Manual didáctico de Matemáticas Financieras

Informe Final de Investigación – IFI

Rafael Serna Espitia

Gerardo Rojas

Universidad EAN

Facultad de Postgrados

Especialización en Administración Financiera

Bogotá, D.C, Mayo de 2012

Tabla de contenido

Introducción

Generalidades

El presente trabajo no pretende en ningún momento presentar términos o teorías nuevas. En matemáticas financieras los conceptos y las fórmulas ya están inventados hace mucho tiempo, y de hecho existen un sin número de textos que están disponibles para consulta, estudio y profundización en el tema, unos más complejos que otros, pero que a la larga, abarcan los mismos temas.

Planteamiento del problema

Las matemáticas financieras se han convertido en una materia clave para todos los administradores financieros. De otro lado, existe en el mercado una amplia gama de literatura que en su mayoría hace difícil el proceso de comprensión de los conceptos que allí se exponen. Esto muchas veces hace que un área tan importante dentro de la gestión financiera sea vista como una materia muy densa y complicada de entender.

Objetivos de la investigación

Objetivo general. Este material pretende hacer una presentación y explicación de los conceptos básicos de las matemáticas financieras, de una forma didáctica, es decir, de fácil comprensión para el lector bien sea estudiante de pregrado, posgrado, o, profesional en las áreas administrativas y económicas, que le permita la resolución de problemas o situaciones que tienen que ver con el quehacer diario de los administradores financieros.

Objetivos específicos

- Desarrollar una cartilla que describa los conceptos básicos de las matemáticas financieras de una forma sencilla y clara.
- Proveer ejemplos prácticos de cada una de los conceptos, para obtener una clara comprensión del significado y el alcance de los mismos.
- Desarrollar modelos prácticos en la hoja de cálculo de Excel que permitan al lector adquirir destreza en la solución de problemas relacionados con su quehacer como profesionales.

Justificación e importancia de la investigación

Con la elaboración de este trabajo final de investigación, se busca enriquecer el material disponible en la materia, pero ante todo proveer a los estudiantes de pregrado, posgrado, y aún a los maestros, un manual didáctico con aplicaciones en Excel que facilite al mismo tiempo la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas financieras.

1. MARCO TEÓRICO

Definición de Matemática Financiera

La Matemática Financiera es una derivación de la matemática aplicada que provee un conjunto de herramientas, las cuales permiten analizar cuantitativamente la viabilidad o factibilidad económica y financiera de los proyectos de inversión o financiación.

Las matemáticas financieras en el mundo de los negocios

Como herramienta para la toma de decisiones empresariales, las matemáticas financieras nos ayudan a tomar decisiones que tienen que ver entre otras con alguna o varias de las siguientes operaciones financieras:

- Inversiones
- Financiamiento
- Cobertura
- Crecimiento
- Diversificación
- Nuevos negocios
- Valoración de Empresas
- Alianzas estratégicas

El valor del dinero en el tiempo

El concepto fundamental de las matemáticas financieras es el valor del dinero en el tiempo. El dinero tiene un valor dependiendo del momento en que se considera. No es lo mismo tener hoy $100.000 que tener $100.000 dentro de un año, porque lo que se puede hacer hoy con ese dinero es más de lo que se podrá hacer dentro de un año debido a que normalmente todos los artículos suben de precio. Por lo tanto es una realidad que el dinero cambia de valor a través del tiempo.

Este concepto del valor del dinero en el tiempo, afirma Hugo Vargas en sus memorias (2002), nos plantea entonces, un principio fundamental en matemáticas financieras:

> ***"Una cantidad de dinero o un valor sólo es comparable con otro que se encuentre ubicado en un mismo momento en el tiempo"***

Interés

Así como es posible entregar una casa, un carro o un servicio en arriendo y cobrar una suma mensual por el uso de ese bien, también es posible entregar en arriendo una cantidad de dinero por un tiempo determinado. Esa renta o alquiler que se paga por una suma de dinero bien sea tomada en préstamo, (operación de financiamiento), o invertida (operación de inversión) se conoce con el nombre de interés.

Esto significa que, cuando se invierte un capital (operación de inversión), se espera que después de un tiempo de tenerlo invertido se obtenga un valor superior al que se invirtió inicialmente: el capital más el interés.

De igual forma si se recibe un capital en préstamo (operación de financiamiento), después de un tiempo de utilizarlo se debe pagar un valor superior al que se recibió inicialmente: el capital más el interés.

De lo anterior se deduce que en el uso del dinero intervienen cuatro conceptos que son los siguientes:

- ***Valor inicial***: es el dinero o capital que se invierte al comienzo de una operación financiera. También se conoce como valor presente.
- ***Período de tiempo***: son las unidades de tiempo que transcurren durante la operación financiera, se conoce como plazo y puede expresarse en cualquier unidad; días, semanas, meses, etc.
- ***Valor final***: es el monto que se recibe o se paga al finalizar la operación financiera, también se conoce como valor futuro y es igual al valor inicial más los intereses.
- ***Interés***: es la retribución que reciben los inversionistas y prestamistas por ceder el uso del dinero o capital propio o el costo que pagan los prestatarios por utilizar el dinero o capital ajeno y se expresa en valor absoluto ($).

Teniendo en cuenta lo anterior se pueden deducir las siguientes fórmulas:

F = P + I **P = F – I** **I = F – P**

Donde

F: Valor final o futuro

P: Valor inicial o presente

I: Interés o retribución ($)

Ejemplo: Suponga que una persona recibe un préstamo de $500.000 con el compromiso de pagar $550.000 dentro de tres meses.

En este caso tenemos que:

F: $ 550.000

P: $ 500.000

I: $ 50.000

FORMULA	CALCULO	RESULTADO
F = P + I	500.000+50.000	550.000
P = F – I	550.000-50.000	500.000
I = F – P	550.000-500.000	50.000

Tasa de interés

Cuando expresamos el interés en forma porcentual, hablamos de tasa de interés. Esta resulta de la relación matemática que existe entre el monto del interés que se retribuye al capital y el monto del capital invertido inicialmente. Por lo tanto:

$$i = \frac{I}{P} \qquad i = \frac{F - P}{P} \qquad i = \frac{F}{P} - 1$$

Donde

i : Tasa de interés (%)

F: Valor final o futuro

P: Valor inicial o presente

I: Interés o retribución

Para el mismo ejemplo anterior tenemos:

FORMULA	CALCULO	RESULTADO
$i = \frac{I}{P}$	$i = \frac{50.000}{500.000}$	$i = 0.1 = 10\%$
$i = \frac{F - P}{P}$	$i = \frac{550.000 - 500.000}{500.000}$	$i = 0.1 = 10\%$
$i = \frac{F}{P} - 1$	$i = \frac{550.000}{500.000} - 1$	$i = 0.1 = 10\%$

Interés simple

Esta modalidad de interés se caracteriza porque los intereses generados en un período no ganan intereses en los períodos siguientes. Lo anterior implica que sólo el capital produce intereses, y que los intereses generados en cada período van perdiendo poder adquisitivo, lo cual se convierte en una gran desventaja. Es por esto que la aplicación dada al interés simple es mínima en el campo financiero.

Las condiciones que operan sobre este tipo de interés son:

- Capital constante
- Liquidación de intereses para cada período sobre el capital original
- Intereses para cada período de igual magnitud

De lo anterior podemos deducir la fórmula para calcular los intereses en la modalidad de interés simple

$$\boxed{I = i * P}$$

Donde

i : Tasa de interés (%)

P: Valor inicial o presente

I: Interés o retribución

Existen dos posibilidades cuando se pactan los intereses en la modalidad de interés simple en un préstamo:

- Liquidarlos y pagarlos inmediatamente.
- Liquidarlos y pagarlos sólo al final de la operación.

Ejemplo: Un crédito de $1.500.000 se otorga a un plazo de seis meses, a una tasa del 2% mensual.

Tenemos que:

P = $1.500.000

i = 2% mensual

n = 6 meses

Para el primer caso los intereses se liquidan y se pagan. Para calcular los intereses aplicamos la fórmula:

$I = i * P$

$I = 0.02*1.500.000$

$I = 30.000$

Miremos cómo se aprecia el movimiento del préstamo hasta antes de cancelarlo en la siguiente tabla:

Tabla 1. Interés simple – modalidad (1)

Intereses iguales pagados cada mes

Saldo de Capital constante

MES	SALDO INICIAL	LIQ. INTERES	PAGO INTERES	ABONO CAPITAL	PAGO TOTAL	SALDO INTERESES	SALDO CAPITAL	SALDO TOTAL
1	1.500.000	30.000	30.000	-	30.000	-	1.500.000	1.500.000
2	1.500.000	30.000	30.000	-	30.000	-	1.500.000	1.500.000
3	1.500.000	30.000	30.000	-	30.000	-	1.500.000	1.500.000
4	1.500.000	30.000	30.000	-	30.000	-	1.500.000	1.500.000
5	1.500.000	30.000	30.000	-	30.000	-	1.500.000	1.500.000
6	1.500.000	30.000	30.000	-	30.000	-	1.500.000	1.500.000

Nota: Fuente Elaboración Propia mediante Microsoft Excel 2010

Para el segundo caso los intereses se liquidan, no se pagan y se acumulan como una deuda para pagar al final del plazo. Para calcular los intereses aplicamos la misma fórmula.

I = i * P

I = 0.02*1.500.000

I= 30.000

Miremos cómo se aprecia el movimiento del préstamo hasta antes de cancelarlo en la siguiente tabla:

Tabla 2. Interés simple – modalidad (2)

Intereses iguales se acumulan hasta el final

Saldo de Capital constante

MES	SALDO INICIAL	LIQ. INTERES	PAGO INTERES	ABONO CAPITAL	PAGO TOTAL	SALDO INTERESES	SALDO CAPITAL	SALDO TOTAL
1	1.500.000	30.000	-	-	-	30.000	1.500.000	1.530.000
2	1.500.000	30.000	-	-	-	60.000	1.500.000	1.560.000
3	1.500.000	30.000	-	-	-	90.000	1.500.000	1.590.000
4	1.500.000	30.000	-	-	-	120.000	1.500.000	1.620.000
5	1.500.000	30.000	-	-	-	150.000	1.500.000	1.650.000
6	1.500.000	30.000	-	-	-	180.000	1.500.000	1.680.000

Nota: Fuente Elaboración Propia mediante Microsoft Excel 2010

De lo anterior podemos concluir también que si queremos saber el saldo acumulado de intereses en un período de tiempo determinado, basta con multiplicar el monto de los intereses de un período por el número de períodos que hayan transcurrido, para lo cual usaremos la siguiente fórmula.

$$\boxed{I = n * (i * P)}$$

Donde

I: Interés o retribución

n: número de períodos que han transcurrido desde el inicio de la operación

i : Tasa de interés del período (%)

P: Valor inicial o presente

Para el ejemplo anterior tenemos que para el mes seis los intereses acumulados son:

I = n * (i *P)

I = 6* 0.02 * 1.500.000

I = $ 180.000 que coincide con el valor de la tabla de la columna saldo de intereses en el mes seis.

