuación indica el nivel de inventario real de papel para fotocopias, en una tienda proveedora de oficinas durante los primeros 60 días hábiles de 2012. Determine los valores de t para los cuales la "función de inventario" es discontinua e interprete la gráfica.

Figura 9. Nivel de inventario real de papel



Fuente. Tang Tan, 2005, p. 525.

17. La función que proporciona el costo de cierto artículo se define como:

$$C(x) = \begin{cases} 5x \ si \ \ 0 < x < 10 \\ 4x \ \ si \ \ 10 \leq x < 30 \\ 3.5x \ si \ \ 30 \leq x < 60 \\ 3.25x \qquad si \ \ x \geq 60 \end{cases}$$

Donde x es el número de libras vendidas del artículo y C(x) se mide en dólares. Trace la gráfica de C y determine los valores de x para los que C es discontinua.

Derivadas-reglas de diferenciación

18. En los siguientes ejercicios encuentre $\frac{dy}{dx}$

a. $y = \sqrt{5}$

b. $y = 3x^4 - 2x^3 + 5x - 3$

c. $y = 2x + 3$

d. $y = (x - 4)(x^2 + 2x - 3)$

e. $y = 4x^{-3} + 3x^{-2} - 5x^{-1} + 3$

f. $y = x(4x + 2)$

g. $y = (2x + 3)^2$

h. $y = 2\sqrt[3]{x} + 4x - 8$

i. $y = x^{\frac{2}{3}} + 4x^{-\frac{3}{4}} - x^{-\frac{1}{5}}$

j. $y = x^{-4} + 2x^{-3} - 5x^{-2} + 3x^2 - 1$

k. $y = \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^{-3}} + \frac{5}{2x^{-2}} + x$

l. $y = x^2\left(5x + \frac{1}{x^3}\right)$

m. $y = \frac{x^5 - 3x^4 + 2x^{-3} + 5x^{-2} + 3}{3x^2}$

n. $y = \sqrt[4]{x^5} + \sqrt[5]{x^2} + \frac{3}{\sqrt[6]{x^5}} - \frac{3}{2x^{\frac{1}{5}}}$

o. $y = 3x^{\frac{2}{3}} + 3x^2 - 3x^{-2} + \sqrt[4]{x}$

19. Evalúe la derivada en los puntos indicados

a. $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5\,;\, f'(-1), f'(0), f'\left(\frac{1}{2}\right)$

b. $g(t) = \sqrt{t} - t^2 - t + 1\,;\, g'(1), g'(4), g'\left(\frac{9}{4}\right)$

c. $h(x) = x^{-2} + \frac{1}{x}\,;\, h'(-2), h'(5), h'(1)$

20. Sean f y g dos funciones diferenciables en x =3 tal que $f(3)$ =2, $f'(3)$ = -1, g(3) = - 4 y g´(3) = 5. Encuentre h´(3) si:

a. $h(x) = f(x) + 3g(x)$

b. $h(x) = f(x)g(x)$

c. $h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$

d. $h(x) = (x^3 + 1)f(x)$

21. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto indicado. Con la ayuda del Winplot, grafique en un mismo plano la curva y la recta tangente en el punto dado.

a. $y = x^2 - 4x + 5$ en $x = 3$

b. $y = x^4 - 2x^2$ en $x = -1$

c. $y = \frac{1}{x^2} + 5$ en $x = 1$

22. En los siguientes ejercicios encuentre $\frac{dy}{dx}$

a. $y = \frac{2x+5}{4x-8}$

b. $y = x^3 + \frac{x^2-1}{5x+3}$

c. $y = (x^3 - 3x^2 + 5)(x^2 + 5x - 6)$

d. $y = (x^2 + 2x - 8)\left(\frac{4-x^3}{x+9}\right)$

e. $y = (x + 6)(2x + 3)(x^2 + 5x - 8)$

f. $y = \left(3 + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)\left(x - \frac{1}{x^{\frac{1}{5}}}\right)$

g. $y = \frac{x^3-2x+8}{6x^2-2x+3}$

h. $y = \frac{x^2}{x^4+1}$

i. $y = (x^3 + x^2 - x)(x^{-3} - x^{-2} + 5)$

j. $y = \frac{4}{x^2+3x-1}$

k. $h(x) = f(x) + 3g(x)$

l. $h(x) = f(x)g(x)$

m. $h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$

n. $h(x) = (x^3 + 1)f(x)$

Anexo 5

Facultad de Administración y Economía

Matemáticas I

Guía 4

Temas:

- Regla de la cadena.
- Derivación logarítmica.
- Derivación exponencial.
- Derivación implícita.
- Problemas de elasticidad.

Competencia general

Conoce, maneja y aplica adecuadamente los conceptos, métodos y procedimientos del Cálculo diferencial en una y varias variables y los aplica adecuadamente a situaciones de su entorno, en especial en la empresa.

Competencias específicas

Tabla 9. Descripción de competencia, logros e indicadores

Competencia	Logros	Indicadores de logros
Comunicativa: maneja adecuadamente el lenguaje matemático.	Utilizar el lenguaje matemático, notaciones y estructuras para representar ideas, describir relaciones y modelar situaciones.	Reconoce símbolos matemáticos y los usa adecuadamente.
Cognitiva: desarrollo de estructuras conceptuales (elasticidad) del curso de Matemáticas para Administración.	Aplica el concepto de elasticidad en diferentes contextos.	Resuelve, comprueba e interpreta problemas.
Disciplinar: comprende los conceptos de regla de la cadena, derivación implícita y elasticidad.	Identifica los diferentes tipos de formas de derivación, ya sea implícita, exponencial o logarítmica y las aplica dentro de un contexto.	. Resuelve asertivamente ejercicios que impliquen derivadas de funciones exponenciales o logarítmicas. . Resuelve problemas de aplicación que impliquen elasticidad.
Tecnológica: Utiliza de forma correcta el programa Derive para hallar la derivada de funciones.	Comprende los conceptos de regla de la cadena, derivada logarítmica y exponencial.	Resuelve problemas que impliquen derivadas, usando la regla de la cadena, logarítmica o exponencial.
Socio-humanística: X	Desarrolla trabajos en grupo y se desempeña como constructor y facilitador de metas colectivas.	. Respeta la opinión y el trabajo de los demás. . Es un líder positivo frente al grupo.

Empresarial e investigativa: reconoce la importancia de la aplicación de la elasticidad en la solución de problemas económicos dentro de un contexto dado.	Pregunta, indaga y consulta diferentes fuentes, con el fin de incrementar su espíritu investigativo.	. Construye situaciones donde intervenga el concepto de elasticidad, para modelar una situación problema dentro de un contexto económico. . Relaciona las demás áreas del conocimiento con las matemáticas.

Fuente. Elaborado por los autores.

Ejercicios

1. Calcule las derivadas de las funciones siguientes con respecto a la variable independiente respectiva:

a. $y = (3x+5)^7$

b. $u = (2x^2+1)^{\frac{3}{2}}$

c. $F(x)\sqrt[3]{x^3+3x}$

d. $y = (t+\frac{1}{t})^{10}$

e. $y = \frac{1}{\sqrt{u^2+9}}$

f. $y = x^2\sqrt{x^3+a^3}$

g. $y = (\frac{t}{t+1})^6$

h. $y = \sqrt{\frac{3x+7}{5+2x}}$

i. $x = \frac{z^2+1}{z^2-1}$

j. $z = \frac{\sqrt{2x+1}}{x+2}$

2. En los siguientes ejercicios, halle la ecuación de la recta que es tangente al gráfico de fpara el valor dado en x.

a. $f(x) = (3x^2+1)^2 : x = -1$

b. $f(x) = (x^2 - 3)^5(2x-1)^3; x = 2$

c. $f(x) = \frac{1}{(2x-1)^6}; x = 1$

d. $f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 ; x = 3$

Derivadas logarítmicas y exponenciales

3. Diferencie las funciones en los siguientes ejercicios. Si considera adecuado, utilice primero las propiedades de los logaritmos para simplificar la función dada.

a. $y = 4\ln x$

b. $y = \ln(3x - 7)$

c. $y = lnx^2$

d. $y = \ln(1 - x^2)$

e. $f(X) = \ln(4X^6 + 2X^3)$

f. $f(t) = t\ln t$

g. $y = x^2 \ln x$

h. $y = x^3 \ln(2x + 5)$

i. $y = log_3 - (8x - 1)$

j. $y = x^2 + log_2(x^2 + 4)$

k. $f(z) = \frac{\ln z}{z}$

l. $y = 9\ln\sqrt{1 + x^2}$

m. $f(l) = \ln\left(\frac{1+l}{1-l}\right)$

n. $y = \ln\sqrt[4]{\frac{1+x^2}{1-x^2}}$

o. $y = ln[(x^2 + 2)^2(x^3 + x - 1)]$

p. $y = 13\ln(x^2\sqrt[3]{5x + 2})$

q. $y = (x^2 + 1)\ln(2x + 1)$

r. $y = lnx^3 + ln^3x$

s. $y = ln^4(ax)$

4. Utilizando la herramienta Derive, calcule $\frac{dy}{dx}$ para cada una de las siguientes funciones:

a. $y = (lnx)^5$

b. $y = \frac{1}{lnx}$

c. $y = 1/\sqrt{\ln x}$

d. $y = x \ln x^2$

e. $y = x^2 \ln(x^2 + 1)$

f. $y = e^x \ln x$

g. $y = \ln(3^{x^2})$

h. $y = ln\left[\frac{\sqrt{x+1}}{x^2+4}\right]$

5. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva

$$y = \ln (x^2 - 3x - 3) \text{ en } x = 4$$

6. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva

$$y = e \quad \text{en} \quad x = -2$$

Diferenciación implícita

7. En los siguientes problemas, encuentre $\frac{dy}{dx}$ mediante diferenciación implícita.

a. $x^2 + 4y^2 = 4$

b. $2y^3 - 7x^2 = 5$

c. $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 3$

d. $x^{3/4} + y^{3/4} = 5$

e. $xy = 4$

f. $xy - y - 11x = 5$

g. $2x^3 + y^3 - 12xy = 0$

h. $x = \sqrt{y} + \sqrt[4]{y}$

i. $5x^3y^4 - x + y^2 = 25$

j. Si $x + xy + y^2 = 7$, encuentre dy/dx en (1,2).

8. Encuentre la pendiente de la curva $4x^2 + 9y^2 = 1$ en el punto (0 , 1/3); en el punto (x_0 , y_0).

9. Encuentre la pendiente de la curva $(x^2 y^2)^2 = 4y^2$ en el punto (0 , 2).

10. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva de

$x^3 + xy + y^2 = -1$, en el punto (-1 , 1).

11. Calcule la elasticidad de la demanda para las relaciones de demanda siguientes:

a. $x = \frac{k}{p^n}$ (k, n constantes)

b. $x = 100(5 - p)$

c. $x = 50(4 - \sqrt{p})$

d. $x = 200\sqrt{9 - p}$

12. Si la relación de demanda es $x = 400 - 100p$, determine la elasticidad de la demanda cuando:

a. $p = 1$
b. $p = 2$
c. $p = 3$

13. La relación de demanda para un producto es $x = 250 - 30p + p^2$, donde x unidades pueden venderse a un precio de p cada una. Determine la elasticidad de la demanda cuando $p = 12$. Si el precio de p es incrementado un 8,5%, encuentre el cambio porcentual aproximado en la demanda.

14. Para la relación de demanda $p = 250 - 0.5x$ verifique que la demanda de x es elástica y el ingreso total es una función creciente de x si $0 < x < 250$. También pruebe que la demanda es inelástica y el ingreso total es decreciente si $250 < x < 500$.

15. Se deposita dinero en un banco que ofrece interés a un tipo anual del 6 por 100 compuesto continuamente. Halle la razón porcentual de cambio de saldo con respecto al tiempo.

16. Una cierta maquinaria industrial se deprecia hasta que su valor pasados t años es de $Q(t) = 20000e^{-0,4t}$ dólares.

a. ¿A qué ritmo se está depreciando la maquinaria después de 5 años?
b. ¿A qué razón porcentual está cambiando el valor de la maquinaria después de t años?
c. ¿depende esta razón porcentual de t o es constante?

17. Demuestre que si una cantidad decrece exponencialmente, su ritmo de decrecimiento es proporcional a su tamaño.

18. Demuestre que si una cantidad decrece exponencialmente, su razón porcentual de cambio es constante.

19. De acuerdo con un modelo logístico basado en el supuesto de que la tierra no puede soportar más de cuarenta mil millones de personas, la población del mundo (en miles de millones) t años después de 1960 será aproximadamente de: $p(t) = \frac{40}{1+12e^{-0,08t}}$

a. Si este modelo es correcto, ¿a qué ritmo estará creciendo la población mundial en 1985?

b. Si este modelo es correcto, ¿a qué razón porcentual estará creciendo la población mundial en 1985?

20. El editor de matemáticas de una importante editorial estima que si se distribuyen x unidades gratuitas a los profesores, las ventas de primer año de un cierto texto serán de $f(x) = 20 - 15e^{-0,2x}$ miles de ejemplares. Actualmente, el editor planea distribuir 10.000 ejemplares gratuitos.

a. Use el análisis marginal para estimar el aumento en las ventas del primer año, que resultarán si son distribuidos 1.000 ejemplares gratuitos adicionales.

b. Calcule el crecimiento real en las ventas del primer año que resultará de la distribución de los 1.000 ejemplares gratuitos adicionales. ¿Es buena la estimación del punto (a)?

21. El gasto de consumo de un cierto artículo es de $D(p) = 3000e^{-0,01p}$ unidades por mes, cuando el precio de mercado es de p dólares por unidad. Exprese el gasto total mensual de los consumidores en el artículo en función de p, determine el precio de mercado que generará el mayor gasto de consumo.

22. Un fabricante puede producir radios a un coste de 5 dólares por unidad y estima que si se venden por x dólares cada uno, los consumidores comprarán aproximadamente $1000e^{-0,1x}$ radios por semana. ¿A qué precio debería vender el fabricante los radios para maximizar el beneficio?

Anexo 6

Facultad de Administración y Economía

Matemáticas I

Guía 5

Temas:

- Análisis marginal.
- Optimización en una variable.

Competencia general

Conoce, maneja y aplica adecuadamente los conceptos, métodos y procedimientos del cálculo diferencial en una y varias variables, para emplearlos en situaciones de su entorno en especial, en el ámbito de la empresa.

Competencias específicas

Tabla 10. Descripción de competencia, logros e indicadores

Competencia	Logros	Indicadores de logros
Comunicativa: maneja adecuadamente el lenguaje matemático.	Utiliza el lenguaje matemático, notaciones y estructuras para representar ideas, describir relaciones y modelar situaciones.	. Reconoce símbolos matemáticos y los usa adecuadamente. . Interpreta de forma correcta la notación utilizada para modelos económicos y el análisis marginal.
Cognitiva: desarrolla estructuras conceptuales (razones de cambio, marginalidad y optimización) del curso de Matemáticas I.	Comprende y aplica el concepto de la derivada, dentro de un contexto económico.	. Interpreta de forma correcta el análisis marginal. . Explica el concepto de punto crítico, dentro de un problema de optimización.
Disciplinar: comprende los criterios de primera y segunda derivada en la obtención y clasificación de puntos críticos.	. Interpreta la derivada como una razón de cambio. . Aplica el criterio de la primera derivada para encontrar puntos críticos. . Utiliza el criterio de la segunda derivada para clasificar puntos críticos.	. Diferencia entre cambio real y estimación al cambio real. . Plantea y soluciona problemas (razones de cambio, optimización) que requieren el uso de las derivadas. . Utiliza el Álgebra como herramienta para encontrar puntos críticos. . Diferencia los criterios de primera y segunda derivada en funciones de una variable.

Tecnológica: . Utiliza de forma correcta la calculadora científica para realizar ecuaciones que involucran decimales. . Emplea el Winplot para graficar funciones de costos, ingresos y utilidades.	. Establece relaciones entre las gráficas de funciones de costo, ingreso y utilidad con las marginales. . Grafica funciones que se encuentran dentro de un contexto aplicativo para visualizar puntos críticos e interpretarlos.	. Utiliza el cálculo para encontrar y clasificar puntos críticos. . Emplea la gráfica de la función para interpretar razones de cambio.
Socio-humanísticas: X	Participa en actividades de aprendizaje colaborativo como constructor y facilitador de metas colectivas.	. Respeta la opinión y el trabajo de los demás. . Es un líder positivo frente al grupo.
Empresarial e investigativa: reconoce la importancia de la aplicación de la derivada a la solución de problemas en un contexto dado.	. Consultar en diferentes fuentes sobre la temática asignada, con el fin de incrementar su espíritu investigativo. . Interpreta los conceptos de matemáticas desde un punto de vista económico.	. Interpreta de forma correcta el concepto de marginalidad. . Resuelve modelos que involucran optimizar. . Construye funciones para modelar una situación problema dentro de un contexto. . Relaciona las demás áreas del conocimiento con las matemáticas. . Analiza y resuelve modelos matemáticos sencillos, aplicados en la solución de problemas y relacionados con la administración y la economía.

Fuente. Elaborado por los autores.

Razones de cambio y análisis marginal

1. Dada la función de ingreso $R(x) = 10x - 0.01x^2$ determine:

a. El ingreso cuando x=20
b. Determine el cambio en el ingreso cuando se vende una unidad más.
c. Aplique el análisis marginal para estimar el cambio en el ingreso y compare su respuesta con el literal (b).

2. Si la función de costo total para un fabricante está dada por

$$C(q) = \frac{5q^2}{\sqrt{q^2+3}} + 500$$

Encuentre el costo marginal.

3. Si la ecuación de la demanda del producto de un fabricante es

$$p = \frac{1000}{q+5}$$

Donde p está en dólares, encuentre la función de ingreso marginal, evalúela cuando q = 45 e interprete el resultado.

4. Un fabricante determinó que para su producto el costo promedio diario (en cientos de dólares) está dado por

$$\bar{C}(x) = \frac{324}{\sqrt{q^2+35}} + \frac{5}{q} + \frac{19}{18}$$

Determine el costo marginal del fabricante cuando se producen 17 unidades por día e interprete el resultado.

5. Si la ecuación de demanda es $\sqrt{x} + p = 10,$ calcule el ingreso marginal.

6. Para la función de costo $c = 0.3q^2 + 3.5q + 9$ ¿qué tan rápido cambia c con respecto a q cuando $q = 100$?

7. Si la ecuación de demanda es $x + 4p = 100$, calcule el ingreso marginal, $R'(x)$.

8. El costo (en dólares) de producir x unidades de cierto artículo es $C(x) = 5000 + 10x + 0.05x^2$. Halle la razón de cambio instantánea de C con respecto a x , cuando $x = 100$ e interprete el resultado.

9. La ventas anuales al menudeo en Estados Unidos, de 1990 a 2000 (en millones de dólares) se aproxima mediante la función

$$S(t) = 1.9152t^2 + 18.7176t + 473.8 \qquad 0 \leq t \leq 11$$

Donde t se mide en años y $t = 0$ corresponde a 1990.

a. Con la ayuda del Winplot, trace la gráfica de S.
b. ¿En cuánto ascendieron las ventas al menudeo en Estados Unidos en 1990 ($t = 9$).
c. Aproximadamente, ¿con qué rapidez cambiarán las ventas al menudeo en 1999 ($t = 9$).

10. El costo total C(x) en dólares de producción, de x tablas de surf por día en la compañía Aloha está dado por

$$C(x) = -10x^2 + 300x + 130 \qquad 0 \leq x \leq 15$$

a. Determine $C'(x)$
b. ¿Cuál es la razón de cambio del costo total, cuando el nivel de producción es de 10 tablas por día?
c. ¿Cuál es el costo promedio de producción de diez tablas por día?

11. La función de costo de una fábrica de calcetas es estimada mediante la función $c = -10484.69 + 6.750q - 0.000328q^2$, donde q es la producción en docenas de pares y c el costo en dólares. Encuentre la función de costo marginal y la función de costo promedio, y evalúela cada una cuando q = 2.000.

12. Las ganancias trimestrales de la compañía de bienes raíces Cunningham (en miles de dólares) están dadas por

$$P(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 7x + 30 \qquad 0 \leq x \leq 50$$

Donde x (en miles de dólares) es la cantidad de dinero que Cunningham gasta en publicidad por trimestre.

a. Determine $P'(x)$
b. ¿Cuál es la razón de cambio de las ganancias trimestrales de Cunningham si la cantidad que gasta en publicidad es de $10.000 por trimestre (t = 10)?
c. ¿Y si gasta $30.000 por trimestre (x = 30)?

13. El Producto Interno Bruto (PIB) proyectado para cierto país es

$$N(t) = t^2 + 2t + 50 \qquad 0 \leq t \leq 5$$

Miles de millones de dólares dentro t años. ¿Cuál será la razón de cambio de ese PIB dentro de dos y cuatro años?

14. La gerencia de la compañía Thermo-Master, cuya filial en México fabrica un termómetro para interiores y exteriores, ha estimado que el costo semanal total en dólares por la producción de x termómetros es

$$C(x) = 5000 + 2x$$

a. Halle la función de costo promedio $\bar{C}$.
b. Halle la función de costo promedio marginal $\bar{C}'$.
c. Interprete los resultados.

15. LynbrookWest, un complejo de departamentos, tiene 100 unidades de dos recámaras. La ganancia mensual (en dólares) obtenida por la renta de x departamentos es

$$P(x) = -10x^2 + 1760x - 50000$$

a. ¿Cuál es la ganancia real obtenida por la renta del departamento 51, suponiendo que ya han rentado 50?
b. Calcule la ganancia marginal cuando x = 50 y compare los resultados con los obtenidos en la parte (a).

16. La gerencia de la compañía Acrosonic planea comercializar el Electro-Start, un sistema de sonido electrostático. El departamento de mercadotecnia ha determinado que la demanda de estos sistemas es

$$p = -0.04x + 800 \qquad 0 \leq x \leq 20000$$

Donde p denota el precio unitario del sistema (en dólares) y x la cantidad demandada.

a. Determine la función de ingreso R.
b. Determine la función de ingreso marginal R´.
c. Calcule R´(5000) e interprete el resultado.

17. La corporación Pulsar también fabrica una serie de televisores a color de 19 pulgadas. La cantidad x de televisores demandados cada semana, se relaciona con el precio unitario al mayoreo p mediante la ecuación

$$p = -0.006x + 180$$

El costo total semanal de producción de x televisores es (en dólares)

$$C(x) = 0.000002x^2 - 0.02x^2 + 120x + 60000$$

a. Halle la función de ingreso R y la función de ganancia P.
b. Halle las funciones: ingreso marginal, costo marginal y ganancia marginal.
c. Encuentre C´(2000),I´(2000) y P´(2000) e interprete los resultados.
d. Con la ayuda del Winplot, trace las gráficas de las funciones C, I y P e interprete (b) y (c) mediante estas gráficas.

18. La cantidad de relojes de pulso Sicard demandados por mes, se relaciona con el precio unitario mediante la ecuación

$$p = \frac{50}{0.01x^2 + 1} \qquad 0 \leq x \leq 20$$

Donde p se mide en dólares y x en unidades de millar.

a. ¿Cuál es la función de ingreso R?
b. Halle la función de ingreso marginal R´.
c. Calcule R´(2) e interprete el resultado.

19. Calcule el ingreso marginal para las relaciones de demanda siguientes.

a. $p = 5 - e^{0,1\,x}$

b. $p = 4 + e^{-0,1\,x}$

c. $x = 1000(2 - e^{p})$

d. $x = 100\ln{(16 - p^2)}$

20. Calcule el costo marginal y el costo promedio marginal para las funciones de costo siguientes.

a. $C(x) = 100 + x + e^{-0,5x}$

b. $C(x) = \sqrt{25 + x + \ln(x + 1)}$

21. Para la función de costo $c = 0.4q^2 + 4q + 5$ encuentre la razón de cambio con respecto a q cuando q = 2.

Además, ¿qué valor tiene $\frac{\Delta c}{\Delta q}$ en el intervalo [2,3].

Optimización en una variable

22. Una compañía alquila buses modernos de 50 puestos a grupos de 35 o más personas. Si un grupo tiene exactamente 35 personas, cada una paga US $60. En grupos mayores, la tarifa de todos se reduce en un dólar por cada persona que sobrepase las 35. Determine el tamaño del grupo para el cual los ingresos de la compañía serán mayores.

23. En una fábrica el costo diario de producir x sillas, está dado por C(x) = 50.000 + 40.000x pesos. La función de demanda es p+ 100x = 80.000 pesos. Cuántas sillas deben producirse diariamente para:

a. Maximizar la utilidad.
b. ¿Cuál es su utilidad?
c. Maximizar el ingreso.