Interés compuesto

Esta modalidad de interés se caracteriza porque para la liquidación de los intereses se toma como base el capital más los intereses liquidados y no pagados en períodos anteriores. Esto quiere decir que los intereses liquidados en el pasado se han convertido en capital y por lo tanto generan nuevos intereses, fenómeno conocido como la capitalización de intereses.

La capitalización de intereses lleva a que el valor adeudado por concepto de capital aumente al finalizar cada período y por lo tanto que el valor que se emplea para calcular nuevos intereses sea cada vez mayor.

Las condiciones que operan sobre este tipo de interés implican que:

- Se defina un período de capitalización (el lapso de tiempo al cabo del cual se reinvertirán los intereses).
- El capital se actualiza cada período sumando los intereses causados.
- Los intereses se liquidan sobre el capital actualizado.

Para este caso calculamos los intereses con la misma fórmula.

I = i * P

Miremos cómo se aprecia el préstamo del mismo ejemplo anterior hasta antes de cancelarlo, pero aplicando interés compuesto.

Tabla 3. Interés compuesto

Los intereses liquidados aumentan cada mes y se suman al capital

El saldo de capital aumenta cada período

MES	SALDO INICIAL (1)	LIQ. INTERES (2)	PAGO INTERES	ABONO CAPITAL	PAGO TOTAL	SALDO INTERESES	SALDO CAPITAL (1+2)	SALDO TOTAL
1	1.500.000	30.000	-	-	-	-	1.530.000	1.530.000
2	1.530.000	30.600	-	-	-	-	1.560.600	1.560.600
3	1.560.600	31.212	-	-	-	-	1.591.812	1.591.812
4	1.591.812	31.836	-	-	-	-	1.623.648	1.623.648
5	1.623.648	32.473	-	-	-	-	1.656.121	1.656.121
6	1.656.121	33.122	-	-	-	-	1.689.244	1.689.244

Nota: Fuente Elaboración Propia mediante Microsoft Excel 2010

En este caso en que los intereses se suman al capital, si queremos calcular el saldo total de la deuda (**F**) en un momento dado (**n**) debemos aplicar la siguiente fórmula:

$$F = P * (1+i)^n$$

Donde

F: valor acumulado de la deuda o inversión después de una serie de períodos

P: valor invertido o recibido en préstamo al inicio de la operación

i : tasa de interés del período (%)

n: número de períodos transcurridos desde el inicio de la operación

De la fórmula anterior podemos deducir otras fórmulas así:

$$P = \frac{F}{(1+i)^{n}} = F(1+i)^{-n}$$

$$n = \frac{\ln(F/P)}{\ln(1+i)}$$

$$i = \left[\frac{F}{P}\right]^{(1/n)} - 1$$

Para el ejemplo anterior calculemos el saldo que se adeuda (**F**) al cabo de seis meses aplicando la fórmula mencionada.

Tenemos que:

P = $1.500.000

i = 2% mensual — Unidad de tiempo igual: "mes"

n = 6 meses

F = ?

F= $P*(1+i)^{n}$

F= $1.500.000*(1+0.02)^{6}$

F= $1.689.244 que es igual al valor obtenido en la tabla del ejemplo anterior en la columna saldo de capital en el mes seis.

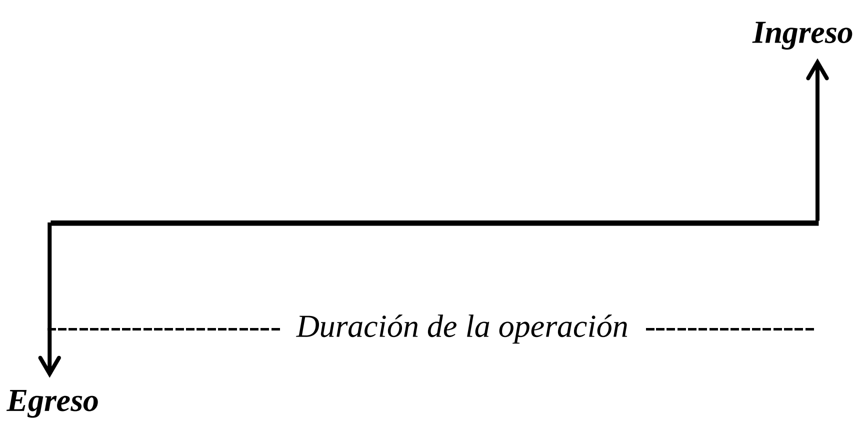
Observemos en el ejemplo anterior que la unidad de tiempo en que se expresan la tasa de interés (período de liquidación), el plazo de la operación y el período de capitalización son los mismos, en este caso el mes.

Para facilitar la solución de los problemas de matemáticas financieras, debemos tener en cuenta que el período de liquidación de los intereses debe coincidir con el plazo y el período de expresión de la tasa de interés. Si los tres no coinciden hay que efectuar los ajustes necesarios para que ello ocurra

Diagramas de flujos de efectivo

Un diagrama de flujo de efectivo es la representación gráfica de las entradas y salidas de efectivo durante el tiempo que transcurre una operación financiera. En estos diagramas se representan los valores sobre un segmento de recta horizontal que define la duración de la operación (horizonte de tiempo) dividido en tantas partes como períodos tenga la transacción.

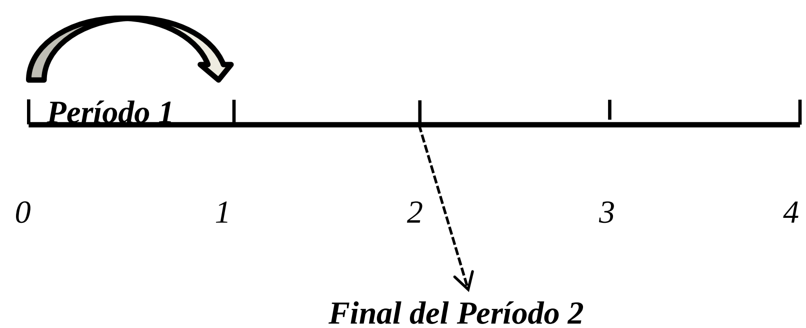
Los valores son representados por medio de flechas verticales que se orientan hacia arriba si se trata de ingresos o hacia abajo si se trata de egresos.



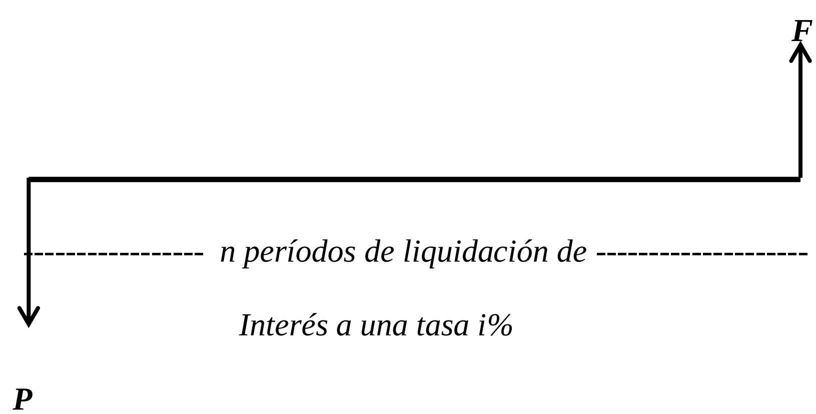
Algunas observaciones sobre los diagramas de flujo de efectivo

- El tiempo se mide a lo largo del eje horizontal (horizonte del tiempo)

- El espacio entre divisiones representa un período de tiempo y cada división del eje representa el final del período
- Los períodos de que se compone el diagrama deben ser iguales para un mismo diagrama (años, semestres, trimestres, meses, días, etc)



Hasta el momento hemos trabajado algunos conceptos que podemos agrupar y representar en el siguiente diagrama de flujo:



Valor presente (P). Es la cantidad de dinero que se invierte o se toma en préstamo a una tasa de interés dada y durante ***n*** períodos de tiempo.

Valor futuro (F). El valor futuro de un valor presente es la cantidad de dinero de la cual se dispone al final del plazo de la operación financiera. El valor futuro es la suma del valor presente y los intereses devengados durante el tiempo en que se efectuó la inversión.

Tasas de interés

Tasa de interés nominal. La tasa de interés nominal es aquella que se utiliza para anunciar las operaciones financieras, bien sean de financiamiento o de inversión, es decir, que con la tasa de interés nominal se presentan las condiciones de liquidación de los intereses de un negocio. Estas condiciones son:

- *Valor de la tasa* – (en porcentaje %)
- *Plazo* - (tiempo total que abarca la tasa de interés)
- *Período de liquidación* - (cada cuánto se liquidan los intereses)
- *Forma de pago* – (cúando se pagan los intereses)

Lo común es encontrar que las tasas nominales se expresen en términos anuales, aunque algunas veces se encuentren en un plazo diferente.