24. Gastos de un automóvil: el costo por hora (en dólares) de operar un automóvil está dado por $C(x) = 0.12x - 0.0012x^2 + 0.08$, $0 \leq x \leq 60$, donde x es la velocidad en millas por hora. ¿A qué velocidad es el costo mínimo por hora?

25. El costo promedio de fabricar cierto artículo es

$$\bar{C}(x) = 5 + \frac{48}{x} + 3x^3$$

en donde x es el número de artículos producidos. Encuentre el valor mínimo de $\bar{C}(x)$.

26. El costo de la producción anual de un artículo es

$$C(x) = 5000 + \frac{80.000.000}{x} + \frac{x}{20}$$

en donde x es el tamaño promedio del lote por serie de producción. Encuentre el valor de x que hace mínimo a C(x).

27. El costo de producir x artículos de cierto producto es

$$C(x) = 4000 + 3x + 10^{-2} x^2 \text{ (dólares)}$$

Determine el valor de x que hace del costo promedio por artículo, un mínimo.

28. La función de costo para una empresa, está dada por

$$C(x) = 300x - 10x^2 + \frac{x^3}{3}$$

Calcule la producción x en la cual:

a. El costo marginal es mínimo.
b. El costo promedio es mínimo.

29. Una empresa produce mensualmente x toneladas de un metal precioso con un costo total C dado por

$$C(x) = 10 + 75x - 5x^2 + \frac{x^3}{3} \text{ dólares}$$

Encuentre el nivel de producción x donde el costo marginal alcanza su mínimo.

30. La función de demanda para cierto bien está dado por $p = 15e^{-x/3}$ para $0 \leq x \leq 8$, donde p es el precio por unidad y x el número de unidades pedidas. Determine el precio p y la cantidad x para los cuales el ingreso es máximo.

31. La función de demanda para cierto bien está dado por $p=10e^{-x2/32}$ para $0 \leq x \leq 6$, donde p es el precio por unidad y x el número de unidades pedidas. Determine el precio p y la cantidad x para los cuales el ingreso es máximo.

32. Una empresa vende todas las unidades que produce a $4 cada una. El costo total de la empresa C por producir x unidades está dado en dólares por $C(x) = 50 + 1.3x + 0.001x^2$.

a. Escriba le expresión para la utilidad total U como una función de x.
b. Determine el volumen de producción x de modo que la utilidad U sea máxima.
c. ¿Cuál es el valor de la utilidad máxima?

33. Una compañía advierte que puede vender toda la existencia de cierto producto que elabora a un precio de $2 por unidad. Se estima la función de costo del producto, como $1.000 + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{50}\right)^2$ dólares por x unidades producidas.

a. Encuentre una expresión para la utilidad total, si se producen y se vende x unidades.
b. Determine el número de unidades producidas que maximizan la utilidad.
c. ¿Cuál sería la utilidad si se produjeran 6.000 unidades?

34. Para cierto artículo, la ecuación de demanda es $p = 5 - 0.001x$. ¿Qué valor de x maximiza el ingreso?

Si la función de costo es $C(x) = 2800 + x$, encuentre el valor de x que maximiza la utilidad. Calcule la utilidad máxima.

35. La función de costo de un fabricante es $C(x) = 1.000 + 5x + 0.1x^2$ cuando se producen x artículos por día. Si máximo 80 artículos pueden producirse por día, determine el valor de x que da el costo promedio más bajo por artículo.

36. El costo de producir x artículos por semana es $C(x) = 1000 + 6x - 0.003x^2 + 10^{-6}x^3$, pero no más de 3.000 pueden producirse en ese periodo. Si la ecuación de demanda es $p = 12 - 0.0015x$, encuentre el nivel de producción que maximiza el ingreso y el nivel que maximiza la utilidad.

37. La función de costo en dólares es $C(x) = 2 + x - 1/4x^2 + 1/24x^3$ en donde el nivel de producción x está en miles de unidades por semana. La planta productiva disponible limita a x al rango $0 \leq x \leq 4$. Si cada artículo producido puede venderse en \$2.50, determine el nivel de producción que maximiza:

a. El ingreso.
b. La utilidad.
c. ¿Cómo cambia sus conclusiones si la planta se incrementó a $x = 8$ con la misma función de costo?

38. La empresa de telefonía tiene actualmente 100.000 suscriptores que pagan una cuota mensual de US \$40. Una encuesta reveló que se tendrían 1.000 suscriptores más por cada \$0.25 de disminución en la cuota. ¿Para qué cuota se obtendrá el ingreso máximo y cuántos suscriptores se tendrían con dicha cuota?

39. La gerencia de Trappee and Sons, Inc., productores de la famosa salsa picante Texa-Pep, estiman que sus ganancias por la producción y venta diaria de x cajas (cada caja contiene 24 botellas) de la salsa picante están dadas por (en dólares)

$$P(x) = -0.000002x^3 + 6x - 400$$

¿Cuál es la máxima ganancia posible de Trappee en un día?

40. La cantidad mensual demandada del disco de Walter Serkin con la *Sonata Claro de Luna* de Beethoven, producida por Phonola, se relaciona con el precio del disco. La ecuación

$$p = -0.00042x + 6 \qquad 0 \leq x \leq 12000$$

Relaciona la demanda con el precio donde p denota el precio unitario en dólares y x es el número de discos demandados. El costo total mensual por la impresión y empacado de x copias de este disco clásico está dado por

$$c(x) = 600 + 2x - 0.00002x^2 \qquad 0 \leq x \leq 20000$$

Dólares. ¿Cuántas copias mensuales debe producir Phonola para maximizar sus ganancias?

41. Se ha estimado que la producción total de petróleo de cierto pozo petrolero está dada por

$$T(t) = -1.000\ (t + 10)\ e^{-0.1t} + 1.0000$$

Miles de barriles, t días después de iniciar la producción. ¿En qué año el pozo estará produciendo a su máxima capacidad?

42. Se tiene un presupuesto de $48.000 para construir una caja abierta, con base cuadrada. Los lados de la caja cuestan $3.000 por metro cuadrado y la base cuesta $4.000 por metro cuadrado. ¿Qué dimensiones debe tener para que el volumen sea máximo?

Anexo 7

Facultad de Administración y Economía

Matemáticas I

Guía 6

Temas:

- Funciones en varias variables.
- Curvas de nivel.
- Derivadas parciales.
- Regla de la cadena en varias variables.

Competencia general

Conoce, maneja y aplica adecuadamente los conceptos, métodos y procedimientos del Cálculo diferencial en una y varias variables y los aplica adecuadamente a situaciones de su entorno, en especial en la empresa.

Competencias específicas

Tabla 6. Descripción de competencia, logros e indicadores

Competencia	Logros	Indicadores de logros
Comunicativa: maneja adecuadamente el lenguaje matemático.	Utiliza el lenguaje matemático, notaciones y estructuras para representar ideas, describir relaciones y modelar situaciones.	Reconoce símbolos matemáticos y los usa adecuadamente.
Cognitivas: desarrolla estructuras conceptuales (funciones en varias variables) del curso de Matemáticas I de Administración y Economía.	Aplica el concepto de función en varias variables y lo relaciona con una sola variable, en diferentes contextos económicos.	. Analiza situaciones para hallar propiedades y estructuras comunes. . Resuelve, comprueba e interpreta problemas.
Disciplinar: comprende el concepto de curva de nivel y lo aplica en la solución de ejercicios de aplicación.	. Identifica la diferencia entre función de una sola variable, con el de dos a mas variables y halla sus respectivos dominios. . Aplica de manera correcta la regla de la cadena, en la solución de ejercicios de aplicación.	Encuentra el dominio de una función de varias variables.
Tecnológica: utiliza de forma correcta el graficador Winplot y Derive para analizar curvas de nivel.	Comprende los conceptos curvas de nivel y derivadas parciales.	Grafica en el plano curvas de nivel.
Socio-humanística: X	Desarrolla trabajos en grupo y se desempeña como constructor y facilitador de metas colectivas.	. Respeta la opinión y el trabajo de los demás. . Es un líder positivo frente al grupo.

Empresarial e investigativa: Reconoce la importancia de la aplicación de las funciones en varias variables, con sus curvas de nivel, a la solución de problemas económicos en un contexto dado.	. Pregunta, indaga y consulta en diferentes fuentes, con el fin de incrementar su espíritu investigativo. . Interpreta los conceptos de matemáticas desde un punto de vista económico.	. Interpreta gráficas de funciones con sus respectivas curvas de nivel. . Construye funciones para modelar una situación problema dentro de un contexto. . Analiza y resuelve modelos matemáticos sencillos, aplicados en la solución de problemas relacionados con la Administración y la Economía.

Fuente. Elaborado por los autores.

Ejercicios

Funciones en varias variables

1. Determine el dominio de las siguientes funciones:

a. $f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2$

b. $f(x,y) = \frac{x^2}{y^2-1}$

c. $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 9}$

d. $f(x,y) = \sqrt{1-(x+y)^2}$

e. $f(x,t) = \ln(x-t)$

f. $f(x,y) = e^{x-y}$

g. $f(x,y,z) = x + \sqrt{yz}$

h. $f(u,v,w) = \sqrt{e^{u+v+w} - 1}$

Curvas de Nivel

2. Bosqueje las curvas de nivel de cada una de las siguientes funciones que corresponden a los valores dados de z.

a. $z = 2x + 3y;\ z = 0, 1, 2, 3$

b. $z = 3x - y; z = 0\ , 1 - 2, 3$

c. $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}; z = 0, 1, 2, 3$

d. $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}; z = 0, 1, 2, 3$

e. $z = x^{2+}y^2; z = 1, 2\ , 3, 4$

f. $z = x^2 - y^2; z = 0, \pm 1, \pm 2$

3. En los siguientes problemas, halle una ecuación de la curva de nivel f= C, que pasa por el punto dado.

a. $f(x, y) = x^2 + 2x + y; (1{,}3)$

b. $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1; (2{,}0)$

c. $f(x, y) = \frac{e^u}{x};\ (e, 0)$

d. $f(x, y) = x \ln y; (\sqrt{2}\ , 1)$

Derivadas Parciales

4. En los siguientes problemas, se da una función de dos o más variables. Encuentre la derivada parcial de la función con respecto a cada una de las variables.

a. $f(x,y) = 4x^2 + 3y^2 - 7$

b. $f(x,y) = 2y + 1$

c. $g(x,y) = 3x^4 + 2xy^2 - 5xy - 8x - 9y$

d. $g(p,q) = \sqrt{pq}$

e. $h(s,t) = \frac{s^2+4}{t-3}$

f. $u(q_1,q_2) = \frac{1}{2}\ln(q_1 + 2) + \frac{1}{3}\ln(q_2 + 5)$

g. $h(x,y) = \frac{x^2+3xyy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$

h. $z = 5xln(x^2 + y)$

5. Utilizando el Derive, evalúe las derivadas parciales dadas en el punto indicado.

a. $f(x,y) = x^3y + 7x^2y^2;\ f_x(1,-2)$

b. $z = \sqrt{2x^3 + 5xy + 2y^2};\ \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{\substack{x = 0 \\ y = 1}}$

c. $g(x,y,z) = e^x\sqrt{y + 2z};\ g_z(0,6,4)$

d. $h(r,s,t,u) = (s^2 + tu)\ln(2r + 7st);\ h_s(1,0,0,1)$

6. Para las funciones de costos conjuntos de los siguientes problemas, encuentre el costo marginal indicado al nivel de producción dado.

a. $c = 7x + 0{,}3y^2 + 2y + 900;\ \frac{\partial c}{\partial y}, x = 20, y = 30$

b. $c = 0{,}03(x + y)^3 - 0{,}6(x + y)^2 + 9{,}5x(x + y) + 7700;\ \frac{\partial c}{\partial y}, x = 50, y = 80$

7. Para la función de producción del siguiente problema, encuentre la función de producción: $\frac{\partial p}{\partial k}$ y $\frac{\partial p}{\partial l}$

$$p = 2.314 l^{0,357}\, k^{0,643}$$

8. En economía se dice que dos artículos son **artículos sustitutos** si la demanda Q_1 del primero crece cuando el precio P_2 del segundo crece, y si la demanda Q_2 del segundo crece cuando el precio P_1 del primero crece.

a. Dé un ejemplo de un par de artículos sustitutos.
b. Si dos artículos son sustitutos, ¿Qué debe suceder con las derivada parciales $\frac{\partial Q_1}{P_2}$ y $\frac{\partial Q_2}{P_1}$?
c. Suponga que las funciones de demanda de dos artículos son $Q_1 = 3000 + \frac{400}{p_1+3} + 50P_2$ y $Q_2 = 2000 - 100P_1 + \frac{500}{P_2+4}$.

¿Son artículos sustitutos?

9. Se dice que dos artículos son **artículos complementarios** si la demanda Q_1 del primero decrece cuando el precio P_2 del segundo crece, y si la demanda Q_2 del segundo decrece cuando el precio P_1 del primero crece.

a. Dé un ejemplo de un par de artículos complementarios.
b. Si dos artículos son complementarios, ¿Qué debe suceder con las derivada parciales $\frac{\partial Q_1}{P_2}$ y $\frac{\partial Q_2}{P_1}$?
c. Suponga que las funciones de demanda de dos artículos son $Q_1 = 2000 + \frac{400}{p_1+3} - 50P_2$ y $Q_2 = 2000 - 100P_2 + \frac{500}{P_1+4}$.

¿Son artículos complementarios?

10. En los siguientes problemas, q_a y q_b son funciones de demanda para los productos A y B, respectivamente. En cada caso encuentre

$$\frac{\partial q_a}{\partial q_a}, \frac{\partial q_a}{\partial q_b}, \frac{\partial q_b}{\partial q_a}, \frac{\partial q_b}{\partial q_b}$$

y determine si A y B son competitivos, complementarios o ni uno ni otro.

a. $q_a = 1000 - 50p_A + 2p_B;\ q_B = 500 + 4p_A - 20P_B$

b. $q_a = 20 - p_B - 2p_B;\ q_B = 50 - 2p_B - 3P_B$

c. $q_a = \frac{100}{p_A\sqrt{p_B}};\ q_B = \frac{500}{p_B\sqrt[3]{p_A}}$

11. Las ecuaciones de demanda de A y B están dadas por

$$q_A = 10\sqrt{\frac{p_B}{p_A}}\ y\ q_B = 3\sqrt[3]{\frac{p_A}{p_B}}$$

Donde q_A y q_B son las cantidades demandadas de A y B, y p_A y p_B, son los precios correspondientes (en dólares) por unidad.

a. Encuentre los valores de las dos demandas marginales para el producto A cuando $p_A = 9$ y $p_B = 16$.

b. Si p_B se reduce de 14 a 16, con p_A fijo en 9, use el inciso(a) para estimar el cambio correspondiente en la demanda para el producto A.

12. Una empresa produce dos productos, X y Y. Las unidades de costos de mano de obra y de materiales son de \$5 en el caso de producto X y de \$12 por lo que respecta a Y. Además la empresa también tiene costos fijos de \$3.000 al mes. Exprese el costo mensual C (en dólares) como una función de unidades de X y Y producidas. ¿Cuál es el costo total de producir 200 unidades de X y 150 unidades de Y?

13. Electrónica de Occidente fabrica dos tipos de cinta de casetes: de 60 y 90 minutos. El costo por unidad de mano de obra para los dos tipos es de 30 C y de 40 C. Además, la empresa tiene costos fijos semanales de \$1.200.

a. Obtenga el costo semanal C (en dólares) como una función de las unidades de los dos tipos de cintas producidas.
b. Evalúe el costo total de producir 10.000 cintas de 60 minutos y 800 cintas de 90 minutos.
c. Si la compañía vende los dos tipos de cinta a 60 C y 75 C cada una respectivamente, obtenga la utilidad mensual como función del número de unidades producidas y vendidas por semana.

14. Calcule ∂z/∂x y ∂z/∂y para las siguientes funciones:

a. $z = 3e^{2x} - 5\ln y + 7$

b. $z = (2x + 3y)^7$

c. $z = \left(\frac{x}{y}\right) e^{xy}$

d. $z = \ln\left(e^x + xy^3\right)$

15. Utilice el derive para encontrar $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x}$ para cada una de las siguientes funciones:

a. $z = x^4 + y^4 + 3x^2y^3$

b. $z = xy + \ln(2x + 3y)$

c. $z = \frac{xy}{x-y}$

16. Una función de producción de la forma $P(L,K) = cL^a K^b$, en donde c, a y b son constantes positivas y a + b = 1, se denomina una función de producción cobb-douglass. Pruebe qué son con respecto a esta función de producción:

$$L\frac{\partial P}{L} + \frac{\partial P}{\partial K} = P$$

17. La función de demanda del producto A está dada por

$$Q = 327 + 0{,}2I + 0{,}5p_B - 2p^2_A$$

Donde Q es la cantidad demandada, I el ingreso personal disponible del consumidor y p_A y p_B son el precio unitario de A y el precio unitario del producto B , respectivamente.

a. Calcule el valor de la elasticidad de la demanda n_{pA} si $p_A = 3$, $p_B = 20$ e $I = 200$.
b. Determine la elasticidad cruzada de la demanda de n_{pB} de A si $p_A = 3$, $p_B = 20$ e $I = 200$.
d. Calcule la elasticidad de la demanda dada por el ingreso para A.

$$n_I = \frac{\frac{\partial Q}{\partial I}}{\frac{Q}{I}} = \frac{I}{Q}\frac{\partial Q}{\partial I}$$

Con $p_A = 3$, $p_B = 20$ e $I = 200$.

18. Repita el ejercicio anterior en el caso de un producto A , si la demanda esta dada por la fórmula $Q = 250 + 0{,}1I + 0{,}3p_B - 1{,}5p_A^2$.

19. Un fabricante puede producir máquinas de escribir eléctricas, a un coste de 80 dólares cada una y máquinas de escribir mecánicas a un coste de 20 dólares cada una.

a. Exprese el coste mensual de producción del fabricante, como una función del número de máquinas mecánicas producidas.
b. Calcule el coste total mensual si se producen 500 máquinas eléctricas y 800 mensuales.
c. El fabricante quiere aumentar la producción de máquinas de escribir eléctricas en 50 al mes sobre el nivel del punto (b). ¿Qué cambio debe hacerse en correspondencia en la producción mensual de las máquinas de escribir mecánicas para que el coste mensual total no cambie?

20. Usando X trabajadores expertos y, y inexpertos, un fabricante puede producir $Q(x,y) = 10x^2y$ unidades por día. Actualmente, hay 20 trabajadores expertos y 40 inexpertos.

a. ¿Cuántas unidades se están produciendo actualmente por día?
b. ¿En cuánto cambiará el nivel diario de producción, si se añade un trabajador experto a la fuerza de trabajo actual?
c. ¿En cuánto cambiará el nivel diario de producción, si se añade un trabajador inexperto a la fuerza de trabajo actual?
d. ¿En cuánto cambiará el nivel diario de producción, si se añade un trabajador experto y uno inexperto, a la fuerza de trabajo actual?

21. En cierta fábrica, la producción diaria es de $Q = 60K^{1/2} / L^{1/3}$ unidades, donde K representa el capital invertido medido en unidades de 1.000 y L el tamaño de la fuerza de trabajo medido en horas-trabajador. Suponga que el capital invertido actualmente es de 900.000 dólares y que se usan 1.000 horas-trabajador de mano de obra cada día. Use el análisis marginal para estimar el efecto sobre la producción diaria de una inversión adicional de capital de 1.000 unidades, si el tamaño de la fuerza de trabajo no cambia.

22. Un comerciante de bicicletas ha encontrado que si las bicicletas de 10 velocidades se venden a x dólares cada una y el precio de la gasolina es de 10 centavos por galón, se venderán cada mes $f(x,y) = 2000 - 10\sqrt{x} + 4(y+7)^{1/2}$ bicicletas aproximadamente. Actualmente, las bicicletas se venden a 121 dólares cada una y el precio de la gasolina es de 90 centavos por galón. Use el análisis marginal para estimar el efecto en la venta mensual de bicicletas, si el precio de la gasolina se aumenta a un dólar por galón mientras que el precio de las bicicletas permanece fijo.

23. Una casa de publicidad ha encontrado que en una ciudad, cada uno de sus vendedores venderá aproximadamente $\frac{r^2}{2000p} + \frac{s^2}{100} - s$ enciclopedias por mes, donde s representa el número total de vendedores, p´el precio de cada enciclopedia y r la cantidad de dinero gastado cada mes en publicidad local. Actualmente el editor utiliza 10 vendedores, gasta 6.000 dólares mensuales en publicidad local y vende las enciclopedias por 800 dólares cada una. El costo de producción de las enciclopedias es de 80 dólares por unidad, y cada vendedor gana 600 dólares por mes. Use el análisis marginal para estimar el cambio en el beneficio mensual total del editor, como resultado de contratar un vendedor más.

24. En la misma ciudad se venden dos marcas competidoras de segadoras de césped potentes. El precio de la primera marca es de x dólares por segadora, el precio de la segunda marca es de y dólares por segadora, y el ingreso medio per cápita de la comunidad es de z dólares por año. La demanda local de la primera marca de segadoras viene dada por la función D (x,y,z).

a. ¿En cuánto espera que sea afectada la demanda de la primera marca de segadoras por aumento de x? ¿Por un aumento en y? ¿Por un aumento en z?

b. Traslade sus respuestas a la parte (a) en condiciones sobre los signos de las derivadas parciales de D.

c. Si D (x,y,z) = a + bx + cy + dz, ¿Qué puede decir sobre los signos de los coeficientes b,c y d si sus conclusiones sobre la parte (a) se mantienen?

Regla de la cadena en varias variables

25. En los siguientes problemas. Use la regla de la cadena para hallar *dz/dt* el valor especificado de t.

a. $z = 2x + 3y; x = t^2, y = 5t; t = 2$

b. $z = x^2y; x = 3t + 1, y = t^2 - 1; t = 1$

c. $z = \frac{3x}{y}; x = 1, y = t^2, t = 3$

d. $z = x^{1/2}y^{1/3}, x = 2t, y = 2t^2; t = 2$

e. $z = xy;\ \ x = e^{2t}, y = e^{3t}; t = 0$

26. Una tienda vende dos marcas de pintura plástica. Los cálculos de venta indican que si la primera marca se vende a x dólares el galón y la segunda a y dólares el galón, la demanda de la primera será de $Q(x,y) = 200 - 10x^2 + 20y$ galones por mes. Se estima que dentro de t meses el precio de la primera marca será de $x = 5 + 0{,}002t$ dólares el galón y el precio de la segunda mar$\sqrt{t}$ será de $y = 6 + 0{,}4$ dólares el galón. ¿A qué ritmo estará cambiando la demanda de la primera marca de pintura dentro de 9 meses?

27. Un comerciante de bicicletas ha encontrado que si las bicicletas de 10 velocidades se venden a x dólares cada una y el precio de la gasolina es de y centavos por galón, se venderán cada mes aproximadamente $f(x,y) = 200 - 24\sqrt{x} + 4(0{,}1y + 5)^{3/2}$ bicicletas. Se estima que dentro de t meses las bicicletas se venderán a $129 + 5t$ dólares cada una y el precio de la gasolina será de $80 + 10\sqrt{3t}$ centavos por galón. ¿A qué ritmo estará cambiando la demanda mensual de bicicletas dentro de 3 meses?

28. La producción de cierta fábrica es de $Q(x,y) = 0.08x^2 + 0{,}12xy + 0{,}03y^2$ unidades por día, donde x es el número de horas usadas de trabajo experimentando e y es el número de horas usadas de trabajo no experimentado. Actualmente, se usan cada día 80 horas de trabajo experimentado y 200 horas de trabajo no experimentado. Utilice la diferenciación total de Q para estimar el cambio que resultará en la producción si se usa 1/2 hora adicional de trabajo experimentado, junto con 2 horas adicionales de trabajo no experimentado.

29. Un editor estima que se gasta x miles de dólares en desarrollo y, y miles en promoción, se venderán aproximadamente $Q(x,y) = 20x^{3/2}y$ ejemplares de un nuevo libro. Los planes actuales necesitan el gasto de 36.000 dólares en desarrollo y 25.000 en promoción. Use la diferencial de Q para estimar el cambio en promoción de ventas que resultará si la cantidad gastada en desarrollo se aumenta en 500 dólares y la cantidad gastada en promoción se disminuye en 500 dólares.