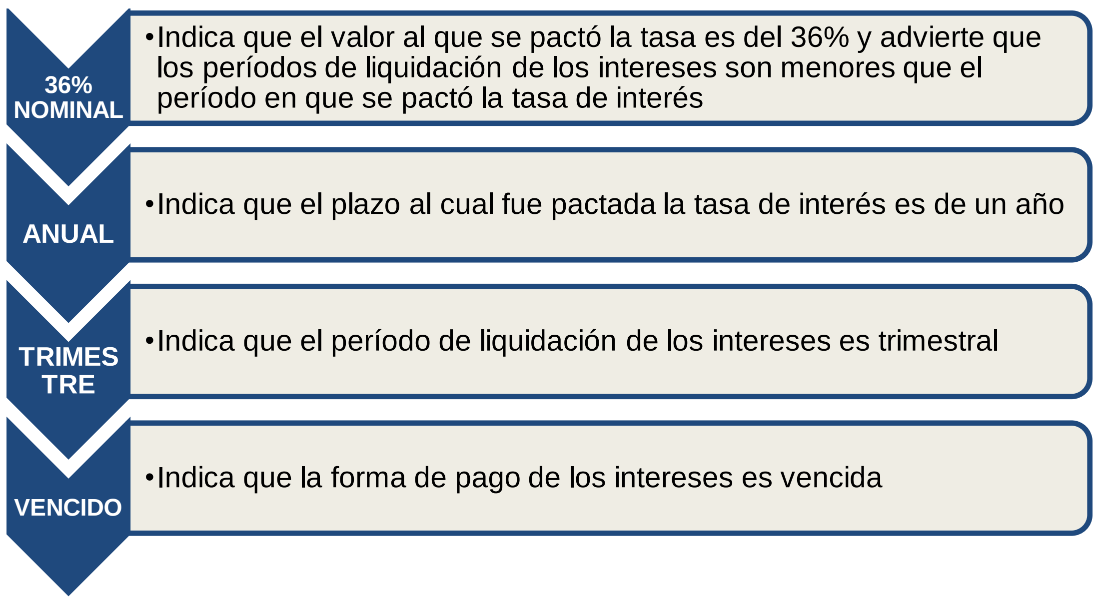
A continuación algunas formas de expresar una tasa de interés nominal:

Ejemplo: Una tasa del 36% nominal anual, con liquidación de intereses trimestrales y pagados al vencimiento se puede enunciar de las siguientes maneras.

ENUNCIADO TASA	***LECTURA***
36% NATV	*36% nominal anual trimestre vencido*
36% ATV	*36% anual trimestre vencido*
36% TV	*36% trimestre vencido*

Figura 1. Nomenclatura Tasa Nominal

TASA	**EXPLICACION**



Nota: Fuente Elaboración Propia

De lo anterior se concluye que la tasa de interés nominal no se puede utilizar directamente para el cálculo de los intereses. Para esto es necesario calcular la tasa que corresponde al período de liquidación, (tasa de interés periódica), que es diferente a la tasa del enunciado.

Tasa de interés periódica. Es la tasa de interés que se aplica directamente al capital para determinar el valor de los intereses que se pagan o se cobran en un período.

Para calcular la tasa de interés periódica, basta con dividir la tasa de interés nominal con que se anuncia el negocio por el número de períodos de liquidación de intereses que haya en el plazo en que se encuentra expresada la tasa nominal. Para esto aplicamos la siguiente fórmula:

$$ip = \frac{IN}{n}$$

Donde:

Ip = Tasa de interés periódica

IN = Tasa de interés nominal

n = número de períodos de capitalización que hay en el plazo en que se expresa IN

Para el caso del ejemplo anterior se tiene que:

IN	n	ip
36% NATV Nominal anual trimestre vencido	*n = 12 meses / 3 meses por trimestre = 4*	*ip= 36%/4 = 9% trimestral*

A continuación se muestran algunos otros ejemplos para calcular la tasa periódica en donde el plazo al cual fue pactada la tasa de interés es de un año y menor a un año.

Para calcular **n** basta con expresar el plazo de la tasa de interés y el período de liquidación de los intereses en la misma unidad de tiempo

$$ip = \frac{IN}{n}$$

IN	n	ip
36% NASV Nominal anual semestre vencido	*n = 12 meses / 6 meses por semestre = 2*	*ip= 36%/2 = 18% semestral*
36% NABV Nominal anual bimestre vencido	*n = 12 meses / 2 meses por bimestre = 6*	*ip= 36%/6 = 6% bimestral*
36% NAMV Nominal anual mes vencido	*n = 12 meses / 1 meses = 12*	*ip= 36%/12 = 3% mensual*
18% NSBV Nominal semestral bimestre vencido	*n = 6 meses del semestre / 2 meses por bimestre = 3*	*ip= 18%/3 = 6% bimestral*
18% NSMV Nominal semestral mes vencido	*n = 6 meses del semestre / 1 mes = 6*	*ip= 18%/6 = 3% mensual*
5% N EN 45DIASDV Nominal en 45 días pagadero día vencido	*n = 45 días / 1 día = 45*	*ip= 5%/45 = 0.11% diario*

Tasa de interés efectiva. La tasa de interés efectiva es la que realmente se paga o se obtiene durante un período de liquidación de intereses. Si se trata de varios períodos de liquidación de intereses, es necesario suponer que estos se capitalizan en cada período.

En el caso en que el período sea de un año la tasa de interés se denomina tasa efectiva anual (**TEA**).

La tasa de interés efectiva se utiliza con dos finalidades:

- Para liquidar los intereses de un período. Para esto debemos conocer la tasa de interés del periodo o tasa periódica que es a la vez una tasa efectiva, pues es la que se aplica en la fórmula **I = i * P** para el cálculo de los intereses.
- Como parámetro de referencia para comparar la rentabilidad o el costo de diferentes alternativas de operaciones de inversión o de financiamiento que están expresadas o pactadas con diferentes condiciones.

Para establecer la fórmula de la tasa de interés efectiva que capitaliza más de un período se toma como base la fórmula de interés compuesto vista anteriormente:

$$F = P * (1+i)^n$$

Supongamos que **P** = $1

Entonces tenemos que :

$$F = (1+i)^n.$$

Si queremos saber la rentabilidad de este negocio debemos restar $1 de la inversión inicial para encontrar el interés realmente ganado.

Entonces podemos decir que el interés efectivo resulta de aplicar la siguiente fórmula:

$$\boxed{IE = (1+ip)^n - 1}$$

Donde:

IE = interés efectivo de n períodos

ip = interés efectivo de un período o tasa periódica (debe ser el del período de liquidación)

n = número de períodos que se capitalizan o se acumulan durante el plazo de la operación

Si queremos conocer la tasa de un período despejamos la fórmula anterior y obtenemos:

$$\boxed{i = (1+IE)^{1/n} - 1}$$

Ejemplo: Una persona invierte hoy la suma de $100.000 en una entidad que paga el 36% NATV (nominal anual trimestre vencido). Determinar el valor total acumulado al final de un año y la tasa de interés efectiva anual de la inversión.

Primera parte:

Como dijimos anteriormente para calcular los intereses, debemos determinar la tasa periódica que en este caso es trimestral así:

Ip = IN/n

ip = 36%/4

ip = 9% trimestral

<u>Segunda parte:</u>

Ahora procedemos a determinar el valor acumulado al cabo de un año, es decir, cuatro trimestres así:

F = $P*(1+i)^n$

F = $100.000*(1+9\%)^4$

F = $141.160

Observemos que la unidad de tiempo de la tasa periódica (***9%)*** y el número de períodos (***4***) es la misma, el trimestre.

<u>Tercera parte:</u>

Ahora calculemos los intereses al cabo de un año así:

I = F – P

I = $141.160 - $100.000

I = $ 41.160

Lo que quiere decir que la tasa de interés de la inversión al cabo de un año fue:

i = I/P

i = $41.160/100.000

i = <u>41,16%</u>

Comprobemos lo anterior aplicando la fórmula de interés efectivo así:

IE = $(1+ip)^n – 1$

IE = $(1+9\%)^4 -1$

IE = $(1,09)^4 -1$

IE = <u>41,16%</u> EA

Ahora, si partimos de la tasa efectiva anual para llegar a la tasa del período aplicamos la fórmula así:

i = $(1+IE)^{1/n} - 1$

i = $(1+41,16\%)^{1/4} - 1$

i = $(1,4116)^{1/4} - 1$

i = 9% Trimestral

Y por último si queremos llegar a la tasa nominal a partir de la tasa periódica aplicamos la fórmula:

IN = ip*n

IN = 9% * 4

IN = 36% NATV

Ahora observemos para el mismo ejemplo anterior, el efecto que produce el uso de diferentes períodos de capitalización de los intereses.

TASA NOMINAL	F	IE
36% AV	$100.000*(1+0,36)^{1}$= 136.000	$(1+0,36)^{1}$)= 36%
36% SV	$100.000*(1+0,18)^{2}$= 139.240	$(1+0,18)^{2}$= 39.2%
36% TV	$100.000*(1+0,09)^{4}$= 141.158	$(1+0,09)^{4}$= 41.2%
36% BV	$100.000*(1+0,06)^{6}$= 141.852	$(1+0,06)^{6}$= 41.9%
36% MV	$100.000*(1+0,03)^{12}$= 142.576	$(1+0,03)^{12}$= 42.6%

Como podemos observar en la tabla anterior, el valor futuro va creciendo a medida que aumenta el número de períodos de capitalización en el año. Igualmente ocurre con la tasa efectiva. Por otra parte cuando el período de capitalización es uno sólo en el año, la tasa nominal y la efectiva son la misma, en este caso 36%.

De todo lo anterior podemos concluir que la tasa de interés nominal, sólo es usada para anunciar un negocio, mientras que la verdadera rentabilidad del negocio está dada por la tasa de interés efectiva

Tasa de interés vencida. Hablamos de tasa de interés vencida cuando la liquidación de los intereses se hace al final del período. Esta es la forma tradicional de liquidar los intereses. Por lo tanto cuando no se especifica el término vencido, se supone que se trata de una tasa vencida.

Tasa de interés anticipada. Hablamos de tasa de interés anticipada cuando los intereses se liquidan al comienzo del período. En este caso es necesario especificar en el enunciado que la liquidación es anticipada. Por ejemplo, 32% TA.

En muchas ocasiones se presentan operaciones financieras donde es necesario establecer equivalencias entre tasas vencidas y anticipadas. Para tal efecto utilizaremos las siguientes fórmulas de equivalencia.

$$\boxed{i_a = \frac{i_v}{1+i_v} \quad \text{y} \quad i_v = \frac{i_a}{1-i_a}}$$

Donde $\mathbf{I_v}$= interés vencido

$\mathbf{I_a}$ = interés anticipado

<u>**Ejemplo**</u>: ¿ Cuál es la tasa equivalente mensual anticipada de una tasa del 3,5% mensual vencida?

Tenemos que:

$i_a = \frac{0.035}{1+0.035} = 0,0338 =$ <u>**3,38%**</u> mensual anticipada

Y ahora, ¿ cuál es la tasa mensual vencida equivalente a una tasa del 4% mensual anticipada?

Tenemos que:

$i_v = \; 0.04 / 1 - 0.04 = 0,0417 =$ <u>**4,17%**</u> mensual vencida

> ***Cuando una operación viene dada con tasa anticipada, debe calcularse primero su equivalente vencida antes de desarrollar o aplicar las fórmulas financieras correspondientes para valores futuros y presentes.***

<u>**Ejemplo**</u>: Hallar la tasa de interés efectiva anual, para una tasa de interés del 18% anual liquidado trimestre anticipado.

Opción 1

Punto de partida
18% NATA (Tasa nominal)

$\Updownarrow$

Primer paso – hallar la tasa periódica anticipada
18 % / 4 trimestres = 4,5% TA (Tasa periódica trimestre anticipado)

$\Updownarrow$

Segundo paso – hallar la tasa periódica vencida
$i_v = \; 0.045 / (1-0,045) \; = 0,0471 = 4,71\%$ TV (Tasa periódica trimestre vencido)

$\Updownarrow$

Tercer paso – hallar la tasa efectiva anual
IE= $(1+ 0,0471)^4 – 1$
IE= 20,22%

En conclusión, una tasa del 18% nominal trimestre anticipado, equivale a una tasa efectiva anual del 20.22%.

Opción 2

Aplicamos directamente la fórmula de equivalencia entre tasas nominales anticipadas y la correspondiente anual vencida.

$$IE = (1-i)^{-n} - 1$$

Punto de partida
18% NATA (Tasa nominal)

⇕

Primer paso – hallar la tasa periódica anticipada
18 % / 4 trimestres = 4,5% TA (Tasa periódica trimestre anticipado)

⇕

Segundo paso – hallar la tasa efectiva anual
IE= (1- 0,045)-4 – 1
IE= 20,22%

Ejemplo: Dada una tasa del 36% NATV (nominal anual trimestre vencido), hallar la tasa nominal anual mensual anticipada equivalente.

Punto de partida
36% NATV (Tasa nominal)

⇕

Primer paso – Hallar la tasa periódica vencida
36 % / 4 trimestres = 9% TV (Tasa periódica trimestre vencido)

⇕

Segundo paso – Hallar la tasa periódica mensual vencida
$IE= (1+ 0,09)^3 – 1 = 2,91\%$ MV (Tasa periódica mes vencido)

⇕

Tercer paso – Hallar la tasa periódica mensual anticipada
$I_a= 0.0291 / (1+0,0291) = 0,0283 = 2,83\%$ MA

⇕

Cuarto paso – Hallar la tasa nominal mensual anticipada
2,83%*12 = 33,98% NAMA

Tabla 4. Reglas de oro para el manejo de tasas

- **NUNCA divida una tasa efectiva.**
- **NUNCA multiplique una tasa nominal.**
- **SIEMPRE que multiplique una tasa, el resultado será una nominal.**
- **SIEMPRE que divida una tasa nominal el resultado será una tasa periódica.**
- **NUNCA divida una tasa periódica. Si requiere hacerlo, suponga que esta es una efectiva.**
- **La equivalencia entre tasas anticipadas y vencidas sólo aplica para tasas periódicas.**
- **Para llegar a una tasa efectiva, siempre debemos partir de una tasa periódica.**

Nota: Fuente: http://www.javeriana.edu.co/decisiones/julio/matfin.ppt

Series uniformes o anualidades

Se habla de serie uniforme o anualidad cuando dentro del plazo de una operación financiera, se presentan movimientos de efectivo (ingresos o egresos), que cumplen con las siguientes condiciones:

- Todos los movimientos son de igual valor
- Todos los movimientos se hacen a iguales intervalos de tiempo
- A todos los movimientos se les aplica la misma tasa de interés
- El número de movimientos debe ser igual al número de períodos

Los valores de la serie reciben el nombre de anualidad y se conocen por la sigla **A.**

La siguiente es la nomenclatura para el manejo de problemas relacionados con anualidades:

P = valor presente

F = valor futuro

A = valor de la anualidad o pago periódico

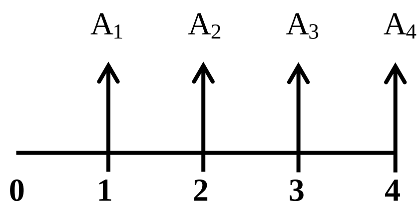
n = número de pagos periódicos

i = tasa de interés por período

Las principales clases de anualidades de acuerdo a su naturaleza son:

- Anualidad vencida
- Anualidad anticipada
- Anualidad diferida
- Anualidad perpetua

Anualidad vencida. Se conoce como anualidad vencida aquella en la que el pago de las cuotas se hace al final de cada período.



De acuerdo al diagrama de flujo anterior, el valor presente de una anualidad vencida se ubica en el momento cero, y el valor futuro se ubica en el momento cuatro.

- *Valor presente*. El valor presente de una serie uniforme resulta de sumar el valor presente de cada una de las anualidades, y su fórmula es la siguiente.

$$\boxed{VP = \frac{A * (1+i)^n - 1}{i * (1+i)^n}}$$

$$VP = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i * (1+i)^n}\right]$$

<u>**Ejemplo**</u>: Cuánto dinero se debe invertir hoy en una cuenta de ahorros que paga un interés del 9% trimestral, para poder retirar $500.000 durante cuatro trimestres.

P = ?

A = $ 500.000

n = 4 trimestres

i = 9% trimestral

$$\boxed{VP = 500.000 * (1+9\%)^4 - 1}$$

$$9\% * (1+9\%)^4$$

VP= $ 1.619.860

- *Valor futuro.* El valor futuro de una serie uniforme resulta de sumar el valor futuro de cada una de las anualidades, y su fórmula es la siguiente.

$$VF = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

Ejemplo: Si una persona ahorra $ 100.000 mensuales a una tasa del 2.5% mensual, cuánto habrá acumulado al cabo de dos años.

A = $ 100.000

n = 24 meses

i = 2.5%% mensual

F = ?

$$VF= \frac{100.000\ (1+2.5\%)^{24} - 1}{2.5\%}$$

VF= $ 3.234.904

- *Anualidad conociendo el valor presente*

$$\mathbf{A = VP}\left[\frac{\mathbf{i(1+ i)^n}}{\mathbf{(1+ i)^n -1}}\right]$$

<u>Ejemplo</u>: Si una persona adquiere un auto en $ 30.000.000 a una tasa del 1% mensual y a un plazo de cinco años, de cuánto son las cuotas mensuales?

P = $ 30.000.000

n = 60 meses

i = 1%% mensual

A = ?

$$\boxed{\mathbf{A =} \frac{\mathbf{30.000.000 * (1\% * (1+ 1\%)^{60})}}{\mathbf{(1+ 1\%)^{60} -1}}}$$

A= <u>$ 667.333</u>

- *Anualidad conociendo el valor futuro*

$$\mathbf{A = VF}\left[\frac{\mathbf{i}}{\mathbf{(1+ i)^n -1}}\right]$$

<u>Ejemplo</u>: ¿ Cuánto se debe depositar trimestralmente en una cuenta de ahorros que paga el 6.5% trimestral, si dentro de dos años se desea tener ahorrado $ 10.000.000 ?

F = $ 10.000.000

n = 8 trimestres

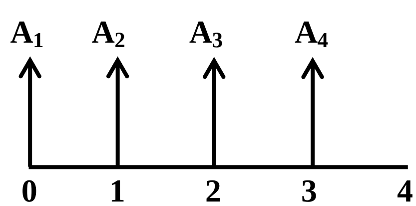
i = 6.5%% trimestral

A = ?

$$\boxed{\mathbf{A} = \frac{\mathbf{10.000.000 * (6.5\%)}}{\mathbf{(1+ 6.5\%)^{8} -1}}}$$

A= <u>$ 992.373</u>

Anualidad anticipada. Se conoce como anualidad anticipada aquella en la que el pago de las cuotas se hace al principio de cada período.



- *Valor presente*. Si en este caso aplicamos la fórmula de valor presente para las anualidades vencidas, obtenemos que el valor presente de la anualidad anticipada se ubicaría un período antes que el primer pago, es decir, en el período -1. Por lo tanto tenemos que llevarlo al período cero, multiplicándolo por el factor (1+i).

$$VP = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right](1+i)$$

- *Valor futuro.* De igual manera si aplicamos la fórmula de valor futuro de las anualidades vencidas para hallar el valor futuro de una anualidad anticipada, tendríamos que este se ubicaría un período antes del último pago, por lo cual se hace necesario llevarlo un período adelante, multiplicándolo por el factor (1+i).

$$VF = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right](1+i)$$

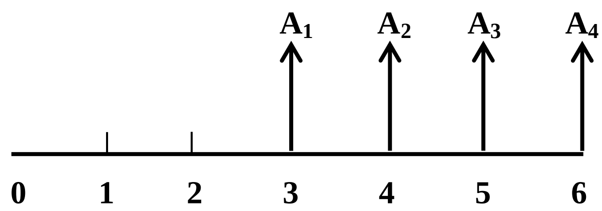
- *Anualidad anticipada conociendo el valor presente*

$$A = \frac{VP}{(1+i)}\left[\frac{i\,(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right]$$

- *Anualidad anticipada conociendo el valor futuro*

$$A = \frac{VF}{(1+i)}\left[\frac{i}{(1+i)^n - 1}\right]$$

Anualidad diferida. Se conoce como anualidad diferida aquella en la que el primer pago se hace varios períodos después de iniciada la operación financiera.



El lapso de tiempo durante el cual no hay movimiento de efectivo se denomina período de gracia o tiempo muerto, y se identifica con (**r**) . En el caso del diagrama de flujo anterior **r**= 2.

Adicionalmente tenemos el lapso de tiempo durante el cual se dan los movimientos de efectivo, este se identifica con (**s**). En el caso del diagrama de flujo anterior **s**= 4

- *Valor presente*

$$VP = \frac{A}{(1+i)^{r}} \left[\frac{(1+i)^{s} - 1}{i\,(1+i)^{s}} \right]$$

- *Anualidad*

$$A = P\,(1+i)r \left[\frac{i\,(1+i)^{s}}{(1+i)^{s} - 1} \right]$$

Anualidad perpetua. Se conoce como anualidad perpetua aquella que tiene un número infinito de pagos o, en otras palabras, no existe el último pago.

$$VP = \frac{A}{i}$$

Series Variables

Gutiérrez, (2002) define así:

> Se conocen como series variables a un conjunto de pagos periódicos desiguales pero que siguen un patrón, en el cual cada pago es igual al anterior más una cantidad positiva o negativa; esta cantidad puede ser constante o proporcional al pago inmediatamente anterior y recibe el nombre de gradiente. (p. 138)

Gradiente aritmético. Si la cantidad en que varía el pago es constante, se habla de un gradiente aritmético (por ejemplo cada pago aumenta o disminuye en $100.000). Si el incremento es positivo, se llama gradiente aritmético creciente**.** Y si el incremento es negativo, se llama gradiente aritmético decreciente.