30. El beneficio diario de un tendero por la venta de dos marcas de zumo de naranja es de P (x,y) = (x-30)(70-5x+4y) + (y-40)(80+6x-7y) centavos, donde x es el precio de cada lata de la primera marca y, y es el precio de cada lata de la segunda. Actualmente, la primera marca se vende a 50 centavos la lata y la segunda a 52 centavos la lata. Use la diferenciación total de p para estimar el cambio en el beneficio diario que resultará si el tendero sube el precio de la primera marca en un centavo por lata y el precio de la segunda marca, en dos centavo por lata.

31. La lata de un refresco tiene 12 centímetros de alto y 3 centímetros de radio. El fabricante planea reducir la altura de la diferencial total para estimar cuánta bebida menos encontrarán los consumidores en cada nueva lata. (ayuda: el volumen de un cilindro de radio r y la altura de h es $\pi r^2 h$.)

32. Usando x horas de trabajo experto y, y horas de trabajo inexperto, un fabricante puede producir $f(x,y) = 10xy^{1/2}$ unidades. Actualmente el fabricante usa 30 horas de trabajo experto y 36 horas de trabajo inexperto, y está planeando usar una hora adicional de trabajo experto. Use el cálculo para estimar el correspondiente cambio en el nivel de trabajo inexperto que el fabricante debería hacer para que la producción total sea la misma.

33. Suponga que el fabricante del problema anterior usa 30 horas de trabajo experto y 36 horas de trabajo no experto y que está planeando usar una hora adicional de trabajo inexperto. Use el cálculo para estimar el correspondiente cambio en el nivel de trabajo experto que debería hacerse, para que la producción total sea la misma (ayuda: use la derivada *dx/dy*).

34. En cierta fábrica, la producción diaria es de $Q = 200k^{1/2} L^{1/3}$ unidades, donde k representa el capital invertido medido en unidades de 1.000 dólares y L el tamaño de la fuerza de trabajo medido en horas-trabajador. El nivel actual de capital invertido es de 60.000

dólares y el tamaño actual de la fuerza de trabajo es de 10.000 horas-trabajador. El fabricante está planeando aumentar el capital invertido en 1.000 dólares. Use el cálculo para estimar el correspondiente decrecimiento en el tamaño de la fuerza de trabajo, que el fabricante puede hacer sin afectar a la producción diaria.

35. En cierta fábrica, la producción Q está relacionada con los datos x y,y por la función $Q = 2x^3 + 3x^2y + y^3$. Si los niveles actuales de los datos son $x = 20$; $y = 10$. Use el cálculo para estimar el cambio en el dato x que debe hacerse para compensar un crecimiento que se mantenga a su nivel actual.

Anexo 8

Facultad de Administración y Economía

Matemáticas I

Guía 7

Tema:

- Optimización en varias variables.

Competencia general

Conoce, maneja y aplica adecuadamente los conceptos, métodos y procedimientos del cálculo diferencial en una y varias variables, para emplearlos en situaciones de su entorno, en especial en el ámbito de la empresa.

Competencias específicas

Tabla 11. Descripción de competencia, logros e indicadores

Competencia	Logros	Indicadores de logros
Comunicativa: maneja adecuadamente el lenguaje matemático.	Utiliza el lenguaje matemático, notaciones y estructuras para representar ideas, describir relaciones y modelar situaciones.	. Reconoce símbolos matemáticos y los usa adecuadamente. . Interpreta de forma correcta la notación utilizada para modelos económicos. . Diferencia la escritura entre derivada ordinaria y parcial.
Cognitiva: desarrolla estructuras conceptuales (optimización en funciones de dos variables) del curso de Matemáticas I.	Comprende y aplica el concepto de la derivada dentro de un contexto económico.	Interpreta el concepto de punto crítico dentro de un problema de optimización en funciones de dos variables.
Disciplinar: comprende los criterios de clasificación de puntos críticos en funciones de dos variables.	. Calcula las derivadas parciales de primer y segundo orden. . Aplica el determinante de la matriz Hessiana en la clasificación de puntos críticos.	. Resuelve sistemas de ecuaciones lineales y no lineales para encontrar los puntos críticos. . Plantea y soluciona problemas (optimización en dos variables) que requieren el uso de las derivadas parciales.
Socio-humanísticas: X	Participa en actividades de aprendizaje colaborativo como constructor y facilitador de metas colectivas.	. Respeta la opinión y el trabajo de los demás. . Es un líder positivo frente al grupo.

Empresarial e investigativa: Reconoce la importancia de la aplicación de la derivada a la solución de problemas en un contexto dado.	. Consulta diferentes fuentes sobre la temática asignada, con el fin de incrementar su espíritu investigativo. . Interpreta los conceptos de matemáticas desde un punto de vista económico.	. Resuelve modelos que involucran optimizar funciones en dos variables. . Construye funciones para modelar una situación problema dentro de un contexto. . Relaciona las demás áreas del conocimiento con las matemáticas. . Analiza y resuelve modelos matemáticos sencillos aplicados en la solución de problemas y relacionados con la Administración y la Economía.

Fuente. Elaborado por los autores.

Clasificación de puntos críticos

Determine todos los máximos locales, mínimos locales y puntos de silla de las siguientes funciones:

1. $f(x, y) = x^2 + 3xy + 3y^2 - 6x + 3y - 6$

2. $f(x, y) = 2xy - 5x^2 - 2y^2 + 4x + 4y - 4$

3. $f(x, y) = 2xy - 5x^2 - 2y^2 + 4x - 4$

4. $f(x, y) = x^2 + xy + 3x + 2y + 5$

5. $f(x, y) = 5xy - 7x^2 + 3x - 6y + 2$

6. $f(x,y) = x^2 - 4xy + y^2 + 6y + 2$

7. $f(x,y) = 2x^2 + 3xy + 4y^2 - 5x + 2y$

8. $f(x,y) = x^2 - y^2 - 2x + 4y + 6$

9. $f(x,y) = x^2 + 2xy$

10. $f(x,y) = x^3 - y^3 - 2xy + 6$

11. $f(x,y) = 6x^2 - 2x^3 + 3y^2 + 6xy$

12. $f(x,y) = 9x^3 + \frac{y^3}{3} - 4xy$

13. $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3x^2 - 3y^2 - 8$

14. $f(x,y) = x^4 + y^4 + 4xy$

15. $f(x,y) = 8x^3 + y^3 + 6xy$

Optimización en varias variables

16. (Costo mínimo de producción). Una empresa produce dos tipos de productos, A y B. El costo diario total (en dólares) de producir x unidades de A y, y unidades de B está dado por $C(x,y) = 250 - 4x - 7y + 0.2x^2 + 0.1y^2$. Determine el número de unidades de A y B que la empresa debe producir al día con objeto de minimizar el costo total.

17. (Utilidad máxima). Si la empresa del ejercicio 16 puede vender cada unidad de A a \$20 y cada unidad de B a \$16, encuentre los niveles de producción de A y B que maximizarían las utilidades de la empresa. ¿Cuál es la utilidad diaria máxima?

18. (Costo de producción mínimo). Repita el ejercicio 16 si:

$$C\,(x,y) = 1500 - 7.5x - 15y - 0.3xy + 0.3x^2 + 0.2y^2.$$

19. (Promoción óptima y niveles de producción). Si x denota la producción de la empresa (en cientos) y, y la cantidad gastada (en miles de dólares) en los esfuerzos promocionales de vender el producto, entonces la utilidad de la empresa U (en miles de dólares) está dada por:

$$U\,(x,y) = 16x + 12y + 2xy - x^2 - 2y^2 - 7$$

¿Qué valores de x y, y producirán la utilidad máxima? ¿Cuál es la utilidad máxima?

20. (Utilización óptima de mano de obra y tamaño del lote). El costo total C por serie de producción (en miles de dólares) de cierta industria está dado por $C\,(x,y) = 3x^2 + 4y^2 - 5xy + 3x - 14y + 20$, en donde x denota el número de horas-hombre (en cientos) y, y el número de unidades (en miles) del producto elaboradas por serie. ¿Qué valores de *x y*, y darán como resultado el costo total mínimo por serie de producción?

21. La compañía nacional de chocolates produce caramelos en dos tamaños a costos unitarios de \$10 y \$20 pesos cada uno. Las demandas semanales x y, y (en miles) para los dos tamaños están dadas por $x=q-p$ y, $y=60+p-3q$ en donde p y q denotan los precios en pesos de los caramelos en los dos tamaños. Determine los precios p y q que maximizarán las utilidades semanales de la empresa.

22. (Producción máxima). Usando L unidades de mano de obra y K unidades de capital, la producción semanal total de una empresa está dada por $Q\ (L,K) = 20K + 32L + 3LK - 2L^2 - 2.5K^2$. Halle el número de unidades de mano de obra y de capital que la empresa debe utilizar a fin de maximizar su producción.

23. (Decisiones sobre fijación de precios). La Corporación de cremas dentífricas Colgate produce crema para dientes de dos tamaños, de 100 y 150 mililitros. El costo de producción de cada tubo de cada tamaño es de 60 y 90 centavos, respectivamente. Las demandas semanales x y, y (en miles) para los dos tamaños son de $x = 3\ (q - p)$ y, $y = 320 + 3p - 5q$, donde p y q son los precios en centavos de los tubos. Determine los precios p y q que maximizarían las utilidades de la compañía.

24. (Costo mínimo). Usando L unidades del insumo mano de obra y K unidades de capital, una empresa fabrica cierta producción de su artículo cuyo costo total T (en millones de dólares) está dado por $T= 40 - 5K - 3L - 2KL + 1.5K^2 + L^2$. Determine la cantidad de cada insumo que debería utilizarse con el propósito de minimizar el costo de la empresa. ¿Cuál es el costo mínimo?

25. (Fijación de precios de productos que compiten entre sí). Juguetería Mattel produce dos tipos diferentes de carros a control remoto con un costo de US $10 y US $30 cada uno. Las demandas anuales x y, y (en miles) están dadas por $x= 30 + 2q - 5p$ y, $y= 100 + p - 2q$, con p y q los precios unitarios (en dólares) de los dos tipos de carros. Determine los precios p y q que la compañía debe fijar a fin de maximizar sus utilidades.

26. Colanta produce leche entera y leche descremada en cantidades x y, y bolsas, respectivamente. Suponga que el precio de la leche entera es $p= 100 - x$, y el de la leche descremada $q= 100 - y$. Además $C(x,y) = x^2 + xy + y^2$ es la función de costo conjunta de los dos artículos. ¿Cuáles deberían ser los valores de x y, y para maximizar las utilidades?

27. El ingreso total diario (en dólares) de la compañía editorial Weston por la producción y venta de su diccionario está dado por

$$R(x,y) = -0.005x^2 - 0.003y^2 - 0.002xy + 20x + 15y$$

Donde x denota la cantidad de ejemplares de lujo y, y los ejemplares económicos, publicados y vendidos por día. El costo total semanal relativo a la publicación de estos diccionarios está dado por (en dólares)

$$C(x,y) = 6x + 3y + 200$$

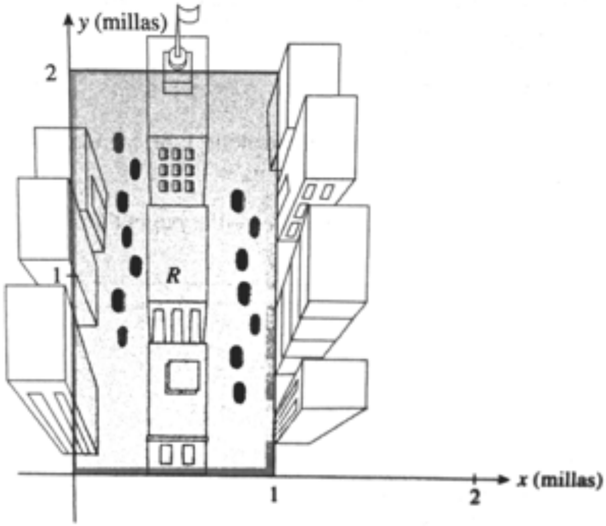
Determine cuántos ejemplares de lujo y económicos debe publicar Weston cada día para maximizar su ganancia. ¿Cuál es la máxima ganancia posible?

28. C & C Imports, Inc., importa dos marcas de vino blanco, una de Alemania y la otra de Italia. El vino alemán cuesta $4 la botella, mientras que el vino italiano se puede comprar a $3 la botella. Se ha estimado que el vino alemán se vende al menudeo a p dólares la botella, y el italiano a q dólares la botella; entonces se venderán 2000 - 150p + 100q botellas del vino alemán y, 1000 + 80p - 120q botellas de vino italiano cada semana. Determine el precio unitario de cada marca que permita a C & C obtener la máxima ganancia semanal posible.