Para esta clase de series de pagos se utiliza por lo general la siguiente nomenclatura:

F: valor futuro

P: valor presente

A: valor del primer pago

G: valor del incremento (gradiente aritmético)

n: número de pagos

i: tasa de interés del período

A continuación las fórmulas:

- *Valor presente gradiente aritmético vencido*

$$P = \frac{G}{i}\left(\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} - \frac{n}{(1+i)^n}\right)$$

- *Valor presente gradiente aritmético anticipado*

$$P = \frac{G(1+i)}{i}\left(\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} - \frac{n}{(1+i)^n}\right)$$

- *Valor futuro gradiente aritmético vencido*

$$F = \frac{G}{i}\left(\frac{(1+i)^n - 1}{i} - n\right)$$

- *Valor futuro gradiente aritmético anticipado*

$$F = \frac{G(1+i)}{i}\left(\frac{(1+i)^n - 1}{i} - n\right)$$

- *Valor primera cuota gradiente aritmético vencido dado VP*

$$A = P\left(\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right) - G\left(\frac{1}{i} - \frac{n}{(1+i)^n - 1}\right)$$

- *Valor primera cuota gradiente aritmético vencido dado VF*

$$A = F\left(\frac{i}{(1+i)^n - 1}\right) - G\left(\frac{1}{i} - \frac{n}{(1+i)^n - 1}\right)$$

- *Valor primera cuota gradiente aritmético anticipado dado VP*

$$A = \frac{P}{(1+i)}\left(\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right) - G\left(\frac{1}{i} - \frac{n}{(1+i)^n - 1}\right)$$

- *Valor primera cuota gradiente aritmético anticipado dado VF*

$$A = \frac{F}{(1+i)}\left(\frac{i}{(1+i)^n - 1}\right) - G\left(\frac{1}{i} - \frac{n}{(1+i)^n - 1}\right)$$

Gradiente geométrico. Si la cantidad en que varía el pago es proporcional al pago inmediatamente anterior se habla de gradiente geométrico (por ejemplo cada pago aumenta o disminuye un 5%). Si la variación porcentual es positiva, se tiene un gradiente geométrico creciente. Si la variación porcentual es negativa, se tiene un gradiente geométrico decreciente.

Para esta clase de series de pagos se utiliza por lo general la siguiente nomenclatura:

F: valor futuro

P: valor presente

A: valor del primer pago

n: número de pagos

i: tasa de interés del período

k: tasa de incremento por período (gradiente geométrico)

A continuación las fórmulas:

- *Valor presente gradiente geométrico vencido*

$$P = \frac{A}{i-k}\left[\frac{(1+i)^n - (1+k)^n}{(1+i)^n}\right]$$

- *Valor presente gradiente geométrico anticipado*

$$P = A\,\frac{1+i}{i-k}\left[\frac{(1+i)^n - (1+k)^n}{(1+i)^n}\right]$$

- *Valor futuro gradiente geométrico vencido*

$$F = A\left[\frac{(1+i)^n - (1+k)^n}{i - k}\right]$$

- *Valor futuro gradiente geométrico anticipado*

$$F = A(1+i)\left[\frac{(1+i)^n - (1+k)^n}{i - k}\right]$$

- *Valor primera cuota gradiente geométrico vencido dado VP*

$$A = P\left[\frac{(1+i)^n\ (i-k)}{(1+i)^n - (1+k)^n}\right]$$

- *Valor primera cuota gradiente geométrico vencido dado VF*

$$A = F\left[\frac{(i-k)}{(1+i)^n - (1+k)^n}\right]$$

- *Valor primera cuota gradiente geométrico anticipado dado VP*

$$A = \frac{P}{(1+i)}\left[\frac{(1+i)^n\ (i-k)}{(1+i)^n\ -\ (1+k)^n}\right]$$

- *Valor primera cuota gradiente geométrico anticipado dado VF*

$$A = \frac{F}{(1+i)}\left[\frac{(i-k)}{(1+i)^n\ -\ (1+k)^n}\right]$$

Gradiente diferido. Se conoce como gradiente diferido aquella serie en la que el primer pago de la serie se hace varios períodos después de iniciada la operación financiera. El lapso de tiempo durante el cual no hay movimiento de efectivo se denomina período de gracia o tiempo muerto, y se identifica con (**r**) y el lapso de tiempo durante el cual se dan los movimientos de efectivo, se identifica con (**s**).

- *Gradiente aritmético diferido*

A continuación las fórmulas:

- *Valor presente***.** Este gradiente resulta de la suma del valor presentes de la serie uniforme más el valor presente de la serie variable.

$$P = \frac{A}{(1+i)^r}\left(\frac{(1+i)^s - 1}{i(1+i)^s}\right) + \frac{G}{i(1+i)^r}\left(\frac{(1+i)^s - 1}{i(1+i)^s} - \frac{s}{(1+i)^s}\right)$$

- *Anualidad*

$$A = P(1+i)^r\left(\frac{i(1+i)^s}{(1+i)^s - 1}\right) - G\left(\frac{1}{i} - \frac{s}{(1+i)^s - 1}\right)$$

- *Gradiente geométrico diferido*

A continuación las fórmulas:

- *Valor presente*

$$P = \frac{A}{i-k}\left[\frac{(1+i)^s - (1+k)^s}{(1+i)^s}\right]\frac{1}{(1+i)^r}$$

- *Anualidad*

$$A = P(1+i)^r\,(i-k)\left[\frac{(1+i)^s}{(1+i)^s - (1+k)^s}\right]$$

Amortización

Amortización. Se conoce como amortización, al proceso mediante el cual una deuda es cancelada haciendo uso de cualquier sistema de pagos y durante un período de tiempo determinado.

Tabla de amortización. Una tabla de amortización es una representación de la trayectoria de un crédito. Se distinguen principalmente los siguientes elementos:

- *Saldo inicial*. Es el saldo de la deuda al inicio de cada período. En el primer período, equivale al valor del crédito, y en los demás períodos equivale al saldo final del período anterior.
- *Cuota.* Corresponde al valor que se paga en cada período. Se compone de intereses y de abono a capital. El valor de la cuota depende del sistema de amortización que se utilice.
- *Intereses.* corresponde al valor de los intereses pagados por el hecho de utilizar el capital por un período de tiempo determinado. Se calcula teniendo en cuanta el saldo de capital al inicio de cada período y multiplicado por la tasa de interés periódica.
- *Capital.* Corresponde a la parte de la cuota que va a disminuir el valor de la deuda. Se calcula restando los intereses del valor de la cuota.
- *Saldo final.* Corresponde al saldo de la deuda al final de cada período. En el último período es igual a cero. Se calcula restando el abono a capital del saldo inicial del período.

Ejemplo: A continuación veremos algunos modelos de tablas de amortización correspondientes a un mismo crédito pero usando diferentes sistemas de amortización.

- Sistema de amortización cuota fija

Tabla 5. Sistema de amortización cuota fija

SISTEMA DE AMORTIZACION CUOTA FIJA		
Crédito	5.000.000	
Plazo	12	meses
Tasa	1,5%	mensual
CUOTA	**458.400**	

TABLA DE AMORTIZACION					
Per	**SALDO INICIAL**	**INTERES**	**CAPITAL**	**CUOTA**	**SALDO FINAL**
0					
1	5.000.000	75.000	383.400	458.400	4.616.600
2	4.616.600	69.249	389.151	458.400	4.227.449
3	4.227.449	63.412	394.988	458.400	3.832.461
4	3.832.461	57.487	400.913	458.400	3.431.548
5	3.431.548	51.473	406.927	458.400	3.024.621
6	3.024.621	45.369	413.031	458.400	2.611.590
7	2.611.590	39.174	419.226	458.400	2.192.364
8	2.192.364	32.885	425.515	458.400	1.766.850
9	1.766.850	26.503	431.897	458.400	1.334.953
10	1.334.953	20.024	438.376	458.400	896.577
11	896.577	13.449	444.951	458.400	451.626
12	451.626	6.774	451.626	458.400	0

Nota: Fuente Elaboración Propia mediante Microsoft Excel 2010

En este caso se tiene que: el saldo inicial es el mismo valor del crédito, es decir, \$5.000.000; el valor de la cuota se halla aplicando la fórmula de series uniformes o anualidades que da como resultado \$458.400; el valor de los intereses del primer período es igual al saldo inicial \$5.000.000 por la tasa de interés periódica 1,5%, que da como resultado \$75.000; el abono a capital para el primer período sale de restar el valor de la cuota \$458.400, menos el valor de los intereses del primer período \$75.000, que da como resultado \$383.400; y por último el saldo final del primer período resulta de restar el saldo inicial $5.000.000, menos el abono a capital $383.400, que da como resultado $4.616.600. Siempre el saldo final del último período debe ser cero.

- Sistema de amortización con gradiente aritmético

Tabla 6. Sistema de amortización gradiente aritmético

SISTEMA DE AMORTIZACION GRADIENTE ARITMÉTICO CRECIENTE VENCIDO		
Crédito	5.000.000	
Plazo	12	meses
Tasa	1,5%	mensual
Grad.	50.000	
1a.Cuota	**192.266**	

TABLA DE AMORTIZACION					
Per	**SALDO INICIAL**	**INTERES**	**CAPITAL**	**CUOTA**	**SALDO FINAL**
0					
1	5.000.000	75.000	117.266	192.266	4.882.734
2	4.882.734	73.241	169.025	242.266	4.713.708
3	4.713.708	70.706	221.561	292.266	4.492.148
4	4.492.148	67.382	274.884	342.266	4.217.263
5	4.217.263	63.259	329.007	392.266	3.888.256
6	3.888.256	58.324	383.943	442.266	3.504.314
7	3.504.314	52.565	439.702	492.266	3.064.612
8	3.064.612	45.969	496.297	542.266	2.568.315
9	2.568.315	38.525	553.742	592.266	2.014.573
10	2.014.573	30.219	612.048	642.266	1.402.525
11	1.402.525	21.038	671.228	692.266	731.297
12	731.297	10.969	731.297	742.266	**0**

Nota: Fuente Elaboración Propia mediante Microsoft Excel 2010

En este caso se tiene que: el valor de la primera cuota se halla aplicando la fórmula de series variables, que da como resultado $192.266; el valor de la segunda cuota y subsiguientes, se halla sumando el valor de la cuota del período inmediatamente anterior más el valor del gradiente $50.000. De esta forma el valor de la última cuota es de $742.266.

- Sistema de amortización con gradiente geométrico creciente vencido

Tabla 7. Sistema de amortización gradiente geométrico

SISTEMA DE AMORTIZACION GRADIENTE GEOMETRICO CRECIENTE VENCIDO		
Crédito	5.000.000	
Plazo	12	meses
Tasa	1,5%	mensual
Grad.	5%	
1a.Cuota	**348.584**	

TABLA DE AMORTIZACION					
Per	**SALDO INICIAL**	**INTERES**	**CAPITAL**	**CUOTA**	**SALDO FINAL**
0					
1	5.000.000	75.000	273.584	348.584	4.726.416
2	4.726.416	70.896	295.117	366.013	4.431.300
3	4.431.300	66.469	317.844	384.313	4.113.456
4	4.113.456	61.702	341.827	403.529	3.771.629
5	3.771.629	56.574	367.131	423.706	3.404.498
6	3.404.498	51.067	393.823	444.891	3.010.674
7	3.010.674	45.160	421.975	467.135	2.588.699
8	2.588.699	38.830	451.662	490.492	2.137.037
9	2.137.037	32.056	482.961	515.017	1.654.076
10	1.654.076	24.811	515.956	540.768	1.138.120
11	1.138.120	17.072	550.734	567.806	587.385
12	587.385	8.811	587.385	596.196	**0**

Nota: Fuente Elaboración Propia mediante Microsoft Excel 2010

En este caso se tiene que el valor de la primera cuota se halla aplicando la fórmula de series variables, que da como resultado $348.584; el valor de la segunda cuota y subsiguientes, se halla multiplicando el valor de la cuota inmediatamente anterior por el factor (1+5%).

La evaluación financiera en los proyectos de inversión - indicadores de conveniencia económica

Valor presente neto (VPN). Gutiérrez (2002) define el valor presente neto como, “el valor de los resultados obtenidos a lo largo de un negocio, expresados en su valor equivalente en pesos de hoy” (p.224). Matemáticamente se define como la diferencia entre el valor presente de los ingresos y el valor presente de los egresos de un proyecto. Financieramente se define como la cantidad que se suma o se resta al valor actual de la empresa o inversionista.

Valor presente neto= valor presente de los ingresos – valor presente de los egresos

Para calcular el valor presente neto de un proyecto es necesario conocer:

- Tiempo de duración del proyecto
- Los ingresos y los egresos ubicados en el tiempo
- La tasa de descuento o tasa de oportunidad a la cual se van a descontar los flujos
  - *Tasa de descuento*. Baca (s.f.) define la tasa de descuento o tasa de oportunidad como, “la tasa de interés más alta que un inversionista está dispuesto a sacrificar, con el objeto de realizar un proyecto”. (p. 197)

Teniendo en cuenta lo anterior, el valor presente neto puede interpretarse de la siguiente forma:

Si VPN > 0, significa que la rentabilidad del proyecto es superior a la exigida por el inversionista, y por lo tanto el proyecto es conveniente.

Si VPN = 0, significa que la rentabilidad del proyecto es igual a la exigida por el inversionista y por lo tanto también es conveniente.

Si VPN < 0, significa que la rentabilidad del proyecto es inferior a la exigida por el inversionista y por lo tanto no es conveniente. Vale la pena aclarar que un VPN negativo no necesariamente significa que el proyecto arroje pérdida, sino que para las expectativas del inversionista de acuerdo a su tasa de oportunidad el proyecto no es atractivo.

Para ilustrar lo anterior se presenta el siguiente ejemplo tomado del libro Matemáticas Financieras con apoyo en sistemas del autor Jairo Gutiérrez Carmona (págs. 245-246).

Ejemplo: Calcular el VPN de un negocio a 12 años, que presenta los siguientes ingresos y egresos aplicando una tasa de descuento del 26% y 34%:

Año	Ingresos	Egresos
0		15.000.000
1	5.350.000	500.000
2	6.350.000	500.000
3	9.350.000	1.750.000
4	6.400.000	950.000
5	5.400.000	1.050.000
6	4.200.000	3.600.000
7	3.800.000	1.600.000
8	3.800.000	1.750.000
9	2.000.000	2.850.000
10	1.000.000	850.000
11	500.000	200.000
12	8.000.000	

Primero se procede a calcular los flujos netos por período, es decir, ingresos menos egresos.

Año	Ingresos	Egresos	Flujo Neto
0		15.000.000	(15.000.000)
1	5.350.000	500.000	4.850.000
2	6.350.000	500.000	5.850.000
3	9.350.000	1.750.000	7.600.000
4	6.400.000	950.000	5.450.000
5	5.400.000	1.050.000	4.350.000
6	4.200.000	3.600.000	600.000
7	3.800.000	1.600.000	2.200.000
8	3.800.000	1.750.000	2.050.000
9	2.000.000	2.850.000	(850.000)
10	1.000.000	850.000	150.000
11	500.000	200.000	300.000
12	8.000.000		8.000.000

Rango para calcular el VPN

Posteriormente se calcula el VPN de los flujos netos para las dos tasas de descuento. Hay que tener en cuenta que para el cálculo del VPN no se toman en cuenta el valor correspondiente al período cero por encontrarse ya en valor actual. Por tal razón debe sumarse al resultado de la función VPN que toma en cuenta los flujos del período uno al doce.

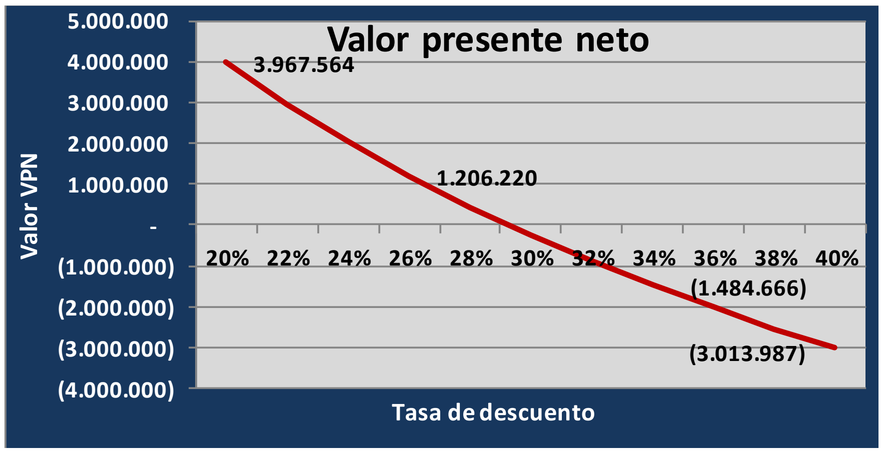
CALCULOS		
Tasa dto	26%	34%
VPN	1.206.220	(1.484.666)

Para el primer caso, el VPN de $ 1.206.220, significa que el inversionista obtiene la rentabilidad esperada del 26% y además aumenta su riqueza en este valor. Para el segundo caso, el VPN negativo de $ 1.484.666 no quiere decir que el proyecto arroje pérdidas, sólo que si la tasa de oportunidad del inversionista es del 34% el negocio no le es conveniente ya que restaría valor a su patrimonio.

La siguiente gráfica permite ver la sensibilidad del VPN ante variaciones en la tasa de descuento.

Gráfico 1. Sensibilidad del VPN

TIO	VPN
20%	3.967.564
22%	2.955.426
24%	2.039.265
26%	1.206.220
28%	445.590
29%	(251.590)
32%	(892.873)
34%	(1.484.666)
36%	(2.032.432)
38%	(2.540.858)
40%	(3.013.987)



Nota: Fuente Elaboración Propia mediante Microsoft Excel 2010

De la gráfica anterior se puede concluir que a menor tasa de descuento, mayor es el VPN, y a mayor tasa de descuento, menor es el VPN.

Costo anual uniforme equivalente (CAUE*)*. Como afirma Gutierrez (2002):

> El costo anual uniforme equivalente es el valor promedio de los ingresos y los egresos netos de un negocio, expresados en una cuota uniforme periódica, que equivale a todos los flujos del negocio. Matemáticamente se define como la anualidad equivalente del valor presente neto de un proyecto. (p. 250).

Para ilustrar lo anterior se presenta el siguiente ejemplo tomado del libro Matemáticas Financieras con ecuaciones de diferencia finita del autor Jaime García (págs. 307-308).

Ejemplo: Un proyecto requiere una inversión hoy de $ 4 millones y nuevas reinversiones en los meses tres, cuatro y cinco de $ 500.000 cada una; se obtienen unos ingresos de $ 850.000 mensuales a partir del sexto mes hasta finales del año en el que el proyecto se termina con un valor de mercado de $ 1.500.000. Si la tasa de oportunidad del inversionista es del 3.5% mensual, hallar el CAUE mensual.

Año	Ingresos	Egresos	Flujo Neto
0		4.000.000	(4.000.000)
1			0
2			0
3		500.000	(500.000)
4		500.000	(500.000)
5		500.000	(500.000)
6	850.000		850.000
7	850.000		850.000
8	850.000		850.000
9	850.000		850.000
10	850.000		850.000
11	850.000		850.000
12	2.350.000		2.350.000

Tasa dto	3,50%
VPN	61.036
CAUE	6.316

Primero se procede a calcular los flujos netos de cada período. Posteriormente se calcula el VPN de los flujos del período uno al doce y le sumamos el valor del período cero. Por último se halla el valor del CAUE aplicando la fórmula para series uniformes de una anualidad dado un valor presente.

Este resultado quiere decir que llevar a cabo este proyecto equivale a tener un ingreso mensual de $ 6.316 durante doce meses.

Tasa interna de retorno (TIR). Baca (s.f.), define la tasa interna de retorno como:

> La tasa a la cual son descontados los flujos de caja de un proyecto de tal forma que los ingresos y los egresos sean iguales. Desde el punto de vista matemático, la tasa interna de retorno de un flujo de caja de un proyecto es aquella tasa que hace el valor presente neto (VPN) igual a cero (p. 248).