29. La región rectangular R que aparece en la siguiente figura representa el distrito financiero de una ciudad. El precio de los terrenos en este distrito se aproxima mediante la función

$$p(x,y) = 200 - 10\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 15(y-1)^2$$

Figura 10. Distrito financiero de una ciudad



Fuente. Tang Tan, 2005, p. 834.

Donde p(x,y) es el precio del terreno en el punto (x,y) en dólares por pie cuadrado; x y, y se miden en millas. ¿En qué punto dentro del distrito financiero es más caro el precio del terreno?

31. Un almacén de camisetas para baloncesto vende dos tipos de marcas competidoras, una patrocinada por Michael Jordan y la otra por Shaq O´Neal. El propietario del almacén puede obtener ambos tipos a un costo de $2 dólares por camiseta y calcula que si las de Jordan se vende a x dólares cada una y las de O´Neal a y dólares cada una, los consumidores comprarán aproximadamente 40 - 50x + 40y camisetas de Jordan y 20 + 60x - 70y camisetas de O´Neal cada día. ¿Qué precio debería fijar el propietario a las camisetas para generar la máxima utilidad posible?

Anexo 9

Facultad de Administración y Economía

Matemáticas I

Guía 8

Tema:

- Multiplicadores de Lagrange.

Competencia general

Conoce, maneja y aplica adecuadamente los conceptos, métodos y procedimientos del cálculo diferencial en una y varias variables, para emplearlos en situaciones de su entorno en especial, en el ámbito de la empresa.

Competencias específicas

Tabla 12. Descripción de competencia, logros e indicadores

Competencia	Logros	Indicadores de logros
Comunicativa: maneja adecuadamente el lenguaje matemático.	Utiliza el lenguaje matemático, notaciones y estructuras para representar ideas, describir relaciones y modelar situaciones.	. Reconoce símbolos matemáticos y los usa adecuadamente. . Interpreta de forma correcta la notación utilizada para modelos económicos. . Diferencia la escritura entre derivada ordinaria y parcial.
Cognitiva: desarrolla estructuras conceptuales (multiplicadores de Lagrange) del curso de Matemáticas I.	Resuelve problemas de optimización con restricciones de igualdad.	Diferencia entre un problema de optimización con o sin restricciones.
Disciplinar: comprende el método de los multiplicadores de Lagrange en la solución de problemas de optimización.	. Calcula las derivadas parciales de primer y segundo orden. . Identifica de forma correcta la función objetivo y la restricción en un problema de optimización.	. Resuelve sistemas de ecuaciones lineales y no lineales para encontrar los puntos críticos. . Clasifica puntos críticos e interpreta el multiplicador de Lagrange.
Socio-humanística: X	Participa en actividades de aprendizaje colaborativo como constructor y facilitador de metas colectivas.	. Respeta la opinión y el trabajo de los demás. . Es un líder positivo frente al grupo.

Empresarial e investigativa: Reconoce la importancia de la aplicación de los multiplicadores de Lagrange en la solución de problemas en un contexto dado.	. Consulta diferentes fuentes sobre la temática asignada, con el fin de incrementar su espíritu investigativo. . Interpreta los conceptos de matemáticas desde un punto de vista económico.	. Resuelve modelos que involucran optimizar funciones en dos variables con restricciones de igualdad. . Construye funciones para modelar una situación problema dentro de un contexto. .Relaciona las demás áreas del conocimiento con las matemáticas. . Analiza y resuelve modelos matemáticos sencillos, aplicados en la solución de problemas y relacionados con la Administración y la Economía.

Fuente. Elaborado por los autores.

Multiplicadores de Lagrange

1. Aplicar el método de multiplicadores de Lagrange para hallar el extremo indicado. Se supone que el extremo existe.

a. Hallar el valor máximo de la función $f(x,y) = xy$ sujeta a la restricción $x + y = 1$.
b. Hallar los valores máximos y mínimos de la función $f(x,y) = xy$ sujeta a la restricción $x^2 + y^2 = 1$.
c. Hallar el valor mínimo de la función $f(x,y) = x^2 + y^2$ sujeta a la restricción $xy = 1$.
d. Hallar el valor mínimo de la función $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - xy$ sujeta a la restricción $2x + y = 22$.

2. (Costos de producción mínimos). El costo de producir x modelos regulares y, y modelos de lujo del producto de una empresa está dado por la función conjunta de costo $C(x,y) = x^2 + 1.5y^2 + 300$. ¿Cuántas unidades de cada tipo deben producirse a fin de minimizar los costos totales, si la empresa decide producir un total de 200 unidades?

3. Un agricultor desea cercar un área de pastos rectangular, a la orilla de un río. El área tiene 3.200 metros cuadrados y no es necesaria la cerca en la orilla del río. Hallar las dimensiones del área que requieren la menor cantidad de cerca.

4. (Costos de producción mínimos). Una empresa puede elaborar su producto en dos de sus plantas. El costo de producir x unidades en su primera planta y, y unidades de la segunda, está dado por la función conjunta de costo $C(x,y) = x^2 + 2y^2 + 5xy + 700$. Si la empresa tiene una orden de suministrar 500 unidades, ¿Cuántas unidades debe producir en cada planta con objeto de minimizar el costo total?

5. (Uso óptimo de capital y mano de obra). La función de producción de una empresa es $Q(L,K) = 80L^{3/4} K^{1/4}$, donde L y K representan el número de unidades de mano de obra y de capital utilizadas, y Q es el número de unidades elaboradas del producto. Cada unidad de mano de obra tiene un costo de \$60, cada unidad de capital cuesta \$200 y la empresa dispone de \$40.000 destinados a producción.

a. Aplicando el método de multiplicadores de Lagrange, determine el número de unidades de mano de obra y de capital que la empresa debe emplear a fin de obtener una producción máxima.

b. Demuestre que cuando la mano de obra y el capital están en sus niveles máximos, la razón de sus productividades marginales es igual a la razón de sus costos unitarios.

6. (Uso óptimo de capital y mano de obra). Repita el ejercicio 4 en el caso de Q(L,K)= $800\sqrt{3L^2 + 1.5K^2}$.Los costos unitarios de la mano de obra y del capital son de \$250 y \$50 y la empresa dispone de \$6.750 para gastar en producción.

7. (Uso óptimo de capital y mano de obra). Usando L unidades de mano de obra y K unidades de capital, una empresa puede elaborar Q unidades de su producto, donde $Q(L,K) = 60L^{2/3} K^{1/3}$. Los costos de mano de obra y del capital son de \$64 y \$108 por unidad. Suponga que la empresa decide elaborar 2.160 unidades de su producto.

a. Aplicando el método de multiplicadores de Lagrange, halle el número de insumos de mano de obra y de capital que deben emplearse con objeto de minimizar el costo total.
b. Demuestre que en este nivel de producción, la razón de costos marginales de mano de obra y de capital, es igual a la razón de sus costos unitarios.

8. Un fabricante tiene \$8.000 dólares para invertir en el desarrollo y la promoción de un nuevo producto. Se estima que si se gastan x miles de dólares en desarrollo y, y miles en promoción, las ventas serán aproximadamente $f(x,y) = 50x^{1/2} y^{3/2}$ unidades. ¿Cuánto dinero debe asignar el fabricante a desarrollo y cuánto a promoción para maximizar las ventas?

9. Un cliente tiene \$280 dólares para gastar en dos artículos, el primero de los cuales cuesta \$2 dólares por unidad y el segundo US\$5 por unidad. Si la utilidad obtenida por el cliente al comprar x unidades del primer artículo y, y unidades del segundo es $U(x,y) = 100x^{1/4} y^{3/4}$. ¿Cuántas unidades de cada artículo debería comprar el consumidor para maximizar las utilidades?

10. Un cliente tiene k dólares para gastar en dos artículos, el primero de los cuales cuesta a dólares por unidad y el segundo b dólares

por unidad. Si la utilidad obtenida por el cliente al comprar x unidades del primer artículo y, y unidades del segundo, está dada por la función de utilidad de Cobb-Douglas $U(x,y) = x^{\alpha} y^{\beta}$, donde $0 < \alpha < 1$ y $\alpha+\beta = 1$, demuestre que la utilidad se maximizará cuando

$$x = \frac{k\alpha}{a} \quad \text{y} \quad y = \frac{k\beta}{b}.$$

11. La ganancia diaria total (en dólares) obtenida por la compañía editorial Weston al publicar y vender sus diccionarios está dada por la función de ganancia

$$P(x,y) = -0.005x^2 - 0.003y^2 - 0.002xy + 14x + 12y - 200$$

Donde x denota el número de ediciones de lujo y, y es el número de ediciones en rústica vendidas diariamente. La gerencia de Weston decide que la publicación de estos diccionarios debe restringirse a un total de 400 copias por día. ¿Cuántas copias de lujo y cuántas copias en rústica deben publicarse y venderse por día para maximizar la ganancia diaria de Weston?

12. Se quiere construir una caja rectangular cerrada con un volumen de 4 pies cúbicos. Si el pie cuadrado del material para los lados cuesta \$1 y el pie cuadrado de material para las partes superior e inferior cuesta \$1.50, determine las dimensiones de la caja que puede construirse al menor costo.

13. Un cliente tiene \$280 dólares para gastar en dos artículos, el primero de los cuales cuesta \$2 dólares por unidad y el segundo \$5 dólares por unidad. Si la utilidad obtenida por el cliente al comprar x unidades del primer artículo y, y unidades del segundo es $U(x,y)= 100x^{0.25} y^{0.75}$.

a. ¿Cuántas unidades de cada artículo debería comprar el consumidor para maximizar las utilidades?

b. Calcule la utilidad del dinero y explique el resultado en términos económicos.

14. La compañía Ross-Simons tiene un presupuesto mensual para publicidad de \$60.000. Su departamento de mercadotecnia estima que si han invertido x dólares en publicidad televisiva, entonces las ventas mensuales estarán dadas por (en dólares)

$$f(x,y) = 90x^{1/4}\, y^{3/4}$$

Determine cuánto dinero debe invertir mensualmente la empresa en anuncios en periódicos y televisión para maximizar sus ventas mensuales.

15. Jonh Mills, dueño de la compañía de motores Mills, que fabrica motores de aviones, ve que se necesitan x unidades de mano de obra y, y unidades de capital para producir

$$f(x,y) = 100x^{3/4}\, y^{1/4}$$

Unidades del artículo. Si una unidad de mano de obra cuesta \$100, una unidad de capital cuesta \$200 y se dispone de un presupuesto de \$200.000 para producción, determine cuántas unidades deben invertirse en mano de obra y en capital, para maximizar la producción.

16. Si se gastan x miles de dólares en mano de obra y, y miles de dólares en equipo, la producción de cierta fábrica será $Q(x,y) = 60x^{1/3} y^{2/3}$ unidades. Si hay \$120.000 dólares disponibles ¿cómo debe distribuirse el dinero, entre mano de obra y equipo, para generar la mayor producción posible?

17. Utilice el multiplicador λ de Lagrange para calcular el cambio resultante en la producción máxima de la fábrica del ejercicio 16, si el dinero disponible para la mano de obra y equipo se incrementa en \$1.000 dólares.

18. La ganancia semanal total (en dólares) obtenida por la compañía Acrosonic al producir y vender sus sistemas de audio, está dada por la función de ganancia

$$P(x,y) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}y^2 - \frac{1}{4}xy + 120x + 100y - 5000$$

Donde x denota el número de unidades totalmente ensambladas y, y el número de equipos producidos y vendidos por semana. La gerencia de Acrosonic decide que la producción de estos sistemas debe restringirse a un total de 230 unidades por semana. Bajo estas condiciones, ¿cuántas unidades totalmente ensambladas y cuántos equipos por armar deben producirse cada semana para maximizar la ganancia semanal de Acrosonic?

19. Demuestre que sujeto al nivel de producción fijo $Ax^{\alpha}y^{\beta} = k$, con $\alpha+\beta=1$, la función de costo $C(x,y) = px + qy$ se minimiza cuando

$$x = \frac{k}{A}\left(\frac{\alpha q}{\beta p}\right)^{\beta} \qquad y = \frac{k}{A}\left(\frac{\beta p}{\alpha q}\right)^{\alpha}$$

20. Se gasta x miles de dólares en mano de obra y, y miles de dólares en equipo, por lo que, la producción de cierta fábrica será $Q(x,y)= 60x^{1/3}\ y^{2/3}$ unidades. Si hay \$120.000 dólares disponibles, ¿cómo debe distribuirse el dinero, entre mano de obra y equipo, para generar la mayor producción posible?