Es necesario tener en cuenta que la TIR representa únicamente la rentabilidad o el costo de los recursos que permanecen invertidos en el proyecto. No toma en cuenta la reinversión de los recursos que libera el proyecto.

Al momento de evaluar una alternativa de inversión, debemos saber cuál es la tasa de oportunidad del inversionista (TIO) para así compararla con la TIR que arroje el proyecto. De manera que:

Si TIR > TIO => el proyecto es conveniente para el inversionista

Si TIR < TIO => el proyecto no es conveniente para el inversionista

Si TIR = TIO=> el proyecto es indiferente para el inversionista

Para ilustrar lo anterior se presenta el siguiente ejemplo tomado del libro Matemáticas Financieras con ecuaciones de diferencia finita del autor Jaime García (pág. 328):

<u>Ejemplo</u>: Una persona invierte en un proyecto hoy $ 2 millones y recibe unas utilidades trimestrales de $ 603.842 durante un año. Si la Tasa de oportunidad del inversionista es del 7.5% trimestral, determinar, a partir de la tasa interna de retorno, si se debe llevar a cabo el proyecto o no.

Trim	Ingresos	Egresos	Flujo Neto
0		2.000.000	(2.000.000)
1	603.842		603.842
2	603.842		603.842
3	603.842		603.842
4	603.842		603.842

TIR	8,0%

VPN	2.000.000	2.000.000	**0**

Para el ejemplo la TIR, 8% es mayor que la TIO, 7.5%. Por lo tanto el proyecto se debe aceptar.

Tasa de rentabilidad verdadera (TRV). A diferencia de la TIR que sólo considera los recursos invertidos en el proyecto, la tasa de rentabilidad verdadera o TIR modificada, considera además el costo de financiación de los recursos invertidos, así como la reinversión a la tasa de oportunidad del inversionista, de los recursos que genera el proyecto. Matemáticamente es igual a la relación entre el valor futuro de los ingresos del proyecto y el valor presente de los egresos del proyecto.

A continuación la fórmula:

$$\text{TIRM} = \left[\frac{\text{Valor futuro de los ingresos}}{\text{Valor presente de los egresos}} \right]^{1/n} - 1$$

Ejemplo: Hallar la TRV para los siguientes flujos, teniendo en cuenta una tasa de financiación del 1.2% para los recursos invertidos y una tasa de reinversión del 2.5% para los flujos que genera el proyecto.

Mes	Egresos	Ingresos
0	(25.000.000)	
1	(350.000)	
2	(500.000)	
3	(350.000)	
4	(500.000)	7.500.000
5	(350.000)	9.500.000
6	(500.000)	12.500.000

Primero se procede a calcular los flujos netos del proyecto:

Mes	Egresos	Ingresos	Flujo Neto
0	(25.000.000)		(25.000.000)
1	(350.000)		(350.000)
2	(500.000)		(500.000)
3	(350.000)		(350.000)
4	(500.000)	7.500.000	7.000.000
5	(350.000)	9.500.000	9.150.000
6	(500.000)	12.500.000	13.000.000

Ahora se calcula el valor presente de los egresos y el valor futuro de los ingresos para poder hallar la TRV por medio de la función de Excel y por la fórmula matemática:

Mes	Egresos	Ingresos	Flujo Neto	VP Egresos	VF Ingresos
0	(25.000.000)		(25.000.000)	(25.000.000)	
1	(350.000)		(350.000)	(345.850)	
2	(500.000)		(500.000)	(488.213)	
3	(350.000)		(350.000)	(337.696)	
4	(500.000)	7.500.000	7.000.000		7.354.375
5	(350.000)	9.500.000	9.150.000		9.378.750
6	(500.000)	12.500.000	13.000.000		13.000.000
			TOTALES	26.171.759	29.733.125

Tasa de financiación	1,20%
Tasa de Reinversión	2,50%

Función TIR	2,11%
Función TIRM	2,15%
Fórmula	2,15%

En este caso la TIR es inferior a la TIRM, ya que se tuvo en cuenta la tasa de financiación de los recursos invertidos, así como la tasa de reinversión de los flujos positivos generados por el proyecto.

Relación Beneficio - Costo (B/C). Hace referencia al índice que resulta de la relación entre los beneficios (ingresos) y los costos (egresos) de un proyecto. También indica cuál es la utilidad adicional a la tasa de interés de oportunidad (TIO) que genera un proyecto. Matemáticamente se define como la relación entre el valor presente de los ingresos y el valor presente de los egresos, ambos descontados a la TIO.

Su resultado se interpreta de la siguiente manera:

Si **B/C >1** => significa que los ingresos netos son superiores a los egresos netos. El proyecto tiene un rendimiento adicional a la TIO y por lo tanto el proyecto es conveniente para el inversionista.

Si **B/C <1** => significa que los egresos netos son superiores a los ingresos netos. El proyecto tiene un rendimiento inferior a la TIO y por lo tanto el proyecto no es conveniente para el inversionista.

Si B/C = 1 => significa que los ingresos netos y los egresos netos son iguales. El rendimiento del negocio es igual a la TIO y por lo tanto es indiferente ejecutar o no el proyecto.

Período de recuperación de la inversión (PRI). Este es un índice utilizado para medir el tiempo que se requiere para recuperar el valor de la inversión en un proyecto determinado.

Para ilustrar lo anterior se presenta el siguiente ejemplo tomado de la página de internet www.pymesfuturo.com en su sección de evaluación financiera de proyectos de inversión visitada el día 7 de abril de 2012:

Se tiene el siguiente proyecto con sus respectivos flujos netos de efectivo.

Mes	FNE
0	(1.000)
1	600
2	300
3	300
4	200
5	500

Cálculo del PRI:

Al ir acumulando los fondos netos de efectivo se tiene que, hasta el periodo tres, su sumatoria es de 600+300+300= 1.200, valor mayor al monto de la inversión inicial, $1.000. Quiere esto decir que el periodo de recuperación se encuentra entre los periodos dos y tres.

Para determinarlo con mayor exactitud se sigue el siguiente proceso:

- Primer se toma el periodo anterior a la recuperación total (dos)
- Se calcule el costo no recuperado al principio del año dos: 1.000 - 900 = 100. Hay que recordar que los fondos netos de efectivo del periodo uno y dos suman $900 y que la inversión inicial asciende a $1.000

- Se divide el costo no recuperado (100) entre el fondo neto de efectivo del año siguiente (tres), 300: 100÷300 = 0.33
- Se suma al periodo anterior al de la recuperación total (dos), el valor calculado en el paso anterior (0.33)

El periodo de recuperación de la inversión, para este proyecto y de acuerdo a sus flujos netos de efectivo, es de 2.33 períodos.

Valor económico agregado (Econimic Value Added - EVA). El EVA es un indicador que permite calcular y evaluar la riqueza generada por la empresa durante un ejercicio. A diferencia de la utilidad contable, el EVA sí refleja el costo del capital del patrimonio.

Si el EVA es positivo, quiere decir que la empresa ha obtenido una rentabilidad superior a su costo de capital y por lo tanto ha creado valor para los accionistas. Por el contrario, si el EVA es negativo, quiere decir que la empresa no logró cubrir su costo de capital y por lo tanto ha destruido valor para los accionistas.

Fórmula para el cálculo del EVA:

(EVA) = UNODI – TOTAL ACTIVOS* (CPPC)

UNODI = **U**tilidad **N**eta **O**perativa **D**espués de **I**mpuestos

CPPC = **C**osto **P**romedio **P**onderado de **C**apital

2. MARCO METODOLÓGICO

A continuación se describe la estructura básica del desarrollo de los modelos que serán elaborados en la hoja de cálculo Excel y que formarán parte integral de este informe final de investigación.

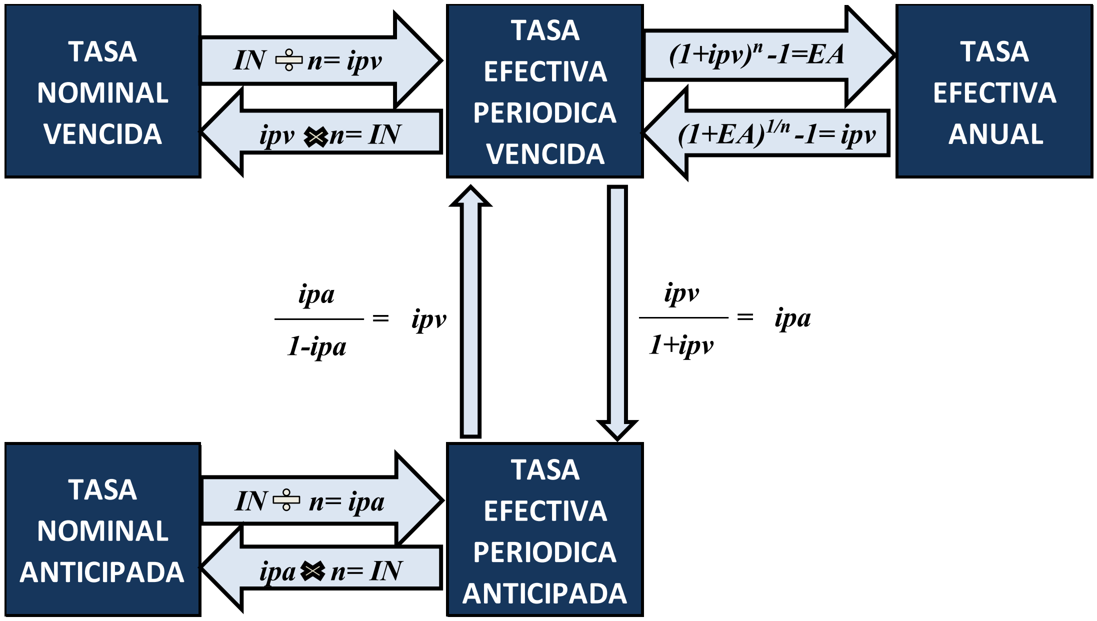
Descripción de la estructura básica del desarrollo de los modelos.

Para el desarrollo de todos los modelos se contará con la ayuda de la hoja de cálculo Excel aprovechando sus múltiples herramientas y funciones financieras que facilitan este trabajo. Además se tendrán en cuenta las fórmulas de las matemáticas financieras vistas en el capítulo uno.

Desarrollo modelo conversión de tasas de interés

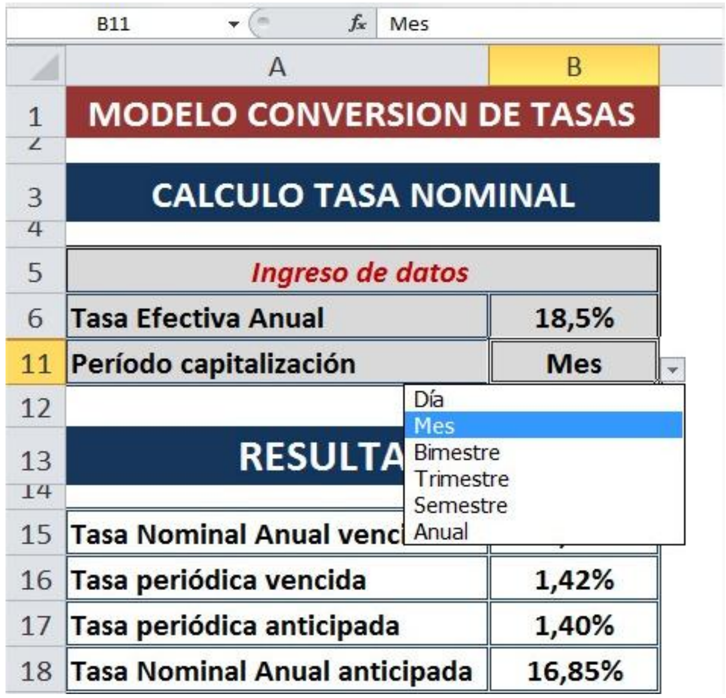
Para el desarrollo de este modelo se partirá del siguiente esquema, que abarca las diferentes posibilidades que pueden presentarse a la hora de trabajar con tasas de interés, y la ruta a seguir en cada uno de los casos.

Figura 2. Modelo conversión de tasas de interés



Nota: Fuente http://www.scribd.com/doc/54454980/Como-construir-un-modelo-de-conversion-de-tasas

Como se puede ver, se hará uso de las fórmulas que brinda las matemáticas financieras vistas en el capítulo dos. Adicionalmente se aplicarán dos funciones lógicas de Excel; la función de condicional ***SI***, y la función ***Y.*** Por último se usará la función de Excel para crear listas de datos mediante la herramienta de ***validación de datos*** tal como se aprecia a continuación.



Desarrollo modelo anualidades vencida, anticipada, diferidas y perpetuas

Para el desarrollo del modelo de anualidades o series uniformes se elaboró una tabla que contiene la sintaxis de la fórmula, las variables independientes (ingreso de datos) y la variable dependiente (resultado buscado basado en la fórmula de matemáticas financieras). A continuación algunos ejemplos.

Valor Presente de una serie uniforme con anualidad vencida			
Sintaxis (P/A, i%, n)			
Tasa Per.	**Nper**	**ANUALIDAD**	**VP**
9,00%	12	500.000	**3.580.363**

Var. Independientes

$$VP = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i * (1+i)^n}\right]$$

Valor de la anualidad anticipada conociendo el valor presente			
Sintaxis			
(A/P, i%, n)			
Tasa Per.	**Nper**	**VP**	**ANUALIDAD**
2,50%	12	24.000.000	**2.282.625**

Var. Independientes

$$A = \frac{VP}{(1+i)}\left[\frac{i\,(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right]$$

Desarrollo modelo gradientes, aritméticos y geométricos crecientes y decrecientes y gradientes diferidos

Al igual que en el caso anterior, para el desarrollo de estos modelos se elaboró una tabla que contiene la sintaxis de la fórmula, las variables independientes (ingreso de datos) y la variable dependiente (resultado buscado basado en la fórmula de matemáticas financieras). A continuación algunos ejemplos.

Valor Presente Gradiente Aritmético Anticipado Decreciente				
Sintaxis				
P=A(P/A ,i%, n) + G(P/G, i%, n)				
Tasa Per.	**Nper**	**Pago**	**Gradiente**	**VP**
1,37%	36	120.000	-1.000	**2.979.164**

Var. Independientes

$$P = \frac{G\,(1+i)}{i}\left(\frac{(1+i)^n - 1}{i\,(1+i)^n} - \frac{n}{(1+i)^n}\right)$$

Valor de la primera cuota Gradiente Geométrico Vencido Decreciente dado VP				
Sintaxis				
(A/G, P ,i%, n)				
Tasa Per.	**Nper**	**VP**	**Gradiente**	**CUOTA**
1,00%	15	3.000.000	-5%	**299.529**

Var. Independientes

$$A = P\left[\frac{(1+i)^n\;(i-k)}{(1+i)^n - (1+k)^n}\right]$$

Desarrollo modelo planes de amortización

Para el desarrollo de estos modelos se tuvieron en cuenta las directrices mencionadas en el capítulo dos. Al igual que en el caso anterior, para el desarrollo de estos modelos se elaboró una tabla que contiene la sintaxis de la fórmula, las variables independientes (ingreso de datos) y la variable dependiente (resultado buscado basado en la fórmula de matemáticas financieras). Para la elaboración de las tablas en sí, se usó la herramienta de Excel.

REFERENCIAS

Baca, G. (s.f). *Ingeniería Económica* (8ª Ed.). Bogotá, D.C: Fondo educativo Panamericano.

García, J. (2008). *Matemáticas Financieras con ecuaciones de diferencia finita* (5ª Ed.). Bogotá, D.C: Pearson Educación de Colombia.

Gutierrez, J. (2002). *Matemáticas Financieras apoyo en sistemas*. Bogotá, D.C: Registro Nacional de Derechos de Autor.

Sarmiento, J. (2002). *Matemáticas Financieras*. Recuperado el 10 de noviembre de 2011 de http://www.javeriana.edu.co/decisiones/Julio/Matfin.ppt

Serrano, M. (s.f.). *Cómo construir un modelo de conversión de tasas*. Recuperado el 12 de abril de 2012 de http://www.scribd.com/doc/54454980/Como-construir-un-modelo-de-conversion-de-tasas

Vaquiro, J. (2006). *Indices financieros para pymes*. Recuperado el día 7 de abril de 2012 de http:// www.pymesfuturo.com.

Vargas, H. (2002). *Matemáticas Financieras*. Bogotá, D.C: Memorias

TABLA DE FIGURAS, GRÁFICOS Y TABLAS

ANEXOS

Anexo Archivo de Excel " Desarrollo Modelos en Excel – IFI " Elaboración propia mediante Microsoft Excel 2010.

LICENCIA DE USO – AUTORIZACIÓN DE LOS AUTORES

Actuando en nombre propio identificado (s) de la siguiente forma:

Nombre Completo Rafael Serna Espitia

Tipo de documento de identidad: C.C. [x] T.I. [ ] C.E. [ ] Número: 80.414.587

Nombre Completo ______

Tipo de documento de identidad: C.C. [ ] T.I. [ ] C.E. [ ] Número: ______

Nombre Completo ______

Tipo de documento de identidad: C.C. [ ] T.I. [ ] C.E. [ ] Número: ______

Nombre Completo ______

Tipo de documento de identidad: C.C. [ ] T.I. [ ] C.E. [ ] Número: ______

El (Los) suscrito(s) en calidad de autor (es) del trabajo de tesis, monografía o trabajo de grado, documento de investigación, denominado:

Manual didáctico de Matemáticas Financieras

Dejo (dejamos) constancia que la obra contiene información confidencial, secreta o similar: SI [ ] NO [x]
(Si marqué (marcamos) SI, en un documento adjunto explicaremos tal condición, para que la Universidad EAN mantenga restricción de acceso sobre la obra).

Por medio del presente escrito autorizo (autorizamos) a la Universidad EAN, a los usuarios de la Biblioteca de la Universidad EAN y a los usuarios de bases de datos y sitios webs con los cuales la Institución tenga convenio, a ejercer las siguientes atribuciones sobre la obra anteriormente mencionada:

A. Conservación de los ejemplares en la Biblioteca de la Universidad EAN.
B. Comunicación pública de la obra por cualquier medio, incluyendo Internet
C. Reproducción bajo cualquier formato que se conozca actualmente o que se conozca en el futuro
D. Que los ejemplares sean consultados en medio electrónico
E. Inclusión en bases de datos o redes o sitios web con los cuales la Universidad EAN tenga convenio con las mismas facultades y limitaciones que se expresan en este documento
F. Distribución y consulta de la obra a las entidades con las cuales la Universidad EAN tenga convenio

Con el debido respeto de los derechos patrimoniales y morales de la obra, la presente licencia se otorga a título gratuito, de conformidad con la normatividad vigente en la materia y teniendo en cuenta que la Universidad EAN busca difundir y promover la formación académica, la enseñanza y el espíritu investigativo y emprendedor.

Manifiesto (manifestamos) que la obra objeto de la presente autorización es original, el (los) suscritos es (son) el (los) autor (es) exclusivo (s), fue producto de mi (nuestro) ingenio y esfuerzo personal y la realizó (zamos) sin violar o usurpar derechos de autor de terceros, por lo tanto la obra es de exclusiva autoría y tengo (tenemos) la titularidad sobre la misma. En vista de lo expuesto, asumo (asumimos) la total responsabilidad sobre la elaboración, presentación y contenidos de la obra, eximiendo de cualquier responsabilidad a la Universidad EAN por estos aspectos.

En constancia suscribimos el presente documento en la ciudad de Bogotá D.C.,

NOMBRE COMPLETO: Rafael Serna Espitia
FIRMA: Rafael Serna E.
DOCUMENTO DE IDENTIDAD: 80.414.587
FACULTAD: Posgrados
PROGRAMA ACADÉMICO: Admon. Financiera

NOMBRE COMPLETO: ____
FIRMA: ____
DOCUMENTO DE IDENTIDAD: ____
FACULTAD: ____
PROGRAMA ACADÉMICO: ____

NOMBRE COMPLETO: ____
FIRMA: ____
DOCUMENTO DE IDENTIDAD: ____
FACULTAD: ____
PROGRAMA ACADÉMICO: ____

NOMBRE COMPLETO: ____
FIRMA: ____
DOCUMENTO DE IDENTIDAD: ____
FACULTAD: ____
PROGRAMA ACADÉMICO: ____

Fecha de firma: Mayo 9 de 2012