Anexo 10

Facultad de Administración y Economía

Matemáticas I

Preguntas tipo test

A continuación se presentan una serie de preguntas tipo test referentes a las temáticas trabajadas durante el transcurso del semestre.

1. Cuáles de las siguientes expresiones es **verdadera**.

a. $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

b. $\ln(ab) = \ln a - \ln b$

c. $(a^m)^n = a^{m+n}$

d. $a^0 = 1 \text{ si } a \neq 0$

2. La expresión $\sqrt[4]{x^3}$ es equivalente a:

a. $x^{4/3}$

b. $x^{3/4}$

c. $x^{1/3}$

d. $x^{1/4}$

3. Si $a = 1$, $b = -1$, $c = 3$ y $d = 2$ el resultado de $-(c - b)^2 + 2a - (-d)$ es:

a. -12

b. 20

c. 12

d. -4

4. La expresión $t^3 - t^2 - 2t$ es equivalente a:

a. $t(t-1)(t+2)$

b. $t(t-1)(t-2)$

c. $t(t-2)(t+1)$

d. $t(t+1)(t+2)$

5. El resultado de $(3x)^2$ es:

a. $3x^2$

b. $9x$

c. $6x$

d. $9x^2$

6. El intervalo solución a la desigualdad $4 - 2x \leq 20$ es:

a. $[-8,\infty)$

b. $(8,\infty)$

c. $[-16,\infty)$

d. $(-\infty,16]$

7. Simplificando la expresión $\frac{x^2+5x+6}{x^2-4}$ se obtiene:

a. $\frac{x+2}{x-3}$

b. $x+2$

c. $\frac{x+3}{x-2}$

d. $x+3$

8. El inverso aditivo y multiplicativo de 2/3 son:

a. $-\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{2}$

b. $-\frac{2}{3}$ y $-\frac{3}{2}$

c. $\frac{2}{3}$ y $-\frac{3}{2}$

d. $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{2}$

9. La representación de la desigualdad x < 3 en forma de intervalo es:

a. (3,∞)

b. [3,∞)

c. (-∞,3)

d. (-∞,3]

10. Si el ln a = 4 y el ln b = -3 , entonces el ln(ab) es igual a:

a. 7

c. $-\frac{4}{3}$

b. 2

d. -12

11. Al realizar la operación $\sqrt{2} + \sqrt{8} - 3\sqrt{2}$ obtiene como resultado:

a. $2\sqrt{2}$

b. $-\sqrt{2}$

c. $\sqrt{2}$

d. 0

12. La representación del intervalo [-3,6) en forma de desigualdad es:

a. $-3 \leq x < 6$

b. $-3 < x < 6$

c. $-3 < x \leq 6$

d. $-3 \leq x \leq 6$

13. Al escribir el enunciado "el doble de la suma de dos número es 15", mediante un lenguaje algebraico es:

a. $2x + y = 15$

b. $x + 2y = 15$

c. $(x + y)^2 = 15$

d. $2x + 2y = 15$

14. Las soluciones a la ecuación $x^2 + 4x - 12 = 0$ son:

a. $x = -2$ y $x = 6$

b. $x = 2$ y $x = 6$

c. $x = 2$ y $x = -6$

d. $x = -2$ y $x = -6$

15. El valor de x que cumple con la ecuación 5 - 4x = -5 + x es:

a. x = 1

b. x = 5

c. x = 0

d. x = 2

16. Una persona tiene $3.400 en monedas de $50 y $100. Si tiene en total 47 monedas, ¿cuántas monedas tiene de cada denominación?

a. Tiene 21 monedas de $50 y 26 monedas $100.
b. Tiene 30 monedas de $50 y 17 monedas $100.
c. Tiene 21 monedas de $100 y 26 monedas $50.
d. Tiene 17 monedas de $50 y 30 monedas $100.

17. Si al resolver una ecuación cuadrática el discriminante $D = b^2 - 4ac$ es cero, se puede decir que:

a. La ecuación no tiene solución en los números reales.
b. La ecuación tiene dos soluciones diferentes.
c. La ecuación tiene una solución de multiplicidad 2.
d. La ecuación tiene solución en los números complejos.

18. Las soluciones al sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x = 2 - y \\ 2y = 16 + x \end{cases}$ son:

a. $x = \frac{12}{5}$ y $y = -\frac{34}{5}$

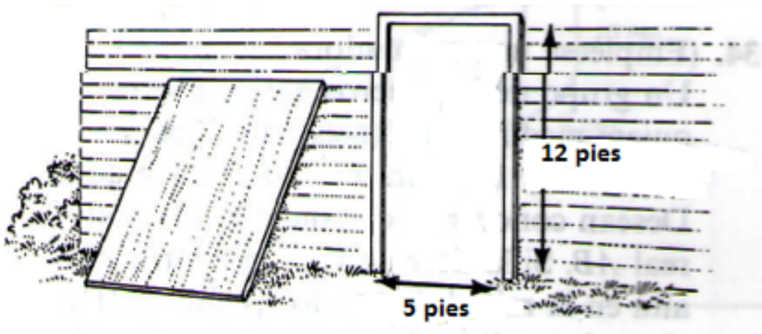
b. $x = -\frac{12}{5}$ y $y = -\frac{34}{5}$

c. $x = \frac{12}{5}$ y $y = \frac{34}{5}$

d. $x = -\frac{12}{5}$ y $y = \frac{34}{5}$

19. Una puerta mide 12 pies de altura por 5 pies de ancho. ¿Cuál es el ancho mayor que puede tener un tablero para que quepa por esa puerta?

Figura 11. Puerta



Fuente. El autor.

a. 169

b. 13

c. 119

d. $\sqrt{119}$

20. Se tiene la fórmula P = 2l + 2w para encontrar el perímetro de un rectángulo. Si P es de 60m y w es de 6m el valor de l es:

a. l = 48m

b. l = 24m

c. l = 480cm

d. l = 240cm

21. Dada la recta $y = 2/5x + 5$ se puede decir:

a. La pendiente es negativa.
b. La ordenada al origen es 2/5.
c. La pendiente es 5.
d. La pendiente es positiva.

22. Si la pendiente de la recta es -2 y el punto de corte con el eje y es 4, su ecuación es:

a. $y = 4 - 2x$

b. $y = 2x + 4$

c. $y = 4x - 2$

d. $y = 4x + 2$

La figura 12 representa como ha sido el comportamiento del dólar en los últimos seis meses, con respecto al cambio de esta divisa en pesos colombianos.

Figura 12. Comportamiento del dólar (noviembre 2011 – abril 2012)

Fuente. Portafolio.

23. De acuerdo con la gráfica dada anteriormente se puede concluir que:

a. El precio de la divisa aumentó en los tres primeros meses.
b. En los últimos seis meses, el cambio en pesos de un dólar ha estado entre \$1.750 y \$1.950.
c. Existió mayor variabilidad en el cambio de la divisa en los dos últimos mes de 2011, que en los cuatros primeros meses de 2012.
d. Entre los meses de enero y febrero de 2012 fue donde la divisa más se devaluó, con respecto al peso colombiano.

24. Dada la parábola $y = x^2 + 6x - 3$ se puede decir:

a. El vértice de la parábola es (-3,-12).
b. a=1 b=6 y c=3.
c. El vértice de la parábola es (3,12).
d. La parábola abre hacia abajo.

25. Dadas las rectas l_1: $2x + y - 5 = 0$ y l_2: $4x + 2y - 4 = 0$ se puede decir de estas que:

a. La pendiente de l_1 es positiva.
b. Las rectas l_1 y l_2 son perpendiculares.
c. Las rectas l_1 y l_2 son paralelas.
d. La pendiente de l_2 es positiva y l_1 negativa.

26. Dada la parábola $y = -x^2 + 4$ se tiene que:

a. Corta al eje x en x=0 y x=-2.
b. No corta al eje x.
c. Corta al eje y en 4.
d. La parábola abre hacia arriba.

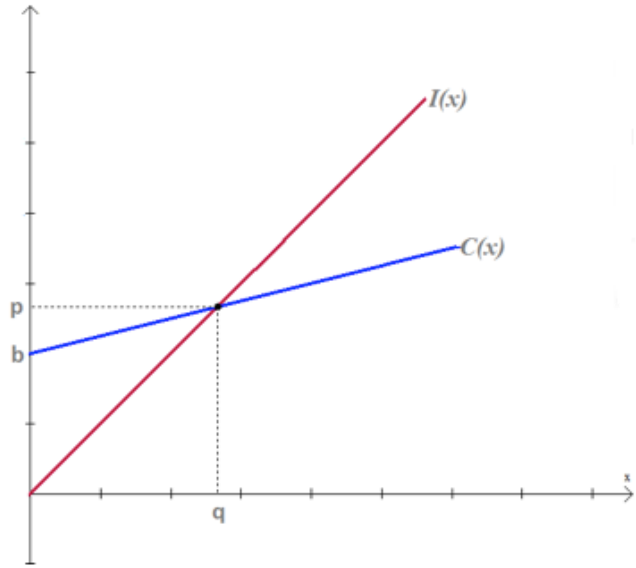
27. Dos rectas se consideran perpendiculares si:

a. Tienen la misma pendiente.
b. Se interceptan en un punto y forman un ángulo de 45°.
c. El producto de sus pendientes es -1.
d. Una de ellas tiene pendiente positiva y la otra pendiente negativa.

Responda las preguntas 28 y 29, de acuerdo con la información dada a continuación.

Se definen las funciones de ingreso I(x) y de costo C(x) en función del número de unidades x producidas y vendidas como se muestra en la figura 13.

Figura 13. Funciones de ingreso y de costo



Fuente. Elaborado por los autores.

28. El punto (q,p) significa que:

a. Se deben vender q unidades a un precio unitario p para recuperar los costos.

b. Cuando se venden q unidades, se obtienen unos ingresos p iguales a los costos.
c. Si el número de unidades vendidas es menor que q, el costo por unidad producida es mayor que el ingreso por unidad vendida.
d. Si el número de unidades vendidas es mayor que q, los costos superan a los ingresos.

29. Diga cuáles de las siguientes afirmaciones es **verdadera**:

a. Las intersecciones con el eje y, indican que si no se produce se obtiene una pérdida igual al valor de b.
b. La pendiente para $x < q$, se puede decir que la pendiente de la función de costo es menor que la función de ingreso.
c. En $x = q$, las pendientes de las funciones de costo y de ingreso son iguales.
d. La utilidad $U(x) = I(x) - C(x)$ es siempre positiva.

30. Diga cuál de las siguientes proposiciones es **falsa**:

a. Toda función es una regla de asignación.
b. Una función está conformada por un conjunto de entrada (dominio) y un conjunto de salida (rango).
c. Toda regla de asignación es una función.
d. Un grafo es un conjunto de parejas ordenadas.

31. La parábola $y = x^2 + 4x - 21$ corta al eje x en los puntos:

a. $x = 3$ y $x = 7$

b. $x =-3$ y $x = 7$

c. $x = 3$ y $x =-7$

d. $x =-3$ y $x =-7$

32. La pendiente m de la recta que pasa por los (-1,6) y (3,8) es:

a. 1

b. 1/2

c. 2

d. -2

33. Dada la función definida como $f(x)=x^2 - 3x + 2$, al calcular $\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ se obtiene:

a. h + 8

b. h + 1

c. h

d. $8 + h^2$

34. Dada la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+5}}$ el dominio de y = f(x) es:

a. [-5 ,∞]

b. (-∞ ,-5)

c. (-5 ,∞)

d. (-∞,-5]

35. Si $f(x)= x^2 + 3x - 4$ y $g(x)= x^2 - 16$ al encontrar $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ se obtiene:

a. $\frac{3x-4}{-16}$

b. $\frac{x-1}{x-4}$

c. $\frac{x+4}{x-4}$

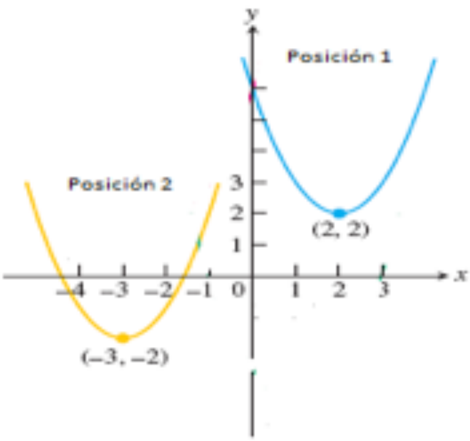
d. $\frac{x+4}{x-1}$

36. Dada la función definida como $f(x) = x^3$ se puede decir de ella que:

a. La función es decreciente en todo su dominio y f es impar.
b. La función es creciente en todo su dominio y f es par.
c. La gráfica de la función es una recta.
d. La función es creciente en todo su dominio y f es impar.

37. Dada la función $f(x) = x^2$ se realizan dos traslaciones de ella sobre el plano cartesiano, las cuales se muestran a continuación:

Figura 13. Traslaciones de función



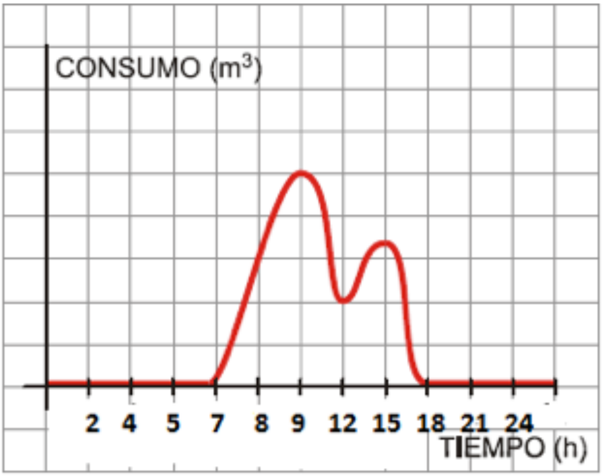
Fuente. Elaborado por los autores.

Las dos ecuaciones que representan las nuevas posiciones de la función $y = f(x)$ son:

a. Posición 1: $y= (x - 2)^2 + 2$; Posición 2: $y= (x - 3)^2 - 2$
b. Posición 1: $y= (x + 2)^2 - 2$; Posición 2: $y= (x + 3)^2 - 2$
c. Posición 1: $y= (x - 2)^2 - 2$; Posición 2: $y= (x - 3)^2 + 2$
d. Posición 1: $y= (x - 2)^2 + 2$; Posición 2: $y= (x + 3)^2 - 2$

El consumo de agua en la Universidad EAN se representa mediante la siguiente figura:

Figura 14. Consumo de agua.



Fuente. Elaborado por los autores.

38. ¿Durante cuántas horas el consumo de agua es nulo?

a. Entre las 0 horas hasta las 7h.
b. Entre las 9 horas hasta las 12h.
c. Entre las 0 horas hasta las 7h y desde las 18h hasta las 24h.
d. Entre las 9 horas hasta las 12h y desde las 15h hasta las 18h.

39. ¿A qué horas se consume más agua?

a. Al medio día
b. A las 9h
c. Entre las 9h y las 15h
d. A las 9h y a las 15h

40. ¿Qué representa el eje x?

a. La variable dependiente.
b. La variable independiente.
c. El consumo de agua por m^3.
d. Ninguna de las anteriores.

41. Dada la función $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$, se muestra a continuación una tabla de valores alrededor de x = 0.

Tabla 13. Valores alrededor de x = 0

x	-0,1	-0,01	-0,001	0	0,001	0,01	0,1
***f*(x)**	0, 9516	0,9950	0,9995		1,0005	1,0050	1,0517

Fuente. Elaborado por los autores.

De acuerdo con la información anterior se puede decir que:

a. El límite en x = 0 no existe.
b. El $\lim_{x \to 0+} f(x)$ es 0
c. El $\lim_{x \to 0-} f(x)$ es 0
d. El $\lim_{x \to 0} f(x)$ es 1

42. Si $f(x) = \left(\frac{2-x}{x+3}\right)\left(\frac{3}{x} - 1\right)$, al evaluar el $\lim_{x \to \infty} f(x)$ se obtiene:

a. $\lim_{x \to \infty} f(x) = -1$
b. $\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$
c. $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$
d. $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

43. Dada la función $f(x) = \frac{x^3+8}{x^2+5x+6}$ el $\lim_{x \to -2} f(x)$ es:

a. -12/5

b. 0

c. 8

d. 12

44. Dada la función $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ el $\lim_{x \to 1} f(x)$ es:

a. 0

b. 1

c. 2

d.-1

45. Si el $\lim_{x \to c} f(x) = 27$ y $\lim_{x \to c} g(x) = -8$, entonces el $\lim_{x \to c} \sqrt[3]{\frac{g(x)}{f(x)}}$ es:

a. -3/2

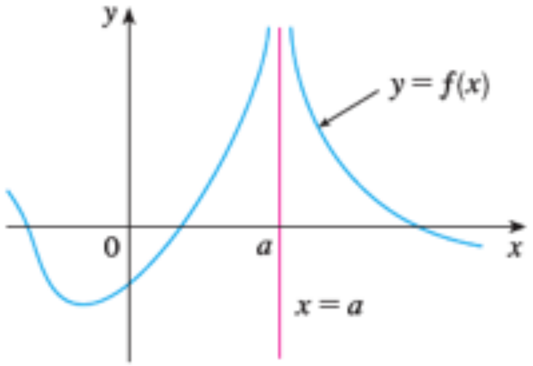
b. 3/2

c. -2/3

d. 2/3

46. De la figura que se muestra a continuación, se puede decir que:

Figura 14. Límites

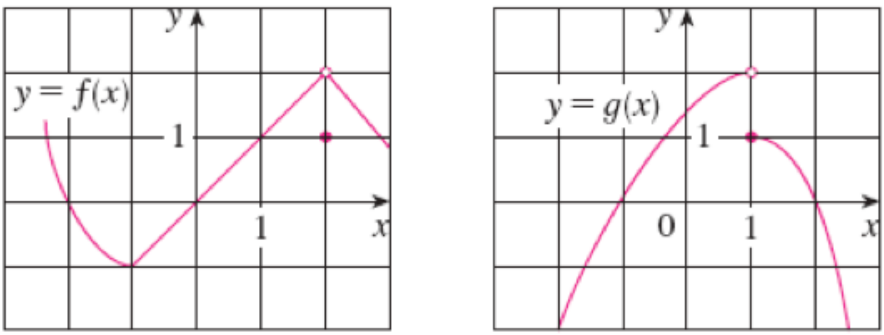


Fuente. Elaborado por los autores.

a. En x = a el límite existe.
b. Tiene una asíntota horizontal x = a
c. No tiene asíntotas verticales.
d. El $\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$

De acuerdo con las siguientes figuras, responda las preguntas **47** y **48**.

Figura 15. Funciones



Fuente. Elaborado por los autores.

47. De la función $y = f(x)$ se puede decir que:

a. La función es continua en todo su dominio.
b. No es continua en $x = 2$, porque el $\lim_{x \to 2} f(x)$ no existe.
c. Es continua en $x = 1$.
d. $f(2) = 2$.

48. De la función $y = g(x)$ se puede decir que:

a. La función es continua en todo su dominio.
b. No es continua en $x = 1$, porque el $\lim_{x \to 1} g(x)$ no existe.
c. Es continua en $x = 1$.
d. $g(1) = 2$.

49. Dada la función $f(x) = 3x - 1$ el $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ es igual a:

a. 4

b. 0

c. 1

d. 3

50. Sea v y u funciones de x, diferenciables en $x = 0$, y que $u(0) = 5$, $u'(0) = -4$, $v(0) = -1$ y $v'(0) = -2$. El valor de $d/dx\ (u/v)$ en $x = 0$ es:

a. 14

b. -7/2

c. 3/2

d. 7/2

51. La derivada de la función definida como $f(x) = (1 + 2x - x^2)^3$ es:

a. $f'(x) = 3\,(1 + 2x - x^2)^2$

b. $f'(x) = 3\,(2 + 2x)\,(1 + 2x - x^2)^2$

c. $f'(x) = 6\,(1 - x)\,(1 + 2x - x^2)^2$

d. $f'(x) = 3\,(2 + 2x)\,(1 + 2x - x^2)^3$

Dada la curva $2x + y - 3xy = 4$, responda las preguntas **52** y **53**:

52. Se puede decir que dy/dx es:

a. $\frac{dy}{dx} = \frac{3y+2}{1-3x}$

b. $\frac{dy}{dx} = \frac{3y-2}{1+3x}$

c. $\frac{dy}{dx} = \frac{3y-2}{1-3x}$

d. $\frac{dy}{dx} = \frac{3y-2}{3x-1}$

53. Las pendientes de las rectas tangente y normal a la curva en el punto P (0,4) son:

a. $m_T = 10 \text{ y } m_N = -\frac{1}{10}$

b. $m_T = -10 \text{ y } m_N = \frac{1}{10}$

c. $m_T = 14 \text{ y } m_N = -\frac{1}{14}$

d. $m_T = -10 \text{ y } m_N = -\frac{1}{10}$

54. La ecuación de la recta tangente a la curva $y = e^{4x} + \ln(2x + 1)$ en $x = 0$ es:

a. $y_t = 2x + 1$

b. $y_t = 4x + 1$

c. $y_t = 3x + 1$

d. $y_t = 6x + 1$

55. Para la función de costo $c(q) = 0.3q^2 + 3.5q + 9$, qué representa $c'(q)$?

a. El costo de producir la unidad q + 1.
b. c(q+1) - c(q).
c. La estimación al cambio real de la unidad q a la unidad q + 1.
d. Un aumento en el costo.

56. Si la ecuación de demanda para un producto es $\sqrt{x} + p = 10$, el ingreso marginal es:

a. $I'(x) = 10x - x^{3/2}$

b. $I'(x) = 10 + \frac{3}{2}x^{1/2}$

c. $I'(x) = 10 - \frac{3}{2}x^{1/2}$

d. $I'(x) = 10x - \frac{3}{2}x^{1/2}$

57. Si $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 8$ el valor de $f''(-1)$ es:

a. 5

b. 8

c. 0

d. -12

58. La derivada de la función $f(x) = x + e^x$ es:

a. $f'(x)=e^x$

b. $f'(x)=xe^{x-1}$

c. $f'(x)=1+e^x$

d. $f'(x)=e^x+xe^x$

59. Dada la función de ingreso $R(x) = 10x - 0.01x^2$, la marginal evaluada en 25 es igual a:

a. 10

b. 9.5

c. 243.75

d. 9.6

60. La derivada de la expresión $y = \ln(2x - 7)$ es:

a. $y' = \frac{2}{2x-7}$

b. $y' = \frac{1}{2x-7}$

c. $y' = \frac{1}{x-7}$

d. $y' = 2\ln(2x-7)$

61. La derivada de la función $f(x) = \frac{3x-8}{2-3x}$ es:

a. $\frac{18}{(3x-2)^2}$

b. $-\frac{18}{(3x-2)^2}$

c. $\frac{18x-18}{(3x-2)^2}$

d. $\frac{18x+30}{(3x-2)^2}$

62. La marginal de una función de utilidad u(x) representa:

a. El cambio real al producir y vender una unidad adicional.
b. La estimación al cambio real, al producir y vender una unidad adicional.
c. Cuando C´(x) = I´(x).
d. U´(x) = C´(x) - I´(x).

63. Para cierto artículo, la ecuación de demanda es p = 5 - 0.001x. El valor de x maximiza el ingreso es:

a. 5000

b. 500

c. 2500

d. 250

64. La derivada de la función $f(x) = 3x^3 - 2x^{-2} + x - 1$ es:

a. $f'(x)= 9x^2 - 4x^{-3} + 1$

b. $f'(x)= 9x^2 + 4x^{-1} + 1$

c. $f'(x)= 9x^2 + 4x^{-1} - 1$

d. $f'(x)= 9x^2 + 4x^{-3} + 1$

65. En una fábrica el costo diario de producir x sillas, está dado por $C(x) = 50.000 + 40.000x$ pesos. La función de demanda es $p + 100x = 80.000$ pesos. El número de sillas que deben producirse y venderse diariamente para alcanzar la utilidad máxima son:

a. 200

b. 400

c. 398.74

d. 800

66. La segunda derivada de la expresión $y = 4e^{5x}$ es:

a. $y'' = 20e^{5x}$

b. $y'' = 25e^{5x}$

c. $y'' = 100e^{5x}$

d. $y'' = 125e^{5x}$

67. La derivada dy/dx de la expresión $y = e^5$ es:

a. $y' = 5e^4$

b. $y' = e^5$

c. $y' = e^4$

d. $y' = 0